کنترل بهمن با استفاده از روش‌های حفاظتی در شبکه‌های پیچیده

فضلی، داود؛ خانجانیان‌پاک، مژگان؛ عظیمی، ناهید

دانشکده فیزیک دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان، جاده گاوازنگ، زنجان

چکیده

گسترش خرابی، ورشکستگی مالی و یا اطلاعات نادرست به شکل آبشاری می‌توانند فاجعه‌بار و پرهزینه باشند. در این کار با تلفیق مدل انتشار آستانه‌ای و بازی تصمیم‌گیری مدلی را ارائه می‌دهیم که در آن راس‌های شبکه در مقابله با شکل‌گیری بهمن تصمیم می‌گیرند که به صورت حفاظت‌شده در بیایند. تاثیر استراتژی حفاظت‌شده را بر میزان انتشار و شکل‌گیری بهمن مطالعه می‌کنیم.

Control of avalanches using protection methods in complex networks

Fazli, Davood; Khanjanianpak, Mozhgan; Azimi, Nahid

Department of Physics, Institute for advanced studies in basic sciences, Zanjan, Iran

Abstract

Cascading failures, bankruptcy, or misinformation can be catastrophic and costly. In this work, by combining the threshold diffusion model and the decision-making game, we present a model in which the network vertices decide to become protected against the formation of an avalanche. We study the impact of the protected strategy on the amount of avalanche propagation and formation.

1- مقدمه

مدل‌های رفتار جمعی در شبکه‌های اجتماعی، مالی و بهداشت و درمان بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. در برخی از مدل‌ها، انتشار یک نظر یا شایعه، یک تغییر حالت، بیماری همه‌گیر، یا یک ورشکستگی اقتصادی می‌تواند به شکل یک بهمن رخ دهد به طوری که کل شبکه را در بر بگیرد. به عنوان مثال، می‌توان به وقوع بهمن در خرابی اضافه‌بار در شبکه توزیع انرژی یا ریزش برف از کوه‌ها اشاره کرد. یکی از مدل‌هایی که دینامیک انتشار به صورت آبشاری را نشان می‌دهد مدل آستانه‌ای[1] است. در این مدل کسر معینی از همسایه‌های یک راس مورد نیاز است تا آن راس رفتار خود را مطابق رفتار همسایگانش تغییر دهد [1-4]. این مدل عمدتاً برای مطالعه گسترش رفتارهای اجتماعی در شبکه‌های پیچیده مورد بحث قرار گرفته است. همچنین با استفاده از مدل آستانه‌ای، برخی تحقیقات در مورد شیوع رفتارهای مالی در شبکه‌های پیچیده انجام شده است [5-8]. برخی آثار دیگر نیز از این منظر به موضوع ورشکستگی‌های مالی پرداخته‌اند [9]. برای درک بهتر تحول تصمیمات در مواجهه با یک ریسک خاص که عامل ایجاد بهمن است، می‌توان از دیدگاه نظریه بازی کمک گرفت، به طوری که افراد برای جلوگیری از پیوستن به بهمن تصمیم می‌گیرند با پرداخت هزینه خود را ایمن کنند [10]. در این مقاله کنترل اندازه بهمن را با استفاده از مدل آستانه‌ای و با در نظر گرفتن واکنش افراد به یک ریسک بر اساس برآورد هزینه–فایده بررسی می‌کنیم.

2- تعریف مدل

مدل پیشنهادی مجموعه‌ای از N راس را توصیف می‌کند که یک شبکه بدون جهت و بدون وزن را تشکیل می‌دهند. در مدل آستانه‌ای واتس[2] [11]، هر راس در هر زمان t ممکن است در یکی از دو حالت فعال (A) یا غیرفعال (I) باشد (شکل(1(a)). یک راس می‌تواند از حالت اولیه غیرفعال به حالت فعال تغییر کند به شرطی که کسر همسایگان فعالش از حد آستانه m بیشتر باشد. حالت راس i را در زمان t با $s_i(t)\in\{0,1\}$ نشان می‌دهیم. به طوری که:

[1] Threshold model

[2] Watts

$$s_{i(t)}=\begin{cases}1 & \text{if i is A}\\ 0 & \text{if i is I}\end{cases} \qquad (1)$$

همچنین یک راس فعال می‌تواند با احتمال ثابت β دوباره به حالت غیر فعال تبدیل شود. از طرف دیگر هر راس بر اساس یک بازی تصمیم‌گیری انتخاب می‌کند که آیا یک اقدام پیشگیرانه برای محافظت (P)[3] اتخاذ کند یا حالت محافظت‌نشده (NP)[4] را داشته باشد. استراتژی راس i را در زمان t به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$d_i(t)=\begin{cases}1 & \text{if i is P}\\ 0 & \text{if i is NP}\end{cases} \qquad (2)$$

علاوه بر آن، حد آستانه هر راس، $m_i(t)$ در صورت انتخاب استراتژی محافظت شده با ضریب σ افزایش می‌یابد به طوری که $\sigma \geq 1$ و ماکزیمم مقدار آن $\sigma_{max}=\frac{1}{m}$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$m_i(t)=\begin{cases}\sigma m & \text{if i is P}\\ m & \text{if i is NP}\end{cases} \qquad (3)$$

در اینجا $\sigma=1$ نشان می‌دهد که حفاظت کاملاً بی‌اثر است. همچنین فرض می‌کنیم که راس‌های فعال-محافظت‌شده کمتر بر همسایگان خود تأثیر می‌گذارند. برای این منظور، $\gamma \in (0,1)$ را به عنوان یک عامل کاهنده در اثر یک همسایه فعال-محافظت‌شده به کار می‌گیریم. در اینجا فرض می‌کنیم $\gamma=0.5$ است، به طوری که تاثیر یک همسایه فعال-محافظت‌شده نصف اثر همسایه‌های فعال-محافظت‌نشده است. بنابراین، احتمال فعال شدن راس i با درجه k_i در زمان t به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Gamma^{i}_{I\to A}(t)=H\left(\frac{\sum_{j=1}^{N} A_{ji}s_j(t)\left(1-\gamma d_j(t)\right)}{k_i}-m_i(t)\right) \qquad (4)$$

که در آن A_{ji} عناصر ماتریس مجاورت هستند و $H(x)$ تابع هویساید است که در آن $H(x)=1$ اگر $x=0$ و در غیر این صورت $H(x)=0$ است. شکل 1(b) شماتیکی از مدل آستانه‌ای اصلاح شده برای فعال سازی را نشان می‌دهد.

در دینامیک مدل تصمیم‌گیری که با مدل آستانه‌ای جفت شده است، راس‌ها با احتمالات $\Gamma_{P\to NP}$ و $\Gamma_{NP\to P}$ انتخاب می‌کنند که در زمان t استراتژی P یا NP داشته باشند(شکل 1(c)). برای این منظور در هر مرحله زمانی، وضعیت حفاظت‌شدگی راس i با یک همسایه j که به طور تصادفی انتخاب شده است مقایسه می‌شود. اگر هر دو P یا NP باشند، هیچ اتفاقی نمی‌افتد. در غیر این صورت، راس i استراتژی همسایه خود را با احتمال $\Gamma_{P\to NP}$ $(\Gamma_{NP\to P})$ می‌پذیرد اگر در ابتدا محافظت‌شده (محافظت‌نشده) باشد. این احتمالات از قانون فرمی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Gamma_{P\to NP}(t)=\frac{1}{1+e^{\Pi_P(t)-\Pi_{NP}(t)}} \qquad (5)$$

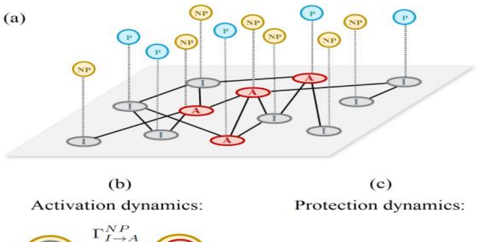
$$\Gamma_{NP\to P}(t)=\frac{1}{1+e^{\Pi_{NP}(t)-\Pi_P(t)}} \qquad (6)$$

که در آن Π_P و Π_{NP} به ترتیب سود حاصل از انتخاب استراتژی P و NP هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Pi_P(t)= -C- \alpha\rho_{A,P}(t), \qquad (7)$$

$$\Pi_{NP}(t)= -\alpha\rho_{A,NP}(t). \qquad (8)$$

با توجه به معادلات (7) و (8)، راس‌ها استراتژی خود را بر اساس این موارد انجام می‌دهند: (الف) هزینه ذاتی که افراد باید برای حفاظت شدن (C)، در نظر بگیرند، (ب) عواقب فعال شدن که نشان می‌دهد چقدر فعال شدن می‌تواند هزینه داشته باشد (α) و (ج) کسری از افراد فعال که استراتژی محافظت‌شده ($\rho_{A,P}$) یا محافظت‌نشده ($\rho_{A,NP}$) را اتخاذ کرده اند.



شکل 1. شماتیک مدل با احتمالات تغییر حالت‌ها در دینامیک جفت‌شده. (a) شبکه ارتباطات که در آن راس‌های خاکستری و قرمز به ترتیب حالت غیرفعال (I) و فعال (A) را نشان می‌دهند. هر راس ممکن است محافظت شده (P) یا محافظت نشده (NP) باشد که با دایره‌های آبی و کرم نشان داده شده‌اند. (b) یک راس غیرفعال-محافظت‌شده یا غیرفعال-محافظت‌نشده بر اساس مدل آستانه‌ای به ترتیب با احتمالات $\Gamma^{P}_{I\to A}$ و $\Gamma^{NP}_{I\to A}$ فعال می‌شوند. فعال‌ها با احتمال ثابت β به حالت غیرفعال برمی‌گردند. (c) راس‌ها استراتژی محافظت‌شده یا محافظت‌نشده را بر اساس بازی تصمیم‌گیری با احتمالات $\Gamma_{P\to NP}$ و $\Gamma_{NP\to P}$ انتخاب می‌کنند.

---

[3] Protected
[4] Not-Protected

نتایج

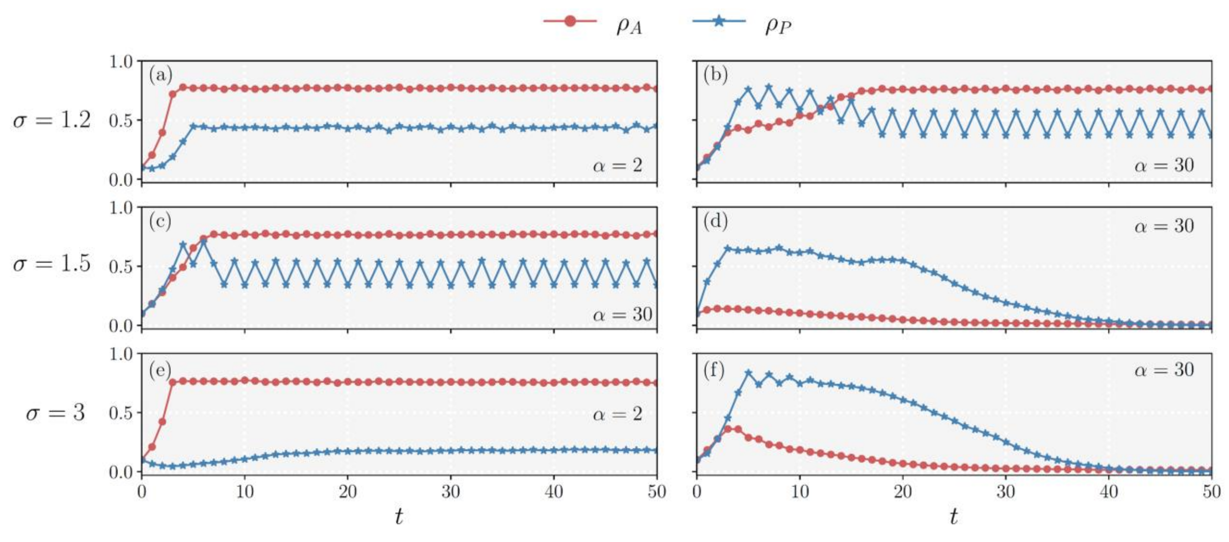
شبکه‌ای متشکل از $N=3000$ راس و با میانگین درجه $\langle k\rangle=10$ در نظر می‌گیریم. شرایط اولیه را به صورت $\rho_{A0}=0.1$ و $\rho_{P0}=0.1$ انتخاب کرده و برای سادگی در همه شبیه‌سازی‌ها $m=0.2$ و $C=1$ تنظیم می‌کنیم.

الف- تاثیر σ و α

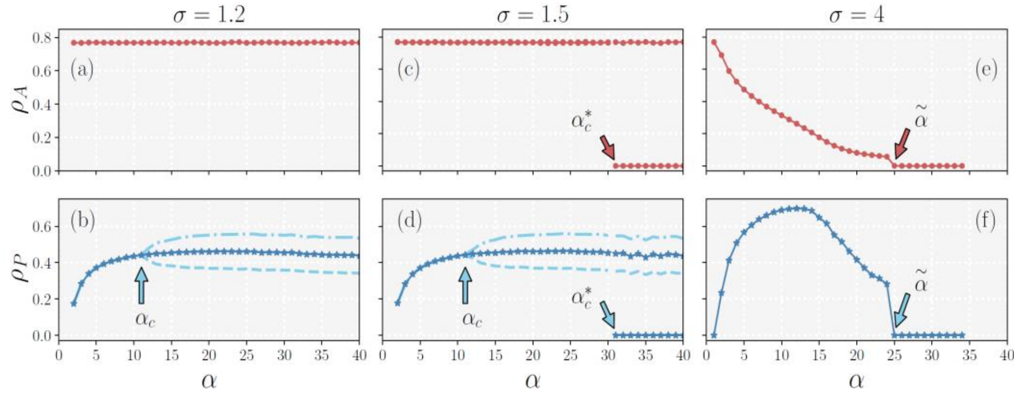
برای نشان دادن جزئیات در مورد چگونگی رسیدن به حالت پایا، ابتدا تحول زمانی اندازه بهمن ρ_A و کسر راس‌های محافظت‌شده ρ_P را در شکل 2 نشان می‌دهیم. همانطور که مشاهده می‌شود زمانی که ضریب هزینه مربوط به فعال شدن (α) کوچک باشد، اقدامات پیشگیرانه بی‌فایده است به طوری که یک بهمن بزرگ رخ می‌دهد (شکل(2(a). به ازای مقادیر کم σ و مقادیر بزرگ α چگالی راس‌های محافظت‌شده به صورت دوره‌ای نوسان می‌کنند (شکل(2(b). چنانچه هر دو مقدار σ و α بزرگ باشند، اندازه بهمن‌ها و در نتیجه کسر حفاظت‌شده‌ها به سمت صفر میل می‌کند و سیستم وارد فاز جاذب می‌شود (شکل (2(f).
به هر حال، جالب‌ترین رفتار برای مقادیر میانی پارامترها رخ می-دهد. در این حالت، ورود سیستم به هریک از دو فاز فعال یا جاذب با احتمال یکسان امکان پذیر هست، به طوری که ناحیه دو پایداری ظاهر می‌شوند (شکل (c,d) 2). با توجه به وابستگی رفتارهای مختلف اندازه بهمن و کسر محافظت شده‌ها به مقادیر α و σ، در ادامه با جزئیات بیشتر به بررسی تأثیر این پارامترها می-پردازیم. شکل 3 نمودار تغییرات رفتار ρ_A و ρ_P را به صورت تابعی از α برای سه مقدار مختلف σ نشان می‌دهد. همچنین نمودار کامل فاز را برای ρ_A و ρ_P در فضای α-σ در شکل 4 نشان می‌دهیم، در حالی که سایر پارامترها را ثابت نگه می‌داریم. در این شکل ناحیه دو پایدار در قسمت شطرنجی شکل قابل تشخیص است.

ب- اثر σ و β

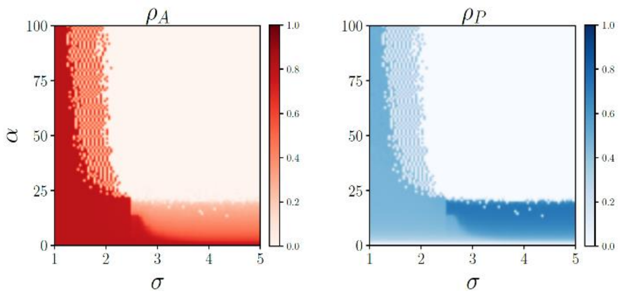
در این بخش به بررسی تاثیر همزمان دو پارامتر β و σ بر روی دینامیک می‌پردازیم. نمودار فاز برای چگالی راس‌های فعال و محافظت‌شده در صفحه پارامترهای (σ, β) در شکل 5 نشان داده شده است. واضح است که با افزایش β اندازه بهمن‌ها نیز کاهش می‌یابد. با توجه به دینامیک بازی، افزایش ضریب حد آستانه، σ، منجر به افزایش اثربخشی حفاظت می‌شود. در نتیجه، تمایل به پرداخت هزینه برای محافظت افزایش می‌یابد. بنابراین با افزایش σ، انتظار کاهش چگالی راس‌های فعال (اندازه بهمن) را داریم. همچنین افزایش β منجر به کاهش چگالی راس‌های فعال می‌شود.



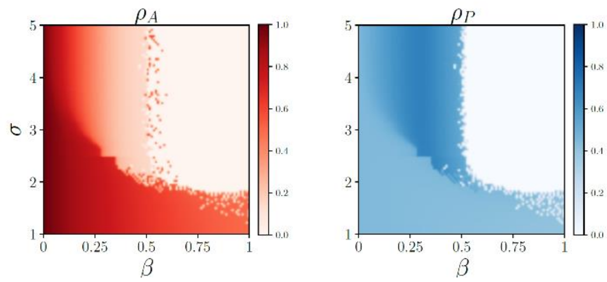
شکل 2. اندازه بهمن، ρ_A، (نقاط قرمز) و کسر راس‌های محافظت شده، ρ_P، (ستاره‌های آبی) بر حسب زمان t به ازای دو مقدار $\alpha=2$ و $\alpha=30$. ضریب حد آستانه راس‌های محافظت شده، σ، از بالا به پایین افزایش می یابد. نتایج برای شبکه تصادفی با $N=3000$، $\langle k\rangle=10$، $m=0.2$ و $\beta = 0.3$ به دست آمده است.



شکل 3. مقادیر پایای اندازه بهمن (نقاط قرمز) و کسر راس‌های محافظت‌شده (ستاره‌های آبی) بر حسب α . مقدار σ از چپ به راست افزایش مـی‌یابـد. α_c ، α_c^* و $\tilde{\alpha}$ به ترتیب نقطه دوشاخگی، فاز دو-پایداری و فاز جاذب را نشان می‌دهند. پارامترها به صورت مشابه با شکل 2 تنظیم شده اند.



شکل 4. نمودار فاز برای اندازه بهمن‌ها (چپ) و کسر راس‌های محافظت-شده (راست) در فضای α-σ. پارامترها به صورت مشابه با شکل 2 تنظیم شده‌اند. ناحیه شطرنجی فاز دوپایداری را متمایز می‌کند.



شکل 5. نمودار فاز برای اندازه بهمن (چپ) و کسر راس‌هـای محافظـت-شده (راست) در فضای β-σ. پارامترها مشابه با شکل 2 تنظیم شده اند.

برای $\sigma < 2$ با افزایش β، چگالی راس‌های فعال حتی برای β=1 به صفر نمی‌رسد اما به صورت پیوسته به ρ_A=0.5 میل می‌کند. برای $\sigma > 2$ با افزایش β، چگالی فعال‌ها به صورت پیوسته به صفر می‌رسد به طوری که در حد $\beta > 0.5$، هیچ راس فعالی (محافظت شده) وجود ندارد. از سوی دیگر، برای β به اندازه کافی کوچک ($\beta \sim 0$)، سیستم در حالت کاملاً فعال بوده و بهمن کل شبکه را در بر می‌گیرد.

نتیجه گیری

در این کار ما با استفاده از شبیه‌سازی عددی به بررسی دینامیک تکاملی همزمان مدل آستانه‌ای و بازی تصمیم‌گیری و تاثیر متقابل این دو فرایند بر روی یکدیگر پرداختیم. نشان دادیم عواملی مانند پایین بودن هزینه حفاظت، C و قدرت حفاظت بالا، σ، منجر به تمایل بیشتر به اتخاذ استراتژی حفاظت‌شده و افزایش ρ_P می‌شود که باعث محدودیت در اندازه بهمن‌ها می‌شود. از طرفی توانایی نجات و غیرفعال شدن خود به خودی، β، نیز به نوبه خود در نیز به نوبه خود باعث محدودیت در اندازه بهمن‌ها می‌شود. افزایش α بسته به اندازه پارامتر σ ، می‌تواند موجب توقف بهمن و یا ایجاد ناحیه دو پایداری شود. همچنین در α های بزرگ، ρ_P بین دو مقدار حدی نوسانات پایدار انجام می‌دهد ولی تاثیر نوسانات در رفتار ρ_A بسیار اندک است.

مرجع‌ها

[1] M. Karsai, G. Iñiguez, R. Kikas, K. Kaski, and J. Kertész, Scientific reports 6, 1 (2016).
[2] J. P. Gleeson and D. J. Cahalane, Physical Review E 75, 056103 (2007).
[3] Z. Ruan, G. Iniguez, M. Karsai, and J. Kertész, Physical review letters 115, 218702 (2015).
[4] Q. Guo, X. Jiang, Y. Lei, M. Li, Y. Ma, and Z. Zheng, Physical Review E 91, 012822 (2015).
[5] C. D. Brummitt and T. Kobayashi, Physical Review E 91, 062813 (2015).
[6] E. Nier, J. Yang, T. Yorulmazer, and A. Alentorn, Network models and financial stability, J. Econ. Dynam. Control 31, 2033 (2007).
[7] T. Kobayashi, Economics Letters 124, 113 (2014).
[8] P. Gai, A. Haldane, and S. Kapadia, Journal of Monetary Economics 58, 453 (2011).
[9] C. Upper, Journal of financial stability 7, 111 (2011).
[10] M. Khanjanianpak, N. Azimi-Tafreshi, A. Arenas, and J. Gómez-Gardeñes, Philosophical Transactions of the Royal Society A 380, 20200412 (2022).
[11] D. J. Watts, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **99**, 5766 (2002).