تمرینهای فیزیک بس ذره‌ای ۱ (سری اول)
زمستان ۱۳۹۵
(آخرین مهلت تحویل ۲ بهمن ۱۳۹۵)

۱. عملگرهای چگالی و چگالی اسپینی در فضای تکانه بترتیب بصورت $\hat{\rho}_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k},\sigma} \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}-\vec{q},\sigma}\hat{c}_{\vec{k},\sigma}$ و $\hat{S}^{a}_{\vec{q}} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{k},\sigma,\sigma'} \hat{c}^{\dagger}_{\vec{k}-\vec{q},\sigma}\tau^{a}_{\sigma,\sigma'}\hat{c}_{\vec{k},\sigma'}$ تعریف می‌شوند. در اینجا τ^{a} $(a = x, y, z)$ مولفه‌های مختلف ماتریس‌های پائولی هستند. نشان دهید که

$$[\hat{\rho}_{\vec{q}}, \hat{S}^{a}_{\vec{p}}] = 0 \ ,$$

و

$$[\hat{S}^{a}_{\vec{q}}, \hat{S}^{b}_{\vec{p}}] = i\epsilon_{abc}\hat{S}^{c}_{\vec{q}+\vec{p}} \ .$$

۲. یک هامیلتونی بدون برهمکنش (تک ذره‌ای) در حالت کلی بصورت

$$\hat{H}_0 = \sum_{i,j} \hat{c}^{\dagger}_{i} h_{ij} \hat{c}_{j} \ ,$$

قابل نمایش است، که در آن h یک ماتریس هرمیتی است. نشان دهید که این هامیلتونی در حالت کلی قابل حل است. یعنی با انتخاب پایه ای مناسب، میتوان آنرا بصورت

$$\hat{H}_0 = \sum_{i} \varepsilon_i \hat{\tilde{c}}^{\dagger}_{i}\hat{\tilde{c}}_{i} \ ,$$

نوشت که درآن ε_iـها ویژه مقادیر هامیلتونی $\hat{H}$ هستند.

۳. هامیلتونی تنگ‌ـبست برای یک شبکه یک بعدی N اتمی با ثابت شبکه a را در کوانتش دوم میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\hat{H} = -t\sum_{j=1}^{N}\left(\hat{c}^{\dagger}_{j+1}\hat{c}_{j} + h.c\right) \ ,$$

که جمع بر روی سایت‌های اتمی (j) است و t هاپینگ بین نزدیکترین همسایه هاست. علاوه بر این شرایط مرزی دوره‌ای نیز در نظر گرفته شده است: $\hat{c}_{j+N} = \hat{c}_{j}$. به کمک تبدیل فوریه گسسته $\hat{c}_{j} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k} e^{ik(ja)}\hat{c}_{k}$ هامیلتونی را قطری کرده و ویژه مقادیر آنرا بدست آورید.

۴. رابطه پیوستگی $\partial_t \rho(\mathbf{r},t) + \nabla \cdot j(\mathbf{r},t) = 0$ را برای الکترونهای آزاد:

$$\hat{H}_0 = \sum_{\vec{k},\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{c}^\dagger_{\vec{k},\sigma} \hat{c}_{\vec{k},\sigma}$$

بدست بیاورید.

۵. تبدیل فوریه برهمکنش کولنی $v(r) = e^2/r$ را در دو و سه بعد فضایی بدست بیاورید.

۶. نشان دهید که نمایش کوانتش دومی جمله برهمکنش الکترون‌ـالکترون در پایه تکانه بصورت زیر قابل نمایش است

$$V_{\mathrm{e-e}} = \frac{1}{2V} \sum_{\vec{q}} v(q) \sum_{\vec{k},\vec{k}',\sigma,\sigma'} \hat{c}^\dagger_{\vec{k}-\vec{q},\sigma} \hat{c}^\dagger_{\vec{k}'+\vec{q},\sigma'} \hat{c}_{\vec{k}',\sigma'} \hat{c}_{\vec{k},\sigma} \ .$$