تمرین‌های ماده چگال ۱ (سری ۵)
آخرین مهلت تحویل: ۱۴ تیر ۱۳۹۰

۱. عملگر چگالی جریان برحسب عملگرهای میدان (با صرف‌نظر از اسپین) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{j}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\nabla\hat{\psi}(\mathbf{r}) - \nabla\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})\right] .$$

نشان دهید که

$$\hat{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}} \hat{j}_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} ,$$

که در آن

$$\hat{j}_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar}{m}\sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}\hat{c}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2} .$$

۲. بخش برهمکنش الکترون-الکترون هامیلتونی یک سیستم الکترونی را در کوانتش دوم و برحسب عملگرهای میدان $\psi(\mathbf{r})$ و $\psi^\dagger(\mathbf{r})$ نوشته و نشان دهید که این عملگر را می‌توان بشکل زیر بازنوشت:

$$\hat{V}_{ee} = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{k},\sigma,\,\mathbf{k}',\sigma'} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\sigma}\hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}'+\mathbf{q},\sigma'}\hat{c}_{\mathbf{k}',\sigma'}\hat{c}_{\mathbf{k},\sigma} .$$

۳. تمرین ۵ از فصل ۶ کتاب Mahan [۱]را حل کنید.

۴. تمرین ۱۰ از فصل ۶ کتاب Mahan [۱] را حل کنید.

۵. مولفه‌های بردار عملگر چگالی اسپینی را می‌توان بصورت

$$\hat{S}^a_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar}{2}\sum_{\mathbf{k},\alpha,\beta} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\alpha}\sigma^a_{\alpha,\beta}\hat{c}_{\mathbf{k},\beta} \qquad (a = x, y, z) ,$$

تعریف کرد که در آن $\sigma^a_{\alpha,\beta}$ مولفه‌های ماتریس‌های پائولی هستند. معادله حرکت عملگر چگالی اسپینی را بدست بیاورید. می‌توانید از میدان مغناطیسی صرف‌نظر کنید.
آیا می توانید رابطه‌ای شبیه به معادله پیوستگی برای چگالی اسپینی بدست بیاورید؟

۶. هامیلتونی تک ذره‌ای

$$\hat{H} = \varepsilon\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b}\right) + \Delta\left(\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger + \hat{b}\hat{a}\right) ,$$

که در آن $\hat{b}^\dagger$، $\hat{a}^\dagger$، $\hat{b}$، $\hat{a}$ عملگرهای خلق و فنای فرمیونی هستند، داده شده است. اگر عملگرهای فرمیونی جدید $\hat{\beta}^\dagger$، $\hat{\alpha}^\dagger$، $\hat{\beta}$، $\hat{\alpha}$ بشکل

$$\hat{a} = u\hat{\alpha} - v\hat{\beta}^\dagger \ ,$$

و

$$\hat{b} = u\hat{\beta} + v\hat{\alpha} \ ,$$

تعریف شوند که در آنها ضرایب u و v کمیتهای حقیقی بوده و

$$u^2 + v^2 = 1 \ .$$

این ضرایب را طوری بدست آورید تا هامیلتونی $\hat{H}$ برحسب عملگرهای جدید قطری شود.

مراجع

[1] G. D. Mahan, *Condensed Matter in a Nutshell* (Princeton University Press, 2011).