

تمرین‌های سری اول مکانیک کوانتومی ۲

(مهلت تحویل: ۳۰ دی ۱۳۹۱)

۱- مسئله ۲۱ کتاب کوانتوم پیشرفته ساکورایی.

۲- حالت $|j_1 j_2 m\rangle$ را در نظر بگیرید، که ویژه کت مشترک عملگرهای J^2, J_1^2, J_2^2, J_z است. $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$.

نشان دهید این حالت ویژه حالت عملگر $\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2$ نیز هست و ویژه مقادیر آن را بیابید.

عملیاتی مشابه برای عملگرهای $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}_2$ نیز انجام دهید.

۳- عملگر \mathbf{V} رابطه جابجایی زیر را برآورده می‌کند.

$$[L_i, V_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} V_k$$

که تعریف عملگر برداری است (برای مثال: $\mathbf{V} = \mathbf{r}, \mathbf{P}, \mathbf{L}$).

الف) اثبات کنید که عملگر $e^{-i\phi L_x/\hbar}$ ، عملگر دوران متناظر با دوران حول محور x با زاویه ϕ است. یعنی؛

$$e^{-i\phi L_x/\hbar} V_i e^{i\phi L_x/\hbar} = R_{ij}(\phi) V_j.$$

$R(\phi)$ ماتریس دوران متناظر است.

ب) نشان دهید که

$$e^{i\phi L_x/\hbar} |l, m\rangle = |l, -m\rangle.$$

ج) نشان دهید که دوران به اندازه π حول محور z را می‌توان با استفاده از ترکیب دوران حول محور x به اندازه‌ی

$\pi/2$ و سپس دوران حول محور y به اندازه π و سر آخر دوران معکوس به اندازه‌ی $\pi/2$ حول محور x بدست

آورد. بر حسب عملگرهای دوران، این گفته به صورت زیر در می‌آید.

$$e^{i\pi L_x/2\hbar} e^{-i\pi L_y/\hbar} e^{-i\pi L_x/2\hbar} = e^{-i\pi L_y/\hbar}.$$

د) حال یک الکترون را در نظر بگیرید و بگویید چگونه حالتش تغییر می‌کند اگر آن را به اندازه π حول محور z و

سپس به اندازه π حول محور y و در آخر به اندازه π حول محور x دوران دهیم؟

۴- الف) تانسور کروی مرتبه یکی بسازید که شامل دو بردار متفاوت $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$ و $\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$

باشد، صریحا $T_{\pm 1}^{(1)}$ را بر حسب $V_{x,y,z}$ و $U_{x,y,z}$ بنویسید.

ب) تانسور کروی مرتبه دویی بسازید که شامل دو بردار متفاوت \vec{V} و \vec{U} باشد، صریحا $T_{\pm 2, \pm 1}^{(1)}$ را بر حسب

$U_{x,y,z}$ و $V_{x,y,z}$ بنویسید.

۵- مسئله ۲۸ کتاب کوانتوم پیشرفته ساکورایی.

موفق باشید.