# تمرینهای درس فیزیک بس ذره‌ای ۱ (سری اول)
# زمستان ۱۳۹۲
(آخرین مهلت تحویل ۸ بهمن ۱۳۹۲)

۱. عملگرهای چگالی و چگالی اسپینی در فضای مومنتوم بترتیب بصورت $\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k},\sigma} \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}-\vec{q},\sigma} \hat{c}_{\vec{k},\sigma}$ و $\hat{S}^{a}_{\vec{q}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},\sigma,\sigma'} \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}-\vec{q},\sigma} \tau^{a}_{\sigma,\sigma'} \hat{c}_{\vec{k},\sigma'}$ تعریف می‌شوند. در اینجا $\tau^{a}\,(a = x,y,z)$ مولفه‌های مختلف ماتریس‌های پائولی هستند. نشان دهید که

$$[\hat{\rho}_{\vec{q}}, \hat{S}^{a}_{\vec{p}}] = 0 \ ,$$

و

$$[\hat{S}^{a}_{\vec{q}}, \hat{S}^{b}_{\vec{p}}] = i\epsilon_{abc} \hat{S}^{c}_{\vec{q}+\vec{p}} \ .$$

۲. یک هامیلتونی بدون برهمکنش (تک ذره‌ای) در حالت کلی بصورت

$$\hat{H}_{0} = \sum_{i,j} \hat{c}^{\dagger}_{i} h_{ij} \hat{c}_{j} \ ,$$

قابل نمایش است، که در آن h یک ماتریس هرمیتی‌ست. نشان دهید که این هامیلتونی در حالت کلی قابل حل است. یعنی با انتخاب پایه ای مناسب، میتوان آنرا بصورت

$$\hat{H}_{0} = \sum_{i} \varepsilon_{i} \hat{\tilde{c}}^{\dagger}_{i} \hat{\tilde{c}}_{i} \ ,$$

نوشت که $\varepsilon_i$-ها ویژه مقادیر هامیلتونی $\hat{H}$ هستند.

۳. هامیلتونی تنگ-بست برای یک شبکه یک بعدی N اتمی با ثابت شبکه a را در کوانتش دوم میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\hat{H} = -t \sum_{j=1}^{N} \left( \hat{c}^{\dagger}_{j+1} \hat{c}_{j} + h.c \right) \ ,$$

که جمع بر روی سایت‌های اتمی (j) است و t هاپینگ بین نزدیکترین همسایه هاست. علاوه بر این شرایط مرزی دوره‌ای نیز در نظر گرفته شده است: $\hat{c}_{j+N} = \hat{c}_{j}$ . بکمک تبدیل فوریه گسسته $\hat{c}_{j} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k} e^{ik(ja)} \hat{c}_{k}$ هامیلتونی را قطری کرده و ویژه مقادیر آنرا بدست آورید.

۴. گاز الکترونی دو بعدی سیستمی است که الکترونها در آن در یکی از سه راستای فضایی کاملا محصور شده، ولی در دو راستای دیگر آزادانه میتوانند حرکت کنند.

الف) رابطه بین بردار موج فرمی $k_F$ و چگالی دو بعدی الکترونها $n$ را برای این سیستم بدست بیاورید.

ب) انرژی جنبشی بر الکترون را محاسبه کنید

ج) بکمک اختلال مرتبه اول، تصحیح ناشی از برهمکنش بین الکترونها بر انرژی حالت پایه را محاسبه کنید. توجه داشته باشید که $v_{۲D}(\vec{q}) = ۲\pi e^۲/|q|$ تبدیل فوریه برهمکنش کولنی در دو بعد است.

۵. در مسئله قبل، فرض کرده بودیم که سیستم الکترونی فاقد قطبش اسپینی است: یعنی تعداد الکترونهای با اسپین بالا و پایین با هم برابر است. حال گاز الکترونی دو بعدی با چگالی کل الکترونهای $n = n_\uparrow + n_\downarrow$ و قطبش اسپینی $p = (n_\uparrow - n_\downarrow)/n$ در نظر بگیرید.

الف) انرژی حالت پایه (بدون برهمکنش) این سیستم را برحسب چگالی کل $n$ و قطبش اسپینی $p$ بدست بیاورید.

ب) اثر برهمنکش بین الکترونها بر انرژی حالت پایه را در اختلال مرتبه اول محاسبه کنید.

ج) نشان دهید که برای سیستم بدون برهمکنش، حالت پایه پارامغناطیسی است: یعنی برای تعداد ثابت الکترونها، قطبش اسپینی صفر انرژی کمتری دارد. بررسی کنید که آیا افزودن اثر برهمکنش بین ذرات، امکان قطبش اسپینی غیر صفر در حالت پایه را میدهد؟ در چه چگالی‌ای؟