

# بررسی تأثیر نحوه آرایش فرکانسی گره‌ها در دینامیک شبکه‌های دولایه

سیف، علی؛ زارعی، مینا

دانشکده فیزیک دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، بلوار پروفیسور ثبوتی، زنجان

## چکیده

در این مقاله نقش آرایش فرکانسی گره‌های نظیر در دینامیک شبکه‌های دو لایه، در حضور پارامتر ناکامی، بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که نحوه‌ی آرایش فرکانسی بر روی گذار فاز تأثیر می‌گذارد. در واقع می‌توان با تغییر آرایش فرکانسی تعداد نقاط گذار فاز را تغییر داد. همچنین دینامیک شبکه در محدوده نقطه بحرانی این گذار نوسانی شده و شامل طیف‌های مختلف فرکانسی است.

## Investigating the effect of frequency arrangement of the nodes in the dynamics of two-layer networks

Seif, Ali; Zarei, Mina

Department of Physics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Prof. Yousef Sobouti Blvd., Zanjan

### Abstract

*This study examines the impact of peer node frequency distribution on the behavior of two-layer networks, taking into account the frustration parameter. The findings show that the frequency distribution influences phase transitions, with alterations in the distribution resulting in changes to the number of transition points. Additionally, network dynamics exhibit fluctuations within the critical point range of this transition, encompassing various frequency bands.*

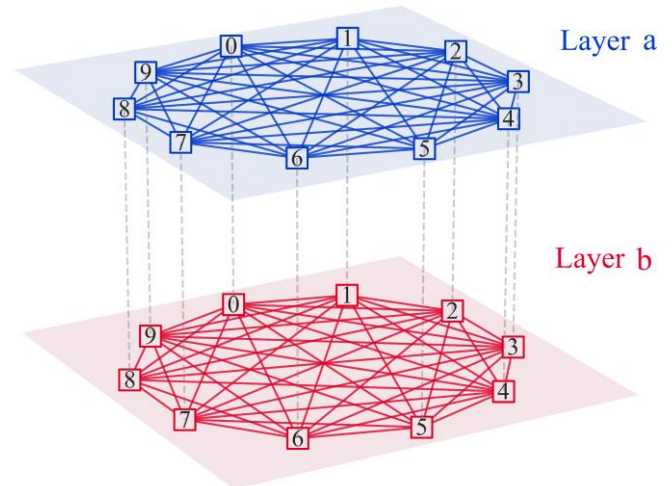
### مقدمه

سیستم‌های پیچیده مانند مغز، ضربان قلب، رفتار جمعی کرم‌های شب‌تاب مشاهده شده است [۳]. بررسی نحوه گذار فاز از حالت ناهمگام به حالت همگام از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. تحقیقات پیشین نشان داده‌اند که، ساختار شبکه، دینامیک اجزای آن، پارامتر ناکامی و غیره می‌توانند در نوع گذار فاز از حالت ناهمگام به همگام تا تأثیر بگذارند [۴]. بررسی عواملی که به گذار فاز مرتبه اول (انفجاری) منجر می‌شوند به دلایل مختلف بسیار حائز اهمیت است. به عنوان مثال مطالعات پیشین نشان داده‌اند که بیماری صرع نتیجه گذار فاز انفجاری نورون‌ها از حالت ناهمگام به همگام است [۵]. در بررسی دینامیک شبکه‌های چندلایه علاوه بر ساختار لایه‌ها، تفاوت دینامیک گره‌های متناظر در لایه‌های متفاوت نیز در دینامیک جمعی شبکه تأثیرگذار است. در این مقاله، ما تأثیر نحوه آرایش فرکانس ذاتی گره‌ها را در دینامیک شبکه‌های دولایه، در حضور پارامتر ناکامی بررسی می‌کنیم.

مدل کردن سیستم‌های پیچیده با شبکه‌های چندلایه به بررسی بهتر دینامیک این سیستم‌ها منجر می‌شود [۱]. در واقع، اجزای یک سیستم پیچیده از طریق چندین شبکه مستقل جفت می‌شوند. به عنوان مثال، مطالعات اخیر نشان داده‌اند که علاوه بر ارتباط سیناپسی بین سلول‌های عصبی انواع دیگری از سیگنال‌دهی غیر مستقیم بین نورون‌ها وجود دارد، مانند مدوله کردن برون سیناپسی توسط مونوآمین‌ها و پپتیدها [۲]. بنابراین ساختار شبکه‌های عصبی به صورت چندلایه است. به همین دلیل در سال‌های اخیر به جای بررسی ساختار و دینامیک شبکه‌های تک لایه، مطالعات بسیاری برای فهم رفتار شبکه‌های چندلایه صورت گرفته است. عموماً اجزای شبکه‌های پیچیده دارای دینامیک هستند و با همدیگر به صورت پویا برهم‌کنش دارند. دینامیک همگامی از دینامیک‌های مهم در سیستم‌های پیچیده است. کلمه‌ی همگامی به مفهوم هم‌زمانی دینامیک اجزای یک سیستم است. پدیده‌ی همگامی در بسیاری از

## روش

در این مقاله ما یک شبکه دو لایه در نظر می‌گیریم، به طوری که هر گره در هر لایه به گره نظیر خود در لایه دیگر متصل است (شکل ۱).



شکل ۱ تصویر طرحواره‌ای از یک شبکه دو لایه کامل

هر لایه یک شبکه کامل است، که در آن همه گره‌ها به هم متصل هستند. دینامیک گره‌های شبکه با نوسانگر ساکادوچی-کوراموتو مدل می‌شود. بنابراین دینامیک تحول فازی گره  $i$ ام در لایه  $a$  و  $b$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\theta}_i^a = \omega_i^a + \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j^a - \theta_i^a) + \lambda \sin(\theta_i^b - \theta_i^a + \alpha), \quad (1-f)$$

$$\dot{\theta}_i^b = \omega_i^b + \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j^b - \theta_i^b) + \lambda \sin(\theta_i^a - \theta_i^b + \alpha), \quad (1-b)$$

در این جا تعداد گره‌ها در هر لایه برابر  $N = 1000$  است.  $\theta_i^{a(b)}$  و  $\omega_i^{a(b)}$  به ترتیب فاز و فرکانس ذاتی گره  $i$ ام در لایه  $a$  یا  $b$  است. فاز اولیه نوسانگرها به صورت تصادفی از یک تابع توزیع یکنواخت در بازه‌ی  $-\pi \leq \theta_i^{a(b)} \leq \pi$  انتخاب شده است.  $\lambda$  و  $\sigma$  به ترتیب قدرت جفت‌شدگی درون لایه‌ای و بین لایه‌ای را نشان می‌دهند. در مطالعات ما، پارامتر ناکامی  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  فرض شده است. نتایج این مقاله از حل معادله (۱) با استفاده از روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ با گام‌های زمانی  $dt = 0.01$  برای  $40,000$  گام زمانی محاسبه شده‌اند.

برای سنجش میزان همگامی در هر لایه پارامتر نظم همگامی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r^{a(b)} e^{i\psi^{a(b)}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j^{a(b)}}, \quad (3)$$

با توجه به تعریف فوق  $0 \leq r \leq 1$  خواهد بود. هنگامی که تمامی گره‌ها در فازی مشابه هم قرار گرفته باشند، سیستم در همگامی کامل قرار دارد، یعنی  $r^{a(b)} = 1$  است. در مقابل، زمانی که سیستم در حالت ناهمگام کامل باشد،  $r^{a(b)} = 0$  خواهد بود. برای پیدا کردن میزان همگامی نهایی شبکه، میانگین زمانی  $r$  برای ۸۰ درصد پایانی مدت زمان اجرا، یعنی بعد از رسیدن سیستم به حالت پایا محاسبه شده است.

از آنجایی که می‌خواهیم تأثیر نحوه چینش فرکانس گره‌ها در دینامیک شبکه‌های دولایه را بررسی کنیم، فرکانس گره‌های لایه‌ی اول (لایه  $a$ ) را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\omega_i = -0.5 + \frac{(i-1)}{(N-1)}, \quad (4)$$

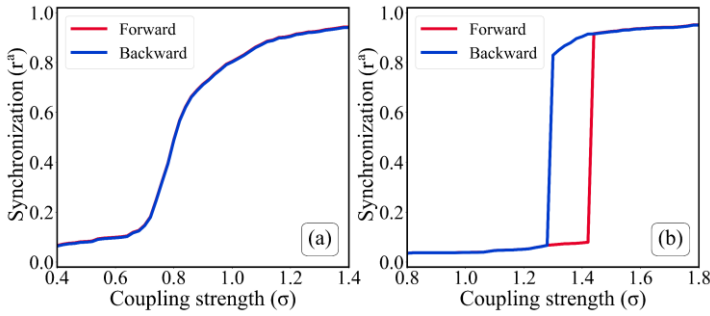
به این ترتیب فرکانس ذاتی گره‌ها در لایه  $a$  در بازه‌ی  $0.5 \leq \omega_i^a \leq 0.5$  از کم به زیاد مرتب می‌شوند. در حالی که چینش فرکانس ذاتی در لایه  $b$  لزوماً با لایه  $a$  برابر نیست. به عبارتی گره‌های نظیر، فرکانس ذاتی مشابهی ندارند. یعنی،  $\omega_i^a \neq \omega_i^b$ .

برای اینکه تأثیر تطابق فرکانس گره‌های نظیر در لایه‌ها را بر روی گذار فاز ببینیم، میانگین تفاوت فرکانس‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta\omega = \frac{\sum_{i=1}^N |\omega_i^a - \omega_i^b|}{2 \sum_{i=1}^N |\omega_i^a|}. \quad (5)$$

طبق رابطه فوق  $\Delta\omega$  در بازه  $0 \leq \Delta\omega \leq 1$  تغییر می‌کند. هنگامی که تمامی جفت گره‌های نظیر با یکدیگر برابر باشند، یعنی  $\omega_i^a = \omega_i^b$ ،  $\Delta\omega = 0$  است. در مقابل، اگر تمامی جفت گره‌های متناظر بیشترین اختلاف فرکانس ممکن را از هم داشته باشند، یعنی  $\omega_i^a = -\omega_i^b$ ، حداکثر تفاوت ( $\Delta\omega = 1$ ) را شاهد هستیم.

برگشت) با استفاده از فاز نهایی گره‌های شبکه برای فاز اولیه‌ی گره‌ها در قدم بعدی محاسبه قدرت جفت شدگی، گذار فاز همگامی برای مدل کوراموتو بدون پارامتر ناکامی پیوسته است، در حالی که حضور پارامتر ناکامی گذار فاز را ناپیوسته می‌کند. گذار فاز همگامی لایه  $b$  نیز به همین صورت است. این نتایج با نتایج مشاهده شده در تحقیقات پیشین هم خوانی دارد [۴].

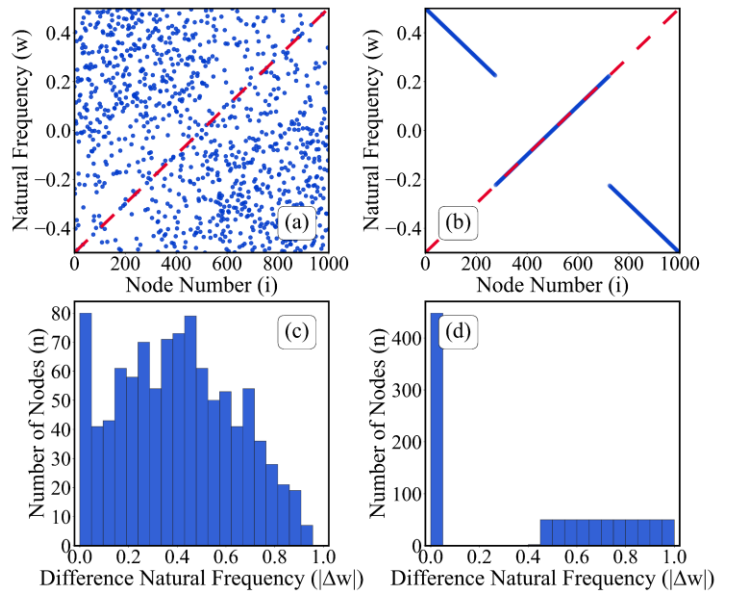


شکل ۳ پارامتر همگامی برحسب قدرت جفت شدگی برای همگامی لایه  $a$  (a)  $\alpha = \pi/2$  (b)  $\alpha = 0$  خطوط قرمز و آبی به ترتیب نشان‌دهنده مسیر رفت و برگشت هستند. در این جا  $\lambda = 10$  است و تفاوت فرکانسی به صورت تصادفی ایجاد شده و برابر با  $\Delta\omega = 0.8$  است.

شکل ۴ گذار فاز همگامی را در شبکه دو لایه برای پارامتر ناکامی  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  نشان می‌دهد. در اینجا فرکانس ذاتی نوسانگرها در لایه دوم (لایه  $b$ ) به صورت منظم در بازه  $0.5 \leq \omega_i^b \leq 0.5$  انتخاب شده است، به طوری که  $\Delta\omega = 0.8$  باشد (شکل ۲- $b$ ). همان‌طور که مشاهده می‌شود در این شبکه گذار فاز ناپیوسته است و دارای دو نقطه بحرانی است. یعنی دو حلقه پسماند در طول گذار فاز ایجاد می‌شود. در واقع ابتدا گره‌های قسمت میانی (شکل ۲- $b$ )، به دلیل عدم اختلاف فرکانسی با گره‌های نظیرشان، با خود همگام می‌شوند. سپس با افزایش قدرت جفت شدگی درون لایه‌ای، گره‌هایی که با گره‌های نظیرشان در لایه دوم اختلاف فرکانس دارند با هم همگام می‌شوند. در نهایت تمامی گره‌ها با هم هم‌فاز می‌شوند.

شکل ۵ تحول پارامتر نظم برحسب زمان را برای گره‌های سه قسمت مجزا در شکل ۲- $b$  نمایش می‌دهد. خطوط سبز، قرمز، آبی و مشکی به ترتیب همگامی گره‌های قسمت چپ، میانی، راست و کل گره‌های لایه  $a$  را نمایش می‌دهند. در این جا مقدار قدرت جفت شدگی در بازه حلقه پسماند دوم است ( $\sigma = 2/29$ ). همان‌طور که مشاهده می‌شود همگامی کلی لایه به صورت نوسانی است. این نوسان به

در این مقاله ما اختلاف فرکانسی را به دو صورت تصادفی و منظم ایجاد می‌کنیم. برای ایجاد اختلاف فرکانسی به صورت منظم ما از الگوریتم منظم افزایشده استفاده می‌کنیم. در این روش ابتدا فرکانس ذاتی لایه  $b$  را مشابه لایه  $a$  به ترتیب از کم به زیاد در نظر می‌گیریم. در مرحله اول، اولین و آخرین فرکانس ذاتی را در لایه  $b$  جابجا می‌کنیم ( $\omega_N^b \leftrightarrow \omega_1^b$ ). سپس مقدار جدید  $\Delta\omega$  را محاسبه می‌کنیم. در صورتی که  $\Delta\omega_{\text{new}} < \Delta\omega_{\text{desired}}$  این جابجایی پذیرفته است و به سراغ دو فرکانس ذاتی بعدی رفته و آنها را جابجا می‌کنیم و به همین ترتیب الگوریتم را ادامه می‌دهیم تا به میزان  $\Delta\omega$  مورد نظر برسیم (شکل ۲). در این مقاله، برای تمامی شبیه‌سازی‌ها  $\Delta\omega = 0.8$  در نظر گرفته شده است.



شکل ۲ سطر بالا نحوه چینش فرکانس‌های ذاتی برحسب شماره گره را برای روش تصادفی (a) و روش منظم (b) نشان می‌دهد. سطر پایین تابع توزیع اختلاف فرکانس ذاتی گره‌های نظیر لایه‌ها را برای روش تصادفی (c) و روش منظم (d) نمایش می‌دهد. در هر دو چینش  $\Delta\omega = 0.8$  است.

## نتایج

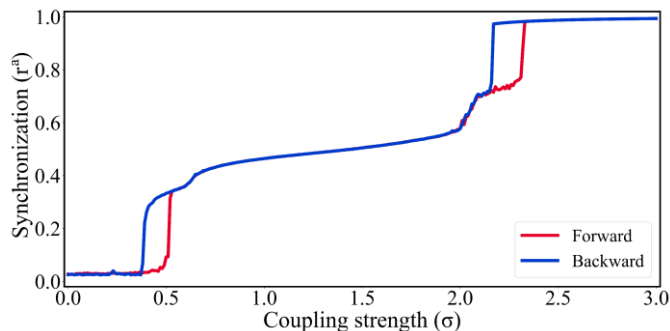
شکل ۳ گذار فاز همگامی را در شبکه دو لایه برای پارامترهای ناکامی  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  و  $\alpha = 0$  نشان می‌دهد. در اینجا فرکانس ذاتی نوسانگرها در لایه دوم (لایه  $b$ ) به صورت تصادفی در بازه  $0.5 \leq \omega_i^b \leq 0.5$  انتخاب شده است، به طوری که  $\Delta\omega = 0.8$  باشد (شکل ۲- $a$ ). همان‌طور که مشاهده می‌کنیم با افزایش قدرت جفت شدگی (مسیر رفت) و کاهش قدرت جفت شدگی (مسیر

## نتیجه گیری

در این مقاله تأثیر آرایش فرکانسی گره‌های نظیر در شبکه‌ی دو لایه را بر روی دینامیک شبکه در حضور پارامتر ناکامی بررسی کردیم. نظر گرفتیم. نتایج نشان می‌دهند که در صورتی که بین لایه‌ها پارامتر ناکامی برابر با  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  قرار بدهیم، گذار فاز نوع یک خواهد شد. میزان تطابق فرکانسی بین گره‌های نظیر نیز در در پهنای حلقه پسماند و نقطه گذار فاز تأثیر می‌گذارند. اما فقط مقدار تطابق فرکانسی مهم نیست بلکه نحوه ایجاد آن نیز مهم است. در واقع اگر این تطابق فرکانسی به صورت نامنظم ایجاد شود، دینامیک دارای یک نقطه گذار ناپیوسته است، در حالی که اگر این تطابق فرکانسی به صورت منظم ایجاد شود دینامیک دارای دو نقطه گذار ناپیوسته خواهد بود. دینامیک شبکه در محدوده حلقه پسماند نیز بسیار جالب است. مثلاً می‌بینیم که پارامتر نظم شبکه نوسانی است و دارای باندهای فرکانسی مختلفی است. در دهه گذشته، علاقه بسیاری به نقش نوسانات مغز در تحقیقات انسان و حیوان وجود داشته است. از آنجایی که این نوسانات همزمان در باندهای فرکانسی مختلف اتفاق می‌افتند، نقش عملکردی آن‌ها را نمی‌توان به صورت مجزا درک کرد و کشف نحوه برهمکنش آن‌ها ضروری است. امیدواریم این تحقیق بتواند به ما در فهم بهتر این موضوع کمک کند.

## مرجع‌ها

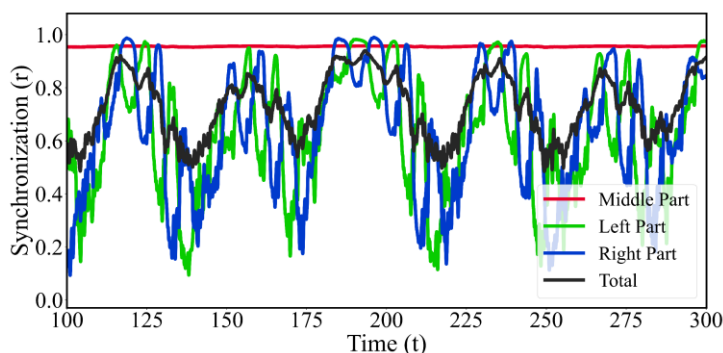
- [۱] Bianconi, Ginestra. Multilayer networks: structure and function. Oxford University Press, ۲۰۱۸.
- [۲] Bentley, Barry, Robyn Branicky, Christopher L. Barnes, et al. "The multilayer connectome of *Caenorhabditis elegans*." PLoS Computational Biology ۱۲, no. ۱۲ (۲۰۱۶): e۱۰۰۵۲۸۳.
- [۳] Strogatz, Steven. Sync: How Order Emerges from Chaos in the Universe, Nature, and Daily Life. United States: Hachette Books, ۲۰۰۳.
- [۴] Kumar, Anil, and Sarika Jalan. "Explosive synchronization in interlayer phase-shifted Kuramoto oscillators on multiplex networks." Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science ۳۱, no. ۴ (۲۰۲۱): ۰۴۱۱۰۳.
- [۵] Yaffe, Robert B., Philip Borger, Pierre Megevand, et al. "Physiology of functional and effective networks in epilepsy." Clinical Neurophysiology ۱۲۶, no. ۲ (۲۰۱۵): ۲۲۷-۲۳۶.
- [۶] Börgers, Christoph. An introduction to modeling neuronal dynamics. Vol. ۶۶. Berlin: Springer, ۲۰۱۷.



شکل ۴ پارامتر همگامی برحسب قدرت جفت‌شدگی برای همگامی لایه  $a$ . خطوط قرمز و آبی به ترتیب نشان‌دهنده مسیر رفت و برگشت هستند. در این جا  $\lambda = 10$  است و تفاوت فرکانسی به صورت تصادفی ایجاد شده و برابر با  $\Delta\omega = 0.8$  است.

دلیل نوسان در همگامی گره‌هایی است که با گره‌های نظیر خود در لایه دوم اختلاف فرکانس دارند.

در واقع گره‌های لایه میانی، که اختلاف فرکانسی با گره‌های نظیرشان در لایه دوم ندارند، به همگامی کامل می‌رسند. همچنین مشاهده می‌شود که در همگامی قسمت‌های جانبی (گره‌های سمت چپ و راست در شکل ۲) دو موج با فرکانس‌های مختلف روی هم سوار هستند. که این به دلیل تعامل دینامیکی بین گره‌های این نواحی با یکدیگر است. همجواری نوسانات با فرکانس‌های مختلف در جاهای مختلفی گزارش شده است. به عنوان مثال تحقیقات نشان داده‌اند که در بسیاری از نواحی مغز از جمله هیپوکمپ نوسانات با فرکانس بالای گاما روی نوسانات تتا که فرکانس کمتری دارند سوار می‌شوند و این نقش موثری در حافظه دارد [۶].



شکل ۵ تحول زمانی پارامتر نظم همگامی را برای سه دسته مجزا از گره‌ها نمایش می‌دهد. خطوط سبز، قرمز، آبی و مشکی به ترتیب بیان‌گر همگامی گره‌ها در قسمت‌های چپ، میانی، راست و کل شبکه در شکل ۲-  $b$  هستند.