

ارتباط بین همدوسی کوانتومی و گذار فاز کوانتومی در مدل آیزینگ دو بعدی

تقدمی، نرجس^۱؛ مانی، اعظم^۲؛ باکویی، علی^۱

^۱دانشکده علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس، گروه اتمی مولکولی، خیابان جلال آل احمد، تهران

^۲دانشکده علوم مهندسی، دانشکدگان فنی دانشگاه تهران، خیابان ۱۶ آذر، تهران

چکیده

همدوسی کوانتومی یکی از مشخصه‌های اصلی و بنیادی سامانه‌های کوانتومی است که سبب بروز پدیده‌هایی می‌شود که در فیزیک کلاسیک قابل توجیه نیستند. امروزه، این ویژگی مهم کوانتومی به همراه پدیده درهم تنیدگی کوانتومی در حوزه‌های مختلف علوم و فناوری کوانتومی از جمله مسائل مربوط به ماده چگال، مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در این مقاله با مطالعه همدوسی کوانتومی به تشخیص نقطه‌ی گذار فاز کوانتومی و تعیین نماهای بحرانی می‌پردازیم و در این راستا مدل آیزینگ دو بعدی را مورد بررسی و تحلیل عددی قرار داده و نشان می‌دهیم که رفتار غیرتحلیلی همدوسی در نزدیکی نقطه گذار فاز، عامل تشخیص تغییر فاز است. علاوه بر این، با استفاده از روش بازبهنجارش و بلوک بندی چهارتایی اسپین‌ها، رفتار همدوسی و مشتق همدوسی را در نزدیک نقطه‌ی گذار فاز بررسی کرده و نمای بحرانی مربوط به طول همبستگی را بدست آورده‌ایم. در نهایت، رفتار زمانی همدوسی کوانتومی در نزدیکی نقطه بحرانی مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده می‌شود که رفتاری تناوبی دارد.

واژه‌های کلیدی: همدوسی کوانتومی، گذار فاز کوانتومی، روش بازبهنجارش، مدل آیزینگ دو بعدی.

A Relation between Quantum Coherence and Quantum Phase Transition in 2D-Ising Model

Taghadomi, Narjes¹; Mani, Azam²; Bakouei, Ali¹

¹ Department of Physics, Tarbiat Modares University, Tehran,

² Department of Engineering Science, College of Engineering, University of Tehran

Abstract

Quantum coherence is the one of the fundamental features in the quantum mechanics, which its property describes some of phenomena in nature with no explanation in classical physics. On the other hand, quantum coherence is also applicable in many fields of physics such as many body systems in condensed matter. In this article, we use the quantum coherence to detect the quantum phase transition and critical exponent for a 2D-Ising model with transverse field. Since, we utilized the quantum renormalization group and four sites blocking to recognize the singularity behavior of quantum coherence near the critical point. The relation between derivate of quantum coherence and the size of system determine the critical exponent. Finally we show that the quantum coherence has periodic evolution near critical point.

Keywords: Quantum Coherence, Quantum Phase Transition, Renormalization Group, 2D-Ising Model.

مقدمه

توضیح دهند و می‌توان با تحلیل رفتار آنها با دقت زیادی، نماهای بحرانی را به دست آورد. همچنین ما تحول زمانی همدوسی در نزدیکی نقطه بحرانی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ساختار مقاله به این شکل است که در بخش بعد، مدل آیزینگ دوبعدی و معیار همدوسی کوانتومی معرفی خواهد شد و سپس در بخش‌های بعدی به بررسی رفتار همدوسی کوانتومی و تحول زمانی آن در نزدیکی نقطه گذار پرداخته می‌شود. در نهایت در بخش آخر، با ارایه‌ی نتیجه‌گیری، مقاله را به پایان خواهیم رساند.

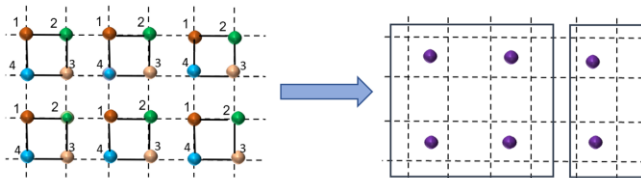
معرفی مدل و روش حل مساله

سیستم مورد بررسی، یک شبکه مربعی از ذرات اسپینی $1/2$ است و تحول آن با هامیلتونی آیزینگ توصیف می‌شود:

$$H = -J \sum_{i,j} \sigma_i^z \sigma_j^z - h \sum_i \sigma_i^x, \quad (1)$$

که J ضریب جفت شدگی فرومغناطیسی، h میدان مغناطیسی عرضی و σ_i^x, σ_i^z ماتریس‌های پائولی x و z ، مربوط به ذره i ام هستند.

در روش بازهنجارش، تنها مقیاس طولی که در نزدیکی نقطه گذار فاز اهمیت دارد، طول همبستگی است و چون سیستم بحرانی تحت همه‌ی مقیاس‌های طولی ناورد است، می‌توان از درجات آزادی در مقیاس‌های طولی کوچک‌تر از طول همبستگی صرف نظر کرد و این چشم پوشی، باعث تغییر در مقیاس طولی سیستم می‌شود، در حالی که در خصوصیات سیستم تغییری ایجاد نخواهد شد [۱۲].



شکل ۱: بلوک بندی شبکه اسپینی به صورت چهارتایی و مقیاس بندی جدید.

در این روش از افت و خیزهای کوچک صرف نظر شده و با کوچک کردن ذرات سیستم، مقیاس طولی سیستم بزرگ می‌شود. بدین صورت که با بلوک بندی شبکه، هامیلتونی کل به دو بخش

گذار فاز، یکی از جذاب‌ترین پدیده‌های طبیعی است که در تجربیات روزانه ما ظهور پیدا کرده است. به طوری که امروزه می‌توان کنترل کردن این پدیده را به عنوان یکی از اهداف تحقیقاتی مهم، جهت رشد و توسعه فناوری‌های نوین به حساب آورد. این پدیده، در سامانه‌های کوانتومی (مانند شبکه‌های اسپینی)، ماهیت کوانتومی به خود می‌گیرد و آشکارا می‌توان به صورت بنیادی و با استفاده از قوانین مکانیک کوانتومی، به شناخت این پدیده پرداخت. همانند گذار فاز کلاسیکی، در گذار فاز کوانتومی به پارامتری، مشابه پارامتر نظم نیاز داریم تا بتوانیم پدیده گذار فاز را بررسی کنیم. البته دمای تقریباً صفر محدودیتی را در انتخاب پارامترها ایجاد می‌کند [۲۱]. بنابراین محققان به سمت استفاده از مفاهیم کوانتومی رفته‌اند تا با بررسی آنها، پدیده گذار فاز کوانتومی را تشخیص داده و مورد مطالعه قرار دهند [۳-۶].

همدوسی کوانتومی، یکی از مفاهیمی است که از شالوده اصول موضوعه مکانیکی کوانتومی نشأت گرفته و از ظهور مکانیک کوانتومی همواره با آن همراه بوده است. از سوی دیگر معمولاً گذار فاز کوانتومی در دمای تقریباً صفر رخ می‌دهد که باعث محدودیت در انتخاب پارامتر نظم می‌شود، اما به طور حیرت آوری مشاهده می‌شود که همدوسی کوانتومی می‌تواند به عنوان معیاری مشابه پارامتر نظم، در گذار فاز دمای پایین رفتار کند. آنچه که در بررسی گذار فاز مرسوم بوده، این است که از نظریه بازهنجارش کوانتومی استفاده شود، این روش اگرچه ممکن است نقاط بحرانی را بصورت کاملاً دقیق بیان نکند ولی نماهای بحرانی را دقیق‌تر از روش‌های حل دیگر تخمین می‌زند.

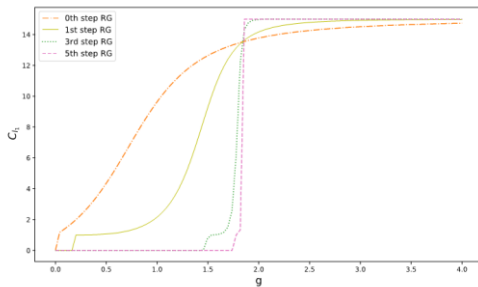
ما در این مقاله قصد داریم تا با رویکرد نظریه‌ی بازهنجارش [۷-۱۰] به بررسی گذار فاز کوانتومی یک سامانه‌ی آیزینگ اسپینی بپردازیم و در چارچوب قوانین مکانیک کوانتومی و با مطالعه‌ی همدوسی کوانتومی [۱۱]، رفتار سیستم در نزدیکی نقطه‌ی گذار را تحلیل کنیم. همچنین نشان خواهیم داد که نه تنها حالت‌های مربوط به چند اسپین، گذار فاز را تشخیص می‌دهند، بلکه همدوسی حالت‌ها با تعداد ذرات کمتر و حتی تک ذره‌ای نیز، می‌توانند به خوبی رفتار سیستم در نزدیکی نقطه‌ی گذار فاز را

متفاوتی برای بلوک‌ها در نظر گرفت. تنها مسئله این است که بلوک‌ها باید به نحوی انتخاب شوند که هامیلتونی مؤثر، همانند رابطه ۵ فرم هامیلتونی اولیه را داشته باشند. در تحقیقات [۱۴] و [۱۳] با در نظر گرفتن بلوک بندی‌های سه‌تایی و پنج‌تایی در هم-تندگی مورد مطالعه قرار گرفته است.

در بررسی همدوسی برای هر بلوک چهارتایی، ابتدا ماتریس چگالی حالت پایه $\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ با حل عددی محاسبه شد و سپس همدوسی کوانتومی که با معیار نرم l_1 سنجیده می‌شود (رابطه (۸))، برای مقادیر مختلف g رسم گردید (شکل ۲).

$$C_{i_1}(\rho) = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} |\rho_{i,j}|. \quad (۸)$$

همانطور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، در مراتب بالای بازه‌نچارش، که متناظر با سیستم‌های با سایز بزرگ‌تر هستند، شروع اعمال میدان مغناطیسی و افزایش آن، مقدار همدوسی نسبتاً ثابت است ولی در نزدیکی نقطه بحرانی با تغییر ناچیزی در میدان مغناطیسی، همدوسی کوانتومی بسیار زیاد تغییر می‌کند. البته با افزایش مجدد g و دور شدن از نقطه بحرانی شیب این تغییرات کم می‌شود. این رفتار غیرتحلیلی در مرتبه سوم بازه‌نچارش و مراتب بالاتر از آن به خوبی قابل مشاهده است.



شکل ۲: همدوسی کوانتومی بر حسب g در مراتب مختلف بازه‌نچارش.

تکنیکی در نزدیکی نقطه گذار فاز، در ماتریس‌های چگالی با تعداد ذرات کمتر نیز قابل مشاهده است که با گرفتن رد جزئی از ماتریس چگالی اصلی، همدوسی کوانتومی نرم l_1 برای ماتریس چگالی‌های کاهش یافته در شکل ۳ محاسبه شده است.

هامیلتونی داخل هر بلوک H^B و هامیلتونی بین بلوک‌ها H^{BB} تقسیم می‌شود:

$$H = H^B + H^{BB}. \quad (۲)$$

در اینجا بلوک بندی چهار ذره‌ای انتخاب شده که هامیلتونی داخل هر بلوک بصورت زیر است:

$$H^b = -J[(\sigma_{L,1}^z \sigma_{L,2}^z + \sigma_{L,2}^z \sigma_{L,3}^z + \sigma_{L,3}^z \sigma_{L,4}^z + \sigma_{L,4}^z \sigma_{L,1}^z) + g(\sigma_{L,1}^x + \sigma_{L,2}^x + \sigma_{L,3}^x + \sigma_{L,4}^x)], \quad (۳)$$

در بررسی گذار فاز کوانتومی، چون سیستم در نزدیکی دمای صفر مطلق قرار دارد، می‌توان هامیلتونی کل سیستم را با عملگرهای تصویر P_0 به زیرفضای کمترین انرژی‌های هر بلوک که $|\psi_0\rangle$ و $|\psi_1\rangle$ هستند؛ تصویر کرد:

$$H^{eff} = P_0^\dagger H P_0 = P_0^\dagger H^B P_0 + P_0^\dagger H^{BB} P_0. \quad (۴)$$

در این صورت هامیلتونی مؤثر H^{eff} ، شکلی مشابه با هامیلتونی اولیه (رابطه ۱)، ولی متفاوت در ضرایب جفت شدگی دارد:

$$H = -J' \sum_{i,j} \sigma_i^z \sigma_j^z - h' \sum_{i,j} \sigma_i^x, \quad (۵)$$

و عملگرهای تصویر بصورت

$$P_0 = \prod_{L=1}^{\frac{N}{4}} (|\uparrow\rangle_L \langle\psi_0| + |\downarrow\rangle_L \langle\psi_1|), \quad (۶)$$

هستند. در اینجا $|\uparrow\rangle_L$ و $|\downarrow\rangle_L$ حالت‌های جدید بلوک L ام می‌باشد. با تکرار روش بازه‌نچارش ضریب جفت شدگی نرمالایز

شده در هر مرتبه، یعنی g' ، با ضریب قبلی آن $g = \frac{h}{J}$ به شکل زیر در ارتباط است [۱۳]:

$$g' = \frac{g^4 ((1+g^2)^3 (4+4g^2+2g^4+g^6))^{\frac{1}{4}}}{(2+g^2)\sqrt{8+8g^2+3g^4+g^6}}. \quad (۷)$$

و اندازه‌ی سیستم در مرتبه‌ی n ام بازه‌نچارش برابر با $N = 4^n$ است. برای استفاده از روش بازه‌نچارش می‌توان طول‌های

برای مشخص شدن تاثیر اندازه شبکه در رفتار غیرتحلیلی همدوسی، برای هر مرتبه از بازبهنجارش، مقدار لگاریتم

$$\left. \frac{dC_{l_1}}{dg} \right|_{g_{\max}}$$

برحسب $\ln(N)$ را در شکل ۶ رسم شده است.

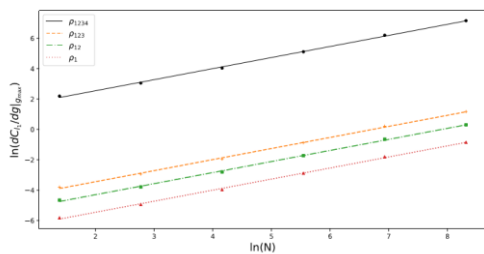
با استفاده از رابطه $\sim N^\theta$ از این نمودار می‌توان نمای طول همبستگی θ را با دقت بسیار خوبی به دست آورد، که در اینجا مقدار حاصل شده در روش همدوسی $\theta = 0.729$ ، با مقادیری که از روش درهم تنیدگی ($\theta = 0.795$) و حل دقیق $\theta = 0.805$ به دست آمده، توافق دارد.

با داشتن مقدار θ ، می‌توان نمای واگرایی طول همبستگی در نزدیکی نقطه بحرانی را با استفاده از رابطه $\xi \sim (g - g_c)^{-\nu}$ و $\theta = \frac{1}{\nu d} = 0.729$ به دست آورد که در آن d بعد سیستم

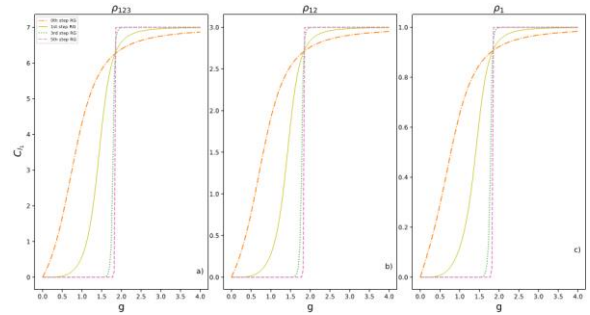
است [۱۳]. با جایگذاری مقدار θ ، خواهیم داشت: $\nu = 0.68$. شایان ذکر است که می‌توان نقطه بحرانی را با محاسبه نقطه ثابت غیر بدیهی $g' = g$ نیز به دست آورد، از این طریق $g_c = 1.835$ بوده و با مقدار دقیقی که از روش مونت کارلو به دست می‌آید متفاوت است ($g_c = 3.4$). همچنین می‌توان از رابطه ۹ نیز برای محاسبه نمای طول همبستگی استفاده کرد.

$$\nu^{-1} = \log_2 \left. \frac{dg'}{dg} \right|_{g=g_c} \quad (9)$$

نمای بحرانی محاسبه شده از این رابطه $\nu = 0.62$ است که بسیار نزدیک به مقدار واقعی اش $\nu = 0.63$ است [۱۳].

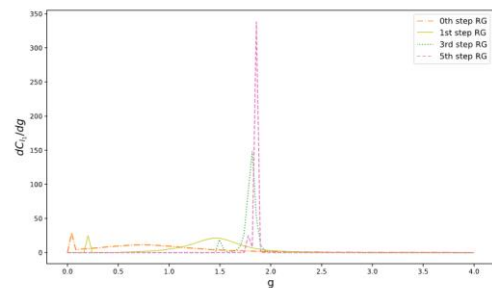


شکل ۶: نمودارهای $\left. \frac{dC_{l_1}}{dg} \right|_{g_{\max}}$ برحسب g برای ماتریس چگالی‌های مختلف.

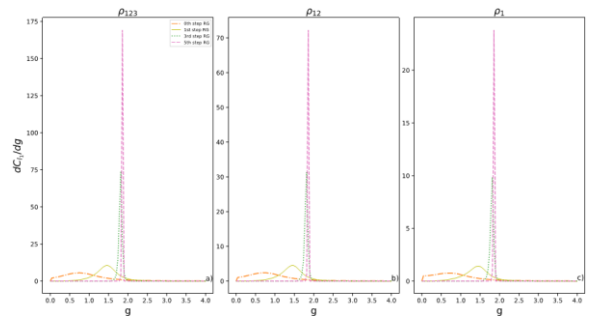


شکل ۳: همدوسی کوانتومی ماتریس‌های چگالی کاهش یافته (a) ρ_{123} ، (b) ρ_{12} ، (c) ρ_1 بر حسب g در مراتب مختلف بازبهنجارش.

بصورت مشهودتر می‌توان این رفتار غیرتحلیلی را در مشتق همدوسی بررسی کرد. در شکل‌های ۴ و ۵ از همدوسی کوانتومی برای ماتریس چگالی اصلی و ماتریس‌های کاهش یافته، نسبت به g مشتق گرفته شده است. همانطور که دیده می‌شود، دارای یک بیشینه است و در مراتب بالای بازبهنجارش این بیشینه در تمام شکل‌ها به سمت نقطه بحرانی $g_c = 1.83$ میل می‌کند. این مقدار، مشابه با مقداری است که در روش استفاده از درهم تنیدگی نیز به دست آمده است ($g_c = 1.835$) [۱۳].



شکل ۴: مشتق همدوسی کوانتومی بر حسب g برای مراحل مختلف بازبهنجارش.



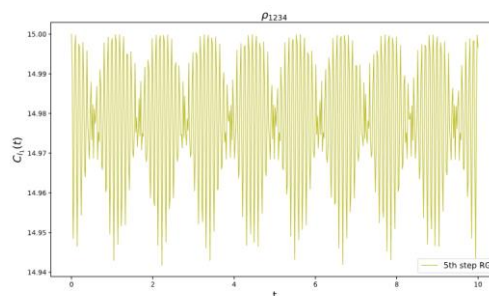
شکل ۵: مشتق همدوسی کوانتومی ماتریس‌های چگالی کاهش یافته (a) ρ_{123} ، (b) ρ_{12} ، (c) ρ_1 بر حسب g در مراتب مختلف بازبهنجارش.

بررسی تحول زمانی

در این بخش، با استفاده از تصویر شرویدینگر تحول زمانی حالت سیستم در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی بررسی می‌شود. حالت اولیه را $|++++\rangle$ در نظر می‌گیریم که حالتی با بیشینه مقدار همدوسی اولیه است. تحول با عملگر یکانی $U(t) = e^{-iH_{eff}t}$ توصیف می‌شود و ماتریس چگالی تحول یافته به صورت

$$\rho(t) = U(t)|++++\rangle\langle++++|U^\dagger(t), \quad (10)$$

است. تحول مقدار همدوسی برحسب زمان در شکل ۷ قابل مشاهده است و همان‌طور که مشهود است تغییرات همدوسی کوانتومی در طی زمان دارای یک پوش با فرکانس زمانی ثابت است و این نشان می‌دهد در نزدیکی نقطه‌ی بحرانی رفتار سیستم برحسب زمانی نیز دارای نظم بلند برد در زمان نیز هست.



شکل ۷: تحول زمانی همدوسی کوانتومی در $g = 1.85$ برای مرتبه پنجم بازبهنجارش.

نتیجه گیری

تاکنون روش‌های مختلفی برای تشخیص و مطالعه‌ی گذار فاز کوانتومی به کار گرفته شده است ولی یافتن کمیتی که بتوان با استفاده از آن نقطه‌ی گذار در اکثر مدل‌ها را تشخیص داد، هنوز مورد سؤال است [۱۵ و ۱۶]. یکی از کمیت‌های مورد استفاده، همدوسی کوانتومی است که ما نشان دادیم رفتار غیر تحلیلی این کمیت می‌تواند گذار فاز کوانتومی در مدل آیزینگ با میدان مغناطیسی عرضی در دو بعد را تشخیص می‌دهد و می‌توان با ارتباطی که بین سائز سیستم در هر مرحله از بازبهنجارش و مشتق همدوسی کوانتومی هست، نمای طول همبستگی را بیابیم که بسیار مشابه با مقداری است که از حل با روش مونت کارلو محاسبه شده

است. برجستگی این کار در مقایسه با سایر روش‌های موجود، حل ساده به نسبت روش‌های دیگری همچون درهم‌تنیدگی است که برای این مدل پیشنهاد شده است. معیار نرم I_1 یک کمیت خطی است و محاسبه‌ی آن به سادگی صورت می‌پذیرد و نیاز به منابع محاسباتی بالایی ندارد. از طرف دیگر نشان دادیم که حتی با همدوسی کوانتومی ماتریس چگالی یک تک اسپین، نیز می‌توان نمای بحرانی را با تقریب مناسبی به درستی محاسبه کرد و نیازی به استفاده‌ی اجباری از ماتریس چگالی سیستم بزرگ وجود ندارد.

مراجع

- [۱] M. Vojta, "Quantum Phase Transitions"; *Reports on Progress in Physics* **66**, No.12 (2003) 2069-2110.
- [۲] S. Sachdev; "Quantum Phase Transitions"; 2nd edition, Cambridge University Press, (2011).
- [۳] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci, R. Fazio, "Scaling of Entanglement Close to a Quantum Phase Transition"; *Nature* **416** (2002) 608-604.
- [۴] R. Dillenschneider; "Quantum Discord and Quantum Phase Transition in Spin Chains"; *Physical Review B* **78** (2008) 224413.
- [۵] M. Qin; "Renormalization of quantum coherence and quantum phase transition in the Ising model"; *Physica A* **561** (2021) 125176.
- [۶] M. Qin, L. Wang, M. He, X. Wang, "The dynamical behavior of quantum coherence in one-dimensional transverse-field Ising model"; *Physica. A* **540** (2020) 122944.
- [۷] M. A. Martin-Delgado and G. Sierra; "Real Space Renormalization Group Methods and Quantum Groups"; *Physical Review Letters*. **76**, No.7 (1996) 1146-1149.
- [۸] A. Langari; "Quantum renormalization group of XYZ model in a transverse magnetic field"; *Physical Review B* **69**, (2004) 100402(R).
- [۹] M. Kargarian, R. Jafari, and A. Langari, "Renormalization of Entanglement in the Anisotropic Heisenberg (X X Z) Model"; *Physical Review A* **77** (2008) 032346.
- [۱۰] R. Jafari, A. Langari; "Phase diagram of the one-dimensional S=1/2 XXZ model with ferromagnetic nearest-neighbor and antiferromagnetic next-nearest-neighbor interactions"; *Physical Review B* **76** (2007) 014412.
- [۱۱] T. Baumgratz, M. Cramer, M. B. Plenio, "Quantifying Coherence", *Physical Review Letters* **113** (2014) 140401.
- [۱۲] K. G. Wilson; "The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem"; *Reviews Of Modern Physics* **47**, No.7. (1975) 773-840.
- [۱۳] Y.-L. Xu, X.-M. Kong, Z.-Q. Liu, and C.-Y. Wang; "Quantum Entanglement and Quantum Phase Transition for the Ising Model on a Two-Dimension Square Lattice"; *Physica A* **446** (2016) 217-223.
- [۱۴] Y-L Xu, X-M Kong, Z-Q Liu and C-C Yin; "Scaling of entanglement during the quantum phase transition for Ising spin systems on triangular and Sierpinski fractal lattices"; *Physical Review A* **95** (2017) 042327.
- [۱۵] M. Usman and K. Khan; "Entanglement and multipartite quantum correlations in two-dimensional XY model with Dzyaloshinskii-Moriya interaction"; *The European Physical Journal D* **74**, No.181 (2020).
- [۱۶] Y. C. Li, J. Zhang, and H.-Q. Lin; "Quantum Coherence Spectrum and Quantum Phase Transitions"; *Physical Review B* **101**, (2020) 115142.