تمرین‌های سری هفتم مکانیک کوانتومی ۱

(مهلت تحویل: ۲۸ آذر ۱۳۹۱)

۱- ثابت کنید روابط جابجایی زیر برقرارند.

$$a) \qquad \Big[L^2, L_j\Big] = 0, \qquad j \in \{x, y, z\}$$

$$b) \qquad [L_j, x_k] = i\epsilon_{jkl}x_l,$$

$$c) \qquad [L_j, p_k] = i\hbar\epsilon_{jkl}p_l,$$

$$d) \qquad \Big[L_j, x^2\Big] = 0, \qquad \Big[L_j, p^2\Big] = 0.$$

که در آنها L عملگر تکان زاویه‌ای، x و p به ترتیب عملگر مکان و تکانه هستند.

۲- از عملگر گرادیان در دستگاه مختصات کروی شروع کنید: $\vec{\nabla} = \hat{e}_r\partial_r + \frac{\hat{e}_\theta}{r}\partial_\theta + \frac{\hat{e}_\phi}{rsin\phi}\partial_\phi$ که $\hat{e}_\alpha$ بردار واحد در جهت α است. و شکل عملگرهای زیر را در این دستگاه مختصات به‌دست آورید.

الف) عملگر تکانه زاویه‌ای L.

ب) مولفه‌های کارتزین عملگر تکانه‌زاویه‌ای $L_\alpha, \alpha \in \{x, y, z\}$.

ج) عملگر مربع تکانه زاویه‌ای L^2.

د) عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده $L_\pm$.

۳- الف) عملگر دوران حول محور z با رابطه زیر داده می‌شود.

$$D_z(\alpha)|\phi\rangle = |\phi + \alpha\rangle$$

با فرض اینکه مشتقات $|\phi\rangle$ را بر حسب زاویه ϕ داشته باشیم، نشان دهید:

$$D_z(\alpha) = exp(\alpha\partial_\phi) = exp(\frac{i}{\hbar}\alpha L_z)$$

ب) عملگر دوران با زاویه ϕ حول یک محور دلخواه $\hat{n}$ با رابطه زیر داده می‌شود.

$$D(\hat{n}\phi) = exp\left[\frac{-i\vec{J}.\hat{n}\phi}{\hbar}\right]$$

نشان دهید $J^2 D(\hat{n}\phi)|jm\rangle = \hbar^2 j(j+1)D(\hat{n}\phi)|jm\rangle$. به عبارت دیگر، $D(\hat{n}\phi)|jm\rangle$ هنوز ویژه‌کت J^2 است. (راهنمایی: از قواعد جابجایی J_α و J^2 استفاده کنید.)

ج) عناصر ماتریسی عملگر دوران با زاویه ϕ حول محور $\hat{n}$ عبارتند از: $D^{j'j}_{m'm}(\hat{n}\phi) = \langle j'm'|D(\hat{n}\phi)|jm\rangle$. از نتایج به‌دست آمده در قسمت قبل استدلال کنید که $D^{j'j}_{m'm}$ در j قطری است:

$$D^{j'j}_{m'm}(\hat{n}\phi) = \delta_{jj'} D^{j}_{m'm}(\hat{n}\phi).$$

د) برای زاویه‌های دوران کوچک نشان دهید که

$$D^{j}_{m'm}(\hat{n}\epsilon) = \delta_{mm'} - \frac{i\epsilon_x + \epsilon_y}{۲}\sqrt{(j-m)(j+m+۱)}\delta_{m',m+۱} - \frac{i\epsilon_x - \epsilon_y}{۲}\sqrt{(j+m)(j-m+۱)}\delta_{m',m-۱} - i\epsilon_z m\delta_{m',m}$$

۴- ویژه‌حالت یک تکانه زاویه‌ای $|j, m = m_{max} = j\rangle$ با زاویه خیلی کوچک ϵ حول محور y دوران می‌یابد. بدون استفاده از شکل صریح تابع $d^{j}_{m'm}$، عبارتی بر حسب توان‌های ϵ تا مرتبه $\epsilon^{۲}$ بدست آورید که احتمال پیداکردن آن را در حالت اولیه ارائه دهد.

۵- عناصر ماتریسی $D^{(۱)}(\alpha, ۰, ۰)$ را محاسبه کنید. رابطه مربوط به α های خیلی کوچک را بدست آورید.

موفق باشید.