

تمرینهای درس فیزیک بس ذره‌ای ۱ (سری اول) - بهار
 ۱۳۹۴
 (آخرین مهلت تحویل ۱۴ اردیبهشت ۱۳۹۴)

۱. عملگرهای چگالی و چگالی اسپینی در فضای مومنتوم بترتیب بصورت $\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}, \sigma} \hat{c}_{\vec{k}-\vec{q}, \sigma}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}, \sigma}$ و $\hat{S}_{\vec{q}}^a = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \sigma, \sigma'} \hat{c}_{\vec{k}-\vec{q}, \sigma}^\dagger \tau_{\sigma, \sigma'}^a \hat{c}_{\vec{k}, \sigma'}$ در اینجا ($a = x, y, z$) تعریف می‌شوند. نشان دهید که مولفه‌های مختلف ماتریس‌های پائولی هستند.

$$[\hat{\rho}_{\vec{q}}, \hat{S}_{\vec{p}}^a] = 0,$$

و

$$[\hat{S}_{\vec{q}}^a, \hat{S}_{\vec{p}}^b] = i\epsilon_{abc} \hat{S}_{\vec{q}+\vec{p}}^c.$$

۲. یک هامیلتونی بدون برهمکنش (تک ذره‌ای) در حالت کلی بصورت

$$\hat{H}_0 = \sum_{i,j} \hat{c}_i^\dagger h_{ij} \hat{c}_j,$$

قابل نمایش است، که در آن h یک ماتریس هرمیتی است. نشان دهید که این هامیلتونی در حالت کلی قابل حل است. یعنی با انتخاب پایه ای مناسب، میتوان آنرا بصورت

$$\hat{H}_0 = \sum_i \varepsilon_i \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i,$$

نوشت که ε_i -ها ویژه مقادیر هامیلتونی \hat{H} هستند.

۳. هامیلتونی تنگ-بست برای یک شبکه یک بعدی N اتمی با ثابت شبکه a را در کوانتس دوم میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\hat{H} = -t \sum_{j=1}^N \left(\hat{c}_{j+1}^\dagger \hat{c}_j + h.c \right),$$

که جمع بر روی سایت‌های اتمی (j) است و t هاپینگ بین نزدیکترین همسایه هاست. علاوه بر این شرایط مرزی دوره‌ای نیز در نظر گرفته شده است: $\hat{c}_{j+N} = \hat{c}_j$. بکمک تبدیل فوریه گسسته $\hat{c}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ik(ja)} \hat{c}_k$ هامیلتونی را قطری کرده و ویژه مقادیر آنرا بدست آورید.

۴. رابطه پیوستگی $0 = \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \partial_t \rho(\mathbf{r}, t)$ را برای الکترونهاى آزاد:

$$\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{c}_{\vec{k}, \sigma}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}, \sigma}$$

بدست بیاورید.

نشان دهید که با افزودن برهمکنش بین الکترونها

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2V} \sum_{\vec{q}} v_{\vec{q}} \rho_{\vec{q}} \rho_{-\vec{q}},$$

این رابطه بدون تغییر باقى می ماند.

راهنمایی: می توانید از معادله حرکت هایزنبرگ $[\hat{A}(t), \hat{H}] = i\hbar \partial_t \hat{A}(t)$ کمک بگیرید. همچنین در نظر داشته باشید که

$$\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}, \sigma} \hat{c}_{\vec{k}-\vec{q}, \sigma}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}, \sigma},$$

و

$$\hat{j}_{\vec{q}} = \frac{\hbar}{m} \sum_{\vec{k}, \sigma} \vec{k} \hat{c}_{\vec{k}-\vec{q}/2, \sigma}^\dagger \hat{c}_{\vec{k}+\vec{q}/2, \sigma},$$

۵. در محاسبات مربوط به انرژی تبادل در گاز الکترونی، غالبا با جمله ای همچون

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}, \sigma} n_{\vec{k}-\vec{q}, \sigma} n_{\vec{k}, \sigma}$$

روبرو می شویم، که در آن $n_{\vec{k}, \sigma}$ تابع توزیع فرمی-دیراک است. این عبارت را در یک، دو، و سه بعد، و در دمای صفر کلونین محاسبه کنید.

۶. گاز الکترونی دو بعدی سیستمی است که الکترونها در آن در یکی از سه راستای فضایی کاملا محصور شده، ولی در دو راستای دیگر آزادانه می توانند حرکت کنند.

الف) رابطه بین بردار موج فرمی k_F و چگالی دو بعدی الکترونها n را برای این سیستم بدست بیاورید.

ب) انرژی جنبشی بر الکترون را محاسبه کنید.

ج) خواص ترمودینامیکی (فشار μ و تراکم پذیری κ) را با استفاده از انرژی بدست آمده در بخش قبل محاسبه کنید.

د) بکمک اختلال مرتبه اول، تصحیح ناشی از برهمکنش بین الکترونها بر انرژی حالت پایه را محاسبه کنید. توجه داشته باشید که $v_{2D}(\vec{q}) = 2\pi e^2/|q|$ تبدیل فوری برهمکنش کولنی در دو بعد است.

ه) اثر برهمکنش بین ذرات بر خواص ترمودینامیکی را بررسی کنید.

۷. در مسئله قبل، فرض کرده بودیم که سیستم الکترونی فاقد قطبش اسپینی است: یعنی تعداد الکترونها با اسپین بالا و پایین با هم برابر است. حال گاز الکترونی دو بعدی با چگالی کل الکترونها $n = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$ و قطبش اسپینی $p = (n_{\uparrow} - n_{\downarrow})/n$ در نظر بگیرید.

الف) انرژی حالت پایه (بدون برهمکنش) این سیستم را برحسب چگالی کل n و قطبش اسپینی p بدست بیاورید.

ب) اثر برهمکنش بین الکترونها بر انرژی حالت پایه را در اختلال مرتبه اول محاسبه کنید.

ج) نشان دهید که برای سیستم بدون برهمکنش، حالت پایه پارامغناطیسی است: یعنی برای تعداد ثابت الکترونها، قطبش اسپینی صفر انرژی کمتری دارد. بررسی کنید که آیا افزودن اثر برهمکنش بین ذرات، امکان قطبش اسپینی غیر صفر در حالت پایه را میدهد؟ اگر جواب مثبت است، در چه چگالی (r_s) ای؟