

اثر تأخیر زمانی برای دو نوسانگر جفت شده در مدل کوراموتوی مرتبه دوم

مهدوی، اسماعیل^۱؛ شهبازی، فرهاد^۲؛ زارعی، مینا^۱

^۱دانشکده فیزیک دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایه، زنجان

^۲دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان

چکیده

پویایی بسیاری از نوسانگرهای زیستی و شبکه‌های نورونی به دلیل محدودیت در سرعت انتقال اطلاعات وابسته به تأخیر زمانی است. در این مقاله ما به صورت تحلیلی به بررسی اثر تأخیر زمانی برای دو نوسانگر جفت شده برای مدل کوراموتوی مرتبه دوم پرداخته‌ایم. نتایج نشان می‌دهند که در مدل کوراموتوی مرتبه دوم، با افزایش میزان لختی تعداد جواب‌های پایدار قفل فاز نسبت به مدل کوراموتوی مرتبه اول به شدت کاهش می‌یابد. همچنین بر خلاف مدل کوراموتوی مرتبه اول، در بعضی از تأخیرهای زمانی، جواب‌های غیر قفل فاز نیز مشاهده می‌شود. با افزایش میزان لختی، در ناحیه‌هایی از تأخیر زمانی جواب‌های قفل فاز به هیچ عنوان دیده نمی‌شود. در این مدل جواب‌های چندپایداری، بر خلاف زمانی که تأخیر زمانی نداشته باشیم، مشاهده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: پویایی، تأخیر زمانی، لختی، قفل فاز، چندپایداری

Time-delay effect for two coupled oscillators in the second-order Kuramoto model

Mahdavi, Esmail¹; Shahbazi, Farhad²; Zarei, Mina¹

¹ Department of Physics, Institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan

² Department of Physics, Isfahan University of Technology, Isfahan

Abstract

The dynamics of many biological oscillators and neural networks are dependent on time-delay due to the limitation in the speed of information transmission. In this paper, we have analyzed the effect of time-delay for two coupled oscillators for the second-order Kuramoto model. The results show that, in the second-order Kuramoto model, by increasing the inertia, the number of stable phase-locking solutions decreases drastically compared to the first-order Kuramoto model. Also, unlike the first-order Kuramoto model, in some time-delays, non-phase-locked solutions are observed. By increasing the amount of inertia, phase-locked solutions are not seen at all in some areas of time-delay. Unlike when there is no time-delay, in this model multi-stability is also observed.

Keywords: dynamics, time-delay, inertia, phase-locking, multi-stability

مقدمه

شده است. به عنوان مثال این پدیده در لیزر، فعالیت نورون‌های مغز، رفتار جمعی کرم‌های شب‌تاب و سلول‌های ضربان‌ساز قلب دیده می‌شود [۱].

مطالعه‌ی دینامیک همگامی به دلیل اهمیت این پدیده در طبیعت مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است. مدل کوراموتو نیز به عنوان یکی از ساده‌ترین مدل‌ها برای بررسی پدیده‌ی همگامی

تأثیر متقابل اجزای یک سیستم دینامیکی بر روی یکدیگر می‌تواند به رخ دادن هم‌زمان دو یا چند رویداد منجر شود که به آن پدیده‌ی همگامی گفته می‌شود. همگامی همه‌ی اجزای سیستم با یکدیگر یک سیستم واحد را می‌سازد. پدیده‌ی همگامی در بسیاری از شاخه‌های علم مانند اکولوژی، بیولوژی و علوم اجتماعی مشاهده

$$m\ddot{\theta}_2(t) + \alpha\dot{\theta}_2(t) = \omega_2 - K \sin(\theta_2(t) - \theta_1(t - \tau)) \quad (2)$$

که θ_i فاز نوسانگرها، ω_i فرکانس ذاتی نوسانگرها، K قدرت جفت‌شدگی، α ضریب میرایی و m ضریب لختی است. می‌توان طرفین دو معادله‌ی (۱) و (۲) را در معکوس یکی از ضریب‌های مشترک دو معادله ضرب کرد و آن را از بین برد. این کار مشابه گذاشتن یکی از ضرایب برابر با ۱ است. در نتیجه ما در ادامه ضریب میرایی را برابر با ۱ در نظر گرفته‌ایم.

برای پیدا کردن جواب‌های قفل فاز زمانی که دو نوسانگر به حالت ایستا می‌رسند، فرض می‌کنیم اختلاف فاز ثابت β بین دو نوسانگر وجود داشته باشد. بنابراین در حالت ایستا فاز نوسانگرها به صورت زیر خواهد بود [۷]:

$$\theta_{1,2}(t) = \varphi(t) \pm \frac{\beta}{2}. \quad (3)$$

با قرار دادن معادله‌ی (۳) در معادلات (۱) و (۲) و انتخاب $\alpha = 1$ به شرط زیر خواهیم رسید،

$$\cos(\varphi(t) - \varphi(t - \tau)) = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2K \sin \beta} = \text{const}. \quad (4)$$

در نتیجه برای برقراری شرط بالا، مجبور به انتخاب $\varphi(t) = \Omega t$ هستیم که Ω فرکانس نهایی نوسانگرها در حالت قفل فاز است. با مشخص شدن فاز نوسانگرها و قرار دادن آن‌ها در معادلات (۱) و (۲) به دو معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\Delta\omega = 2K \sin \beta \cos(\Omega\tau), \quad (5)$$

$$\Omega = \bar{\omega} - K \sin(\Omega\tau) \cos \beta \quad (6)$$

که $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ و $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ است. با پیدا کردن Ω و β جواب‌های قفل فاز به دست می‌آیند. با استفاده از دو معادله جدید و حذف کردن β از این دو رابطه، دو تابع به دست می‌آید که ریشه‌های این توابع برحسب Ω جواب‌های قفل فاز هستند،

$$f_-(\Omega) = \bar{\omega} - \Omega - K \tan(\Omega\tau) \sqrt{\cos^2(\Omega\tau) - \left(\frac{\Delta\omega}{2K}\right)^2}, \quad (7)$$

$$f_+(\Omega) = \bar{\omega} - \Omega + K \tan(\Omega\tau) \sqrt{\cos^2(\Omega\tau) - \left(\frac{\Delta\omega}{2K}\right)^2}. \quad (8)$$

اختلاف فاز بین نوسانگرها نیز با استفاده از معادله (۵) به صورت زیر تعریف می‌شود،

در شبکه‌های پیچیده معرفی شده است که این مدل بیان کننده‌ی تحول فازی نوسانگرهای جفت‌شده در یک سیستم است [۲].

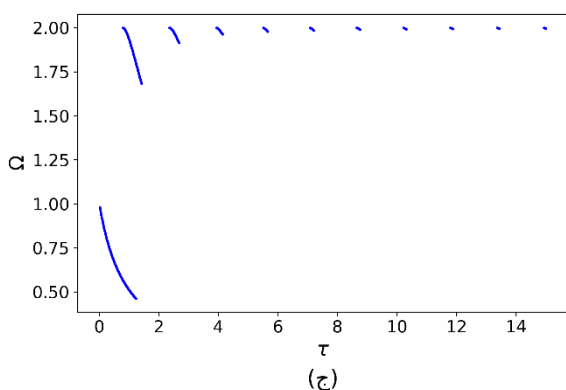
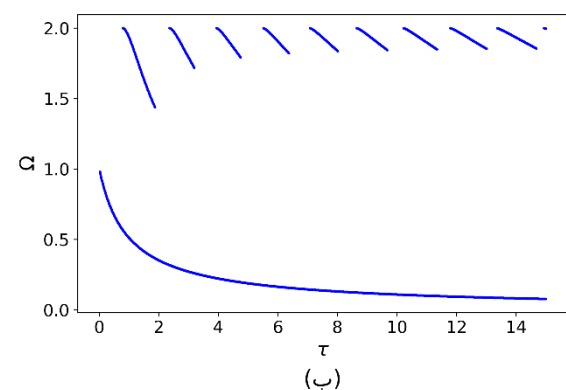
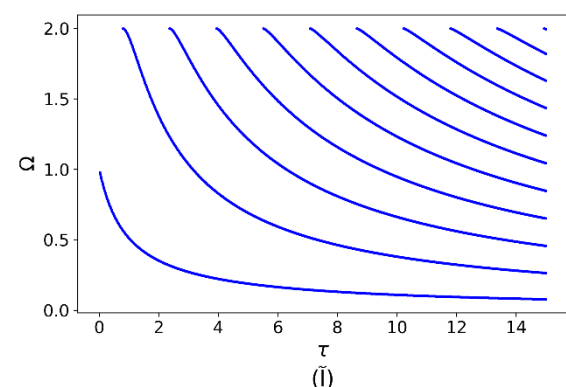
به دلیل وجود بعضی نقص‌ها در مدل کوراموتوی مرتبه اول، همانند سرعت بالای رسیدن به همگامی جزئی نسبت به مشاهدات تجربی، دانشمندان مدل کوراموتوی مرتبه دوم را پیشنهاد دادند که اولین بار در زمینه‌های بیولوژیکی مورد مطالعه قرار گرفته است [۳]. در این مدل اینرسی یا لختی به مدل کوراموتوی مرتبه اول اضافه می‌شود که باعث تکامل هر دوی فاز و فرکانس در زمان می‌شود. در واقع با اضافه شدن لختی، سرعت همگامی کند می‌شود.

تأخیر زمانی به صورت طبیعی در برهمکنش بین نوسانگرها به دلیل محدودیت در سرعت انتقال اطلاعات وجود دارد که می‌تواند بر روی همگامی تأثیر بگذارد [۴]. علاوه بر تأخیر زمانی عوامل متفاوت دیگری همانند تابع توزیع فرکانس، ساختار شبکه [۵]، نوفه تصادفی و پارامتر ناکامی، در دینامیک شبکه تأثیر گذار هستند. تأخیر زمانی در شبکه‌های عصبی، لیزر و بسیاری از پدیده‌های طبیعی وجود دارد. بنابراین مطالعه اثر این مولفه بر روی همگامی مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است. ما نیز در این مقاله به صورت تحلیلی برای دو نوسانگر جفت‌شده، اثر تأخیر زمانی در مدل کوراموتوی مرتبه دوم را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که با اضافه شدن تأخیر زمانی جواب‌های چندپایداری قفل فاز پدیدار می‌شوند. اما زمانی که تأخیر زمانی وجود نداشته باشد، تنها یک جواب قفل فاز وجود دارد. همچنین نشان می‌دهیم که با افزایش ضریب لختی، تعداد جواب‌های پایدار قفل فاز شده کاهش می‌یابد. در ادامه ما ابتدا مدل کوراموتوی مرتبه دوم را معرفی می‌کنیم و سپس جواب‌های قفل فاز را برای دو نوسانگر جفت‌شده، در حضور تأخیر زمانی، به صورت تحلیلی به دست می‌آوریم. در ادامه با بررسی نمای لیاپانوف، پایداری جواب‌ها را بررسی می‌کنیم. در قسمت پایانی نیز نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

روش

برای دو نوسانگر جفت‌شده، مدل کوراموتوی مرتبه دوم همراه با تأخیر زمانی به صورت زیر بیان می‌شود [۶]:

$$m\ddot{\theta}_1(t) + \alpha\dot{\theta}_1(t) = \omega_1 - K \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t - \tau)), \quad (9)$$



شکل ۱: نمودار جواب‌های پایدار Ω برحسب τ برای دو نوسانگر جفت‌شده با فرکانس‌های ذاتی $\omega_1 = \omega_2 = 1$ و قدرت جفت‌شدگی $K = 1$ در (آ) مدل کوراموتوی مرتبه اول ($m = 0$)، (ب) مدل کوراموتوی مرتبه دوم با ضریب لختی $m = 1$ و (ج) مدل کوراموتوی مرتبه دوم با ضریب لختی $m = 10$.

شکل ۱۱ نمودار جواب‌های پایدار Ω برحسب τ را نشان می‌دهد. در این حالت تمام جواب‌های معادله‌ی (۷) پایدار شده‌اند. با توجه به نمودار به‌دست آمده در شکل ۱۱ در ابتدا تنها یک جواب پایدار برای قفل فاز شدن نوسانگرها وجود دارد. اما با افزایش مقدار تأخیر زمانی برای $\tau \geq 0.79$ تعداد جواب‌های پایدار بیش از یک مقدار

$$\beta_{f_-(\Omega)} = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\Delta\omega}{2K}\right) & \text{if } \cos(\Omega\tau) > 0 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{\Delta\omega}{2K}\right) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

$$\beta_{f_+(\Omega)} = \begin{cases} \pi - \arcsin\left(\frac{\Delta\omega}{2K}\right) & \text{if } \cos(\Omega\tau) > 0 \\ \arcsin\left(\frac{\Delta\omega}{2K}\right) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

سپس برای بررسی پایداری جواب‌ها از نمای لیاپانوف استفاده می‌کنیم. در ابتدا به هر کدام از فازهای نوسانگرها یک اختلال کوچک متناسب با $e^{\lambda t}$ وارد می‌کنیم. به عبارتی فازهای جدید به $\theta_2(t) = \Omega t - \frac{\beta}{2} + be^{\lambda t}$ و $\theta_1(t) = \Omega t + \frac{\beta}{2} + ae^{\lambda t}$ تغییر پیدا می‌کنند. با استفاده از خطی‌سازی و جایگذاری فازهای جدید در معادلات (۱) و (۲)، دترمینان ضرایب (a و b) باید برابر با صفر شود که مقدار λ به‌دست می‌آید [۸].

$$\det \begin{pmatrix} m\lambda^2 + \lambda + K \cos(\Omega\tau + \beta) & -Ke^{-\lambda\tau} \cos(\Omega\tau + \beta) \\ -Ke^{-\lambda\tau} \cos(\Omega\tau - \beta) & m\lambda^2 + \lambda + K \cos(\Omega\tau - \beta) \end{pmatrix} = 0 \quad (11)$$

اگر λ عددی منفی باشد، جواب به‌دست آمده پایدار و در غیر این صورت ناپایدار است.

با توجه به معادلات (۷) تا (۱۱) می‌توان نتیجه گرفت که جواب‌های قفل فاز برای مدل کوراموتوی مرتبه اول ($m = 0$) و مدل کوراموتوی مرتبه دوم ($m \neq 0$) با یکدیگر کاملاً برابر هستند و میزان لختی m تنها در پایداری جواب‌ها تأثیرگذار است.

نتایج

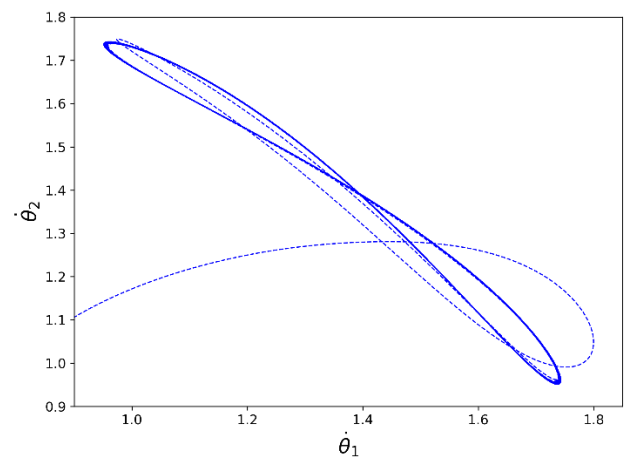
برای به‌دست آوردن جواب‌های معادلات (۷) و (۸) ما فرکانس‌های ذاتی نوسانگرها را به صورت $\omega_1 = \omega_2 = 1$ و مقدار قدرت جفت‌شدگی را $K = 1$ در نظر گرفتیم. زمانی که مقدار قدرت جفت‌شدگی عددی مثبت باشد ($K > 0$)، همهی جواب‌های $f_+(\Omega)$ با توجه به رابطه‌ی (۱۱) برای همهی مقادیر $m \geq 0$ ناپایدار می‌شوند. بنابراین در ادامه فقط جواب‌های $f_-(\Omega)$ بررسی شده‌اند.

در ابتدا ما پایداری جواب‌های معادله‌ی (۷) را برای مدل کوراموتوی مرتبه اول ($m = 0$) با استفاده از معادله‌ی (۱۱) بررسی کردیم.

می‌شوند. در صورتی که اگر تأخیر زمانی نداشته باشیم ($\tau = 0$)، با توجه به معادله‌ی (۷) تنها یک جواب $\Omega = \bar{\omega}$ وجود دارد.

در ادامه بررسی‌های خود را برای مدل کوراموتوی مرتبه دوم انجام دادیم. در این حالت نیز جواب‌ها دقیقاً همان جواب‌های شکل ۱۱ است، با این تفاوت که پایداری آن‌ها با توجه به ضریب لختی تغییر می‌کند. شکل‌های ۱ب و ۱ج نمودار جواب‌های پایدار Ω برحسب τ را به ترتیب برای $m = 1$ و $m = 10$ نشان می‌دهند.

با توجه به نمودارهای موجود در شکل‌های ۱ب و ۱ج با اضافه شدن لختی به مدل کوراموتو، تعداد جواب‌های پایدار قفل فاز به شدت کاهش پیدا می‌کند و هرچه ضریب لختی بزرگتر باشد، جواب‌های پایدار کم‌تر می‌شوند. همچنین بر خلاف مدل کوراموتوی مرتبه اول، در بعضی از نواحی برای $m = 10$ ، به هیچ عنوان جواب پایدار قفل فازی وجود ندارد، اما همچنان در ناحیه کوچکی تعداد جواب‌های پایدار بیش از یک مقدار می‌شوند. این ناحیه نسبت به مدل کوراموتوی مرتبه اول بسیار کوچکتر است.



شکل ۲: نمودار فضای فاز فرکانس دو نوسانگر جفت‌شده با فرکانس‌های ذاتی $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ، قدرت جفت‌شدگی $K = 1$ و تأخیر زمانی $\tau = 2$ در مدل کوراموتوی مرتبه دوم با ضریب لختی $m = 1$.

در مدل کوراموتوی مرتبه دوم با افزایش میزان تأخیر زمانی علاوه بر داشتن جواب قفل فاز پایدار، جواب‌های نوسانی هم دیده می‌شوند که به قفل فاز نمی‌رسند. به عنوان مثال در شکل ۲ فضای فاز فرکانس دو نوسانگر را برای $m = 1$ و $\tau = 2$ نشان می‌دهد. در صورتی که با توجه به شکل ۱ب در این ناحیه جواب قفل فاز هم قابل مشاهده است.

نتیجه‌گیری

تأخیر زمانی به علت وجود محدودیت در انتقال اطلاعات در اکثر پدیده‌های طبیعی وجود دارد. بنابراین مطالعه‌ی اثر این پدیده بر روی پویایی شبکه‌ها برای دانشمندان بسیار مورد توجه قرار گرفته است. ما در این مقاله به بررسی اثر تأخیر زمانی در مدل کوراموتوی مرتبه دوم برای دو نوسانگر جفت‌شده پرداخته‌ایم. با توجه به معادلات به‌دست آمده و شکل ۱ با اضافه شدن لختی به مدل کوراموتوی مرتبه اول، تعداد جواب‌های پایدار قفل فاز به شدت کاهش پیدا می‌کنند. همچنین بر خلاف مدل کوراموتوی مرتبه اول در بسیاری از نواحی جواب‌های غیر قفل فاز نیز مشاهده می‌شوند. همچنین در هر دو مدل کوراموتوی مرتبه اول و دوم، همچنان ناحیه‌هایی وجود دارند که تعداد جواب‌های پایدار بیش از یک مقدار است. با توجه به معادلات (۷) تا (۱۱) با قرینه کردن قدرت جفت‌شدگی دقیقاً همان جواب‌های قبلی برای فرکانس‌هایی با پایداری یکسان به‌دست می‌آید. اما اختلاف فاز بین نوسانگرها π رادیان تغییر می‌کند. این بدان معنی است که با قدرت جفت‌شدگی منفی در صورت وجود تأخیر زمانی، می‌توانیم جواب‌های همگام نیز مشاهده کنیم.

مرجع‌ها

- [۱] A. Pikovsky, M. Rosenblum and J. Kurths; "Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences"; Cambridge University Press 12 (2003).
- [۲] Y. Kuramoto; "International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics"; Springer (1975) 420-422.
- [۳] B. Ermentrout; "An adaptive model for synchrony in the firefly pteroptyx malacca"; *J. Math. Biol.* 29, No. 6 (1991) 571-585.
- [۴] M. K. S. Yeung and S. H. Strogatz; "Time Delay in the Kuramoto Model of Coupled Oscillators"; *Phys. Rev. Lett.* 82, No. 3 (1999) 684.
- [۵] Louis M. Pecora and Thomas L. Carroll; "Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems"; *Phys. Rev. Lett.* 80, No. 10 (1998) 2109.
- [۶] H. A. Tanaka, A. J. Lichtenberg and S. Oishi; "Self-synchronization of coupled oscillators with hysteretic responses"; *Physica D*: 100, No. 3-4 (1997) 279-300.
- [۷] H. G. Schuster and P. Wagner; "Mutual entrainment of two limit cycle oscillators with time delayed coupling"; *Progress of Theoretical Physics* 81, No. 5 (1989) 939-945.
- [۸] R. D. Driver; "Ordinary and delay differential equations"; Springer 20 (2012).