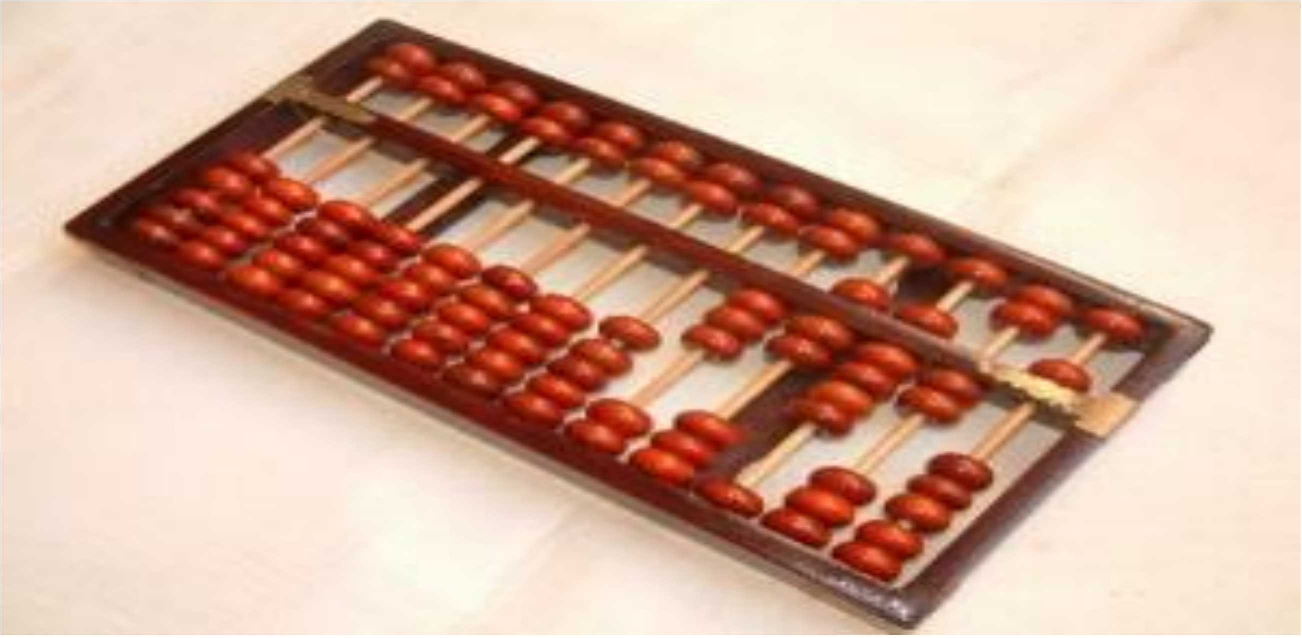
مدال چُرتکه، مارک بریورمن، فراکتال‌ها و نظریه گراف

سعید علیخانی
دانشکده علوم ریاضی دانشگاه یزد

سمینارهای هفتگی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

۱۱ بهمن ۱۴۰۱



- چرتکه یک قاب محاسباتی و ابزار محاسباتی دست بشر است. تاریخچه چرتکه به حدود ۲۳۰۰ تا ۲۷۰۰ سال قبل از میلاد بر می گردد..زمانی که سامری‌ها و بعد بابلی‌ها از آن برای جمع و تفریق و محاسبات پیچیده خود استفاده می‌کردند. در طول امپراتوری هخامنشی، در حدود ۶۰۰ سال قبل از میلاد مسیح، ایرانیان اولین بار شروع به استفاده از چرتکه کرده‌اند این دستگاه ساده به هنگام استفاده، هر دو سمت مغز را تحت تاثیر قرار داده و در نتیجه می تواند تاثیر چشمگیری بر رشد ذهنی (بویژه کودکان) داشته باشد. چرتکه از یک قاب، چند میله و تعدادی مهره تشکیل شده است. هر میله ارزش مکانی اعداد از یکان تا صدگان و هزاران را نشان می‌دهد. با استفاده از چرتکه می‌توان به راحتی ۴ عمل ریاضی را انجام داد. مهره‌ها می‌توانند در امتداد میله جابجا شده و اعداد مختلفی را بسازند.

مسابقه محاسبه ذهنی چرتکه میان کودکان

- **مدال چرتکه:**
- جایزهٔ نوانلینا، به افتخار رولف نوانلینا Rolf Nevanlinna، ریاضی‌دان فنلاندی که از سال ۱۹۵۹ تا ۱۹۶۲ رئیس اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیات (IMU) و سازمان‌دهندهٔ کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات بود که در سال ۱۹۶۲ در استکهلم برگزار شد، نام‌گذاری شد. این جایزه توسط دانشگاه هلسینکی که نوانلینا رئیس آن بود، تامین می‌شود. جایزهٔ نوانلینا شامل یک مدال طلا، یک دیپلم، و یک جایزهٔ مالی به مبلغ ۱۰۰۰۰ یورو است.

رُلف نوانلینا ۱۸۹۵-۱۹۸۰

- پدر و مادر رولف نوانلینا، اتو ویلهلم نئوویوس و مارگارت رومبرگ بودند که به دو زبان سوئدی و فنلاندی صحبت می کردند. البته این بلافاصله این سوال را ایجاد می کند که نام نوانلینا از کجا آمده است زیرا نام پدرش Neovius بود. در واقع رولف نوانلینا در ده سال اول زندگی‌اش با نام رولف نئوویوس شناخته می‌شد، تنها در سال ۱۹۰۶ زمانی که پدرش اتو نام خانوادگی را تغییر داد، نوانلینا شد. اتو، متولد ۱۸۶۷، از یک خانواده ریاضی بود و در دانشگاه هلسینکی ریاضیات، فیزیک و نجوم خواند. پس از اخذ دکترا در فیزیک، او نزد هرمان رومبرگ، ستاره شناس در رصدخانه پولکووا تحصیل کرد و در سال ۱۸۹۲ با دختر رومبرگ، مارگارت ازدواج کرد. آنها در جوئنسو، جایی که اتو فیزیک تدریس می کرد، ساکن شدند و چهار فرزندشان در آنجا به دنیا آمدند.

در دبیرستانِ هلسینکی علایق نوانلینا اولاً تاریخ و در مرحله دوم ریاضیات بود. او توسط تعدادیِ معلم عالی تدریس می شد، اما شاید بهترین آنها پدرش بود که در سال های آخر مدرسه به او فیزیک و ریاضیات آموخت. او در سال ۱۹۱۳ از مدرسه فارغ التحصیل شد و عملکرد بسیار خوبی داشت اگرچه او بهترین دانش آموز در سال خود نبود. با این حال او فراتر از برنامه درسی مدرسه در تابستان سال ۱۹۱۳ رفت، زمانی که او قبل از شروع تحصیلات دانشگاهی خود، مقدمه‌ای بر تحلیل عالی لیندلوف را خواند. از آن زمان به بعد، او تبدیل به یک تحلیلگر مشتاق شد که تمام عمرش روی آن موضوع کار می کرد. (ارنست لیندلوف پسر عموی پدر نوانلینا و به همین دلیل بخشی از این خانواده ریاضی بود.)

- نوانلینا در سال ۱۹۱۳ وارد دانشگاه هلسینکی شد. او در آنجا از تدریس لیندلوف الهام گرفت، اما آغاز جنگ جهانی اول در سال بعد تهدید به مختل کردن تحصیلات او شد. فنلاند در طول زندگی نوانلینا تحت تسلط روسیه بود، اما این تسلط در سالهای اول قرن بیستم افزایش یافت و منجر به یک جنبش استقلال طلبانه قوی در داخل کشور شد. پایان نامه او، ارائه شده در سال ۱۹۱۹، وجود توابع منظم را بررسی می کند که شرایط ثابت خاصی را برآورده می کند. این کار دقت و توجه به جزئیات را به نمایش می گذارد که نمونه تمام کارهای او بود. او دکترای خود را در ۱۹۱۹ ژوئن ۲ اخذ کرد و در همان روز با دختر عمویش مری ازدواج کرد.

- پست های دانشگاه در فنلاند در سال ۱۹۱۹ در دسترس نبود، بنابراین Nevanlinna معلم مدرسه شد. برادرش فریتیوف Frithiof به عنوان ریاضی‌دان برای شرکت بیمه Salama کار می کرد و علاوه بر تدریس تمام وقت مدرسه، Rolf Nevanlinna نیز برای Salama کار می کرد. در سال ۱۹۲۰ او از ادموند لاندو دعوتی دریافت کرد تا به گوتینگن برود اما او بلافاصله نپذیرفت. او در سال ۱۹۲۲ مدرس دانشگاه هلسینکی شد، اما تدریس مدرسه را رها نکرد تا اینکه در سال ۱۹۲۶ به عنوان استاد دانشگاه هلسینکی منصوب شد. شایان ذکر است، علیرغم این حجم کار سنگین، در این سال‌ها بود که او چیزی را تولید کرد که امروز «نظریه نوانلینا» نامیده می‌شود. عادات کاری او ممکن است این بازده بسیار بالای کار را توضیح دهد.

از سال ۱۹۸۲، اتحادیهٔ بین‌المللی ریاضیات جایزه نوانلینا را هر چهار سال یک‌بار در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان، برای تحقیقات برجسته در زمینه‌های ریاضیِ علوم اطلاعات، از جمله:

۱. تمام زمینه‌های ریاضی علوم کامپیوتر از جمله نظریهٔ پیچیدگی، منطق زبان‌های برنامه‌نویسی، تجزیه و تحلیلِ الگوریتم‌ها، رمزنگاری، بینایی کامپیوتر، الگوشناسی، پردازش اطلاعات و مدل‌سازی هوش.

۲. محاسبات علمی و آنالیز عددی، زمینه‌های محاسباتی بهینه‌سازی و نظریهٔ کنترل، و جبر کامپیوتری،

اهدا می‌شود.

این جایزه برای دانشمندان جوان‌تر در نظر گرفته شده است، و تنها کسانی که در اول ژانویهٔ سال اهدای جایزه، کمتر از ۴۰ سال دارند، می‌توانند نامزد شوند. این جایزه همراه با سایر جوایزَ IMU از جمله مدال فیلدز اعطا می‌شود. بسیاری از افراد این مدال را همتراز با مدال فیلدز می‌دانند، اما همیشه زیر سایهٔ مدال فیلدز بوده است و افراد کمی با این جایزه آشنایی دارند. از لحاظ ظاهری این مدال، همانند مدال فیلدز، از طلای ۱۴ عیار با وزن ۱۶۹ گرم، و قطر ۵/۶۳ میلی‌متر ساخته شده است.

روی مدال چرتکه

پشت مدال چرتکه

در ماه مارس ۲۰۱۹، کمیتهٔ اجرایی اتحادیهٔ جهانی ریاضیات نام جایزه را به مدال چرتکهٔ IMU، IMU Abacus Medal تغییر داد. دلیل تغییر نام، به‌طورخلاصه، این بود که نوانلینا یک هوادار مشتاق نازی‌ها بود و میزان این علاقه به‌گونه‌ای بود که به‌عنوان رئیس کمیتهٔ استخدام SS فنلاند خدمت کرد.

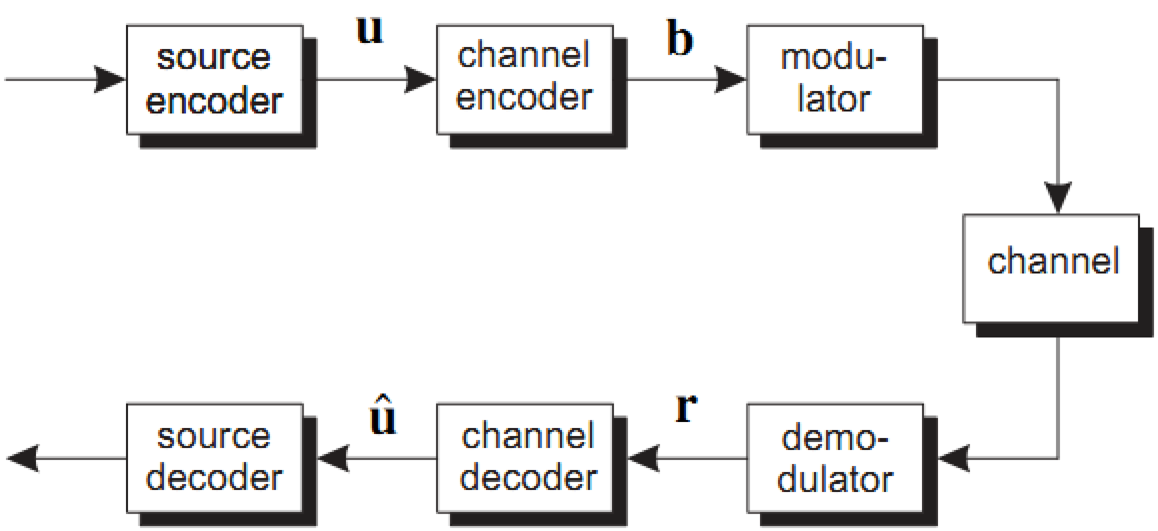
کمیتهٔ اجرایی اعتقاد دارند که اگر جایزه‌ای را به نام شخصی نام‌گذاری می‌کنیم، باید متقاعد شویم که آن شخص شهرتِ بی‌عیب و نقصی دارد. باید از نام‌بردن جوایز بین‌المللی موجود در زمینه‌های مرتبَط، هم به احترام سازمان‌های دیگر و هم برای فرار از سوءتفاهم، اجتناب کنیم. همچنین، نام‌های عمومی مانند «جایزهٔ IMU در ریاضیات محاسبات» یا «جایزهٔ IMU در زمینه‌های ریاضی علوم اطلاعات» مورد بحث قرار گرفت، اما به‌علت اینکه طولانی بودند مورد موافقت قرار نگرفتند. نام مدال چرتکهٔ IMU مربوط به چرتکه، یک وسیله باستانی است که برای محاسبات عددی استفاده می‌شد، و بر اهمیت محاسبات در ریاضیات اولیه تاکید دارد.

اولین مدال چرتکهٔ IMU (درحقیقت با نام جدید) در کنگرهٔ بین‌المللی ریاضی‌دانان در سال ۲۰۲۲ که در هلسینکی فنلاند در ۵ جون ۲۰۲۲ (۱۴ تیر ۱۴۰۱) برگزار شد، به مارک بریورمن، Mark Braverman اهدا شد. او ۳۸ سال دارد و در حال حاضر استاد دانشگاه پرینستون است. مارک این مدال را برای تحقیقات راهگشای او در توسعهٔ نظریهٔ پیچیدگی اطلاعات، چارچوبی برای استفاده از نظریهٔ اطلاعات برای استدلال در مورد پروتکل‌های ارتباطی دریافت کرد. کار او منجر به قضایای جمع مستقیمی شده است که کران‌های پایینی از ارتباطات مستهلک شده، روش‌های فشرده‌سازی پروتکل مبتکرانه، و پروتکل‌های ارتباطی تعاملی جدید مقاوم در برابر نویز ارائه می‌دهند.

برنده مدال چُرتکه ۲۰۲۲

مارک بریورمن

Principal structure of digital communication systems



براورمن که در ژانویه از این جایزه مطلع شد، گفت: «بدیهی است که داشتن چنین شناختی عالی است و ممکن است شروع کردن چیزهای جدید را آسان‌تر کند». اما او همچنین به‌سرعت این ایده که او یک نابغه منفرد است را رد کرد. او گفت: «افراد بااستعداد زیادی وجود دارند» و افزود که «این حوزه کوچک، اما پر از متفکران بااستعداد و همکاری‌های سازنده است». همکار براورمن در پرینستون، ریاضی‌دان آساف نائور Assaf Naor، براورمن را یک حلَ‌کننده مسئلهٔ «بی‌باک» می‌نامد. نائور گفت: «او بسیار کنجکاو، روشنفکر و ماجراجو است. وقتی یک چکش بزرگ در دست دارید، همه چیز شبیه یک میخ است. مارک، نظریه علوم کامپیوتر را توسعه داده و می‌داند این یک چکش بسیار بزرگ است».

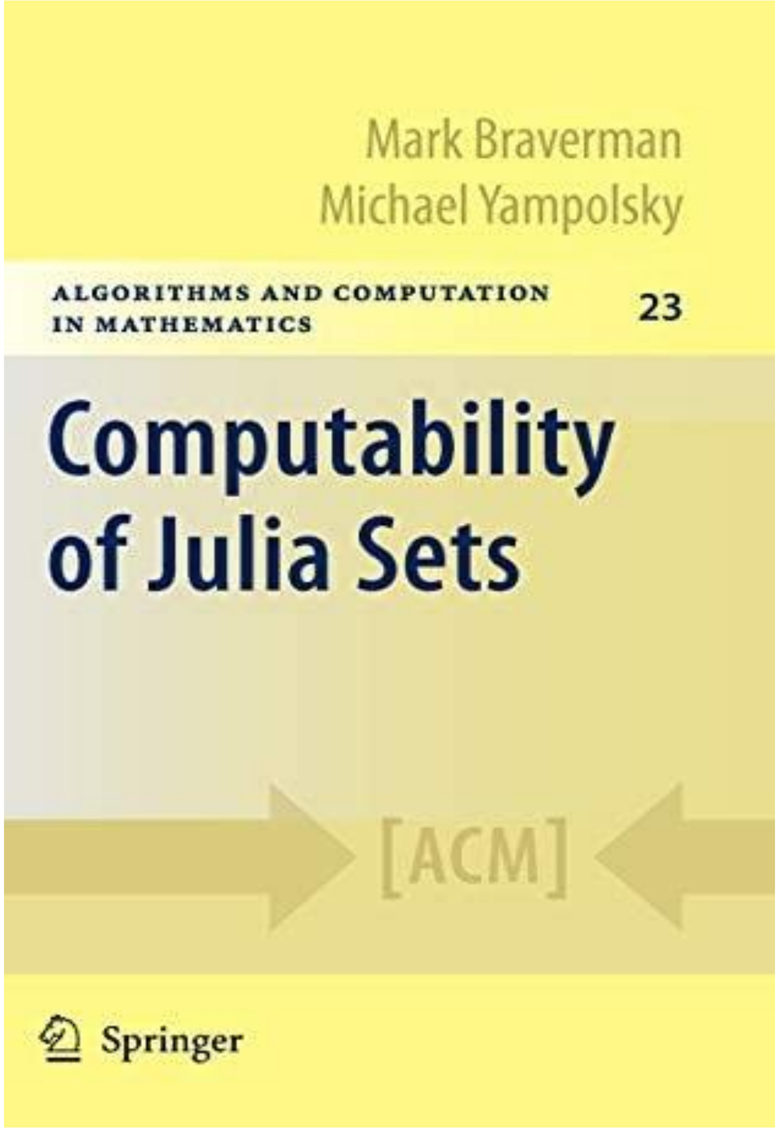
- براورمن، پسر یک مادرِ ریاضی‌دان و یک پدرِ فیزیک‌دان در سال ۱۹۸۴ در پِرم Perm روسیه، یک شهر صنعتی در نزدیکی دامنه‌های غربی کوه‌های اورال، به دنیا آمد. در سال ۱۹۹۲ زمانی که او ۸ ساله بود، به دنبال فروپاشی اتحاد جماهیر شوروی و بی‌ثباتی ناشی از آن، خانواده جوان به حیفای اسرائیل نقل مکان کردند. در حالی که او همیشه به ریاضیات و برنامه‌نویسی کامپیوتر علاقه داشت، براورمن گفت والدینش هرگز اصرار نکردند. او گفت: «آنها من را به نقطه‌ای رساندند که با ریاضی راحت باشم». او همچنین استعداد اولیه خود را برای این مباحث نشان داد و دو مدال برنز و یک طلا در المپیاد بین‌المللی ریاضی در سال‌های ۱۹۹۸، ۱۹۹۹ و ۲۰۰۰ به‌دست آورد. در تکنیون Technion حیفا، او در بهار ۲۰۰۱ در ریاضیات و علوم کامپیوتر دو مدرک گرفت. بعداً در همان سال خانوادهٔ او به کانادا نقل‌مکان کردند، جایی که مادرش یک موقعیت هیات‌علمی در کلگری Calgary دریافت کرده بود. در آن زمستان، او تحصیلات تکمیلی خود را در رشته علوم کامپیوتر در دانشگاه تورنتو آغاز کرد. او هنوز فقط ۱۷ سال داشت.

- در اوایل دوران حضورش در تورنتو، براورمن در مورد مجموعه‌های جولیا کنجکاو شد، مجموعه‌ای از نقاط که شکل‌های فراکتالی خیره کننده و پیچیده را تولید می‌کنند، به‌این‌معنی که وقتی بزرگ‌نمایی می‌کنید، همان الگوها ظاهر می‌شوند. برای پیدا کردن مجموعه جولیا از یک تابع چندجمله‌ای معین، کافی است یک نقطه را برای یافتن یک مقدار خروجی وارد کنید و سپس آن مقدار خروجی را به تابع وصل کنید. اجرای مکرر این فرآیند، با استفاده از خروجی‌ها به‌عنوان ورودی، می‌تواند نشان دهد که چگونه نقطه طی تکرارها تکامل می‌یابد. برخی از نقاطِ شروع به دنباله‌های تکراری اعداد منجر می‌شوند، اما برخی دیگر فقط بزرگتَر می‌شوند. اینها به بی‌نهایت فرار می‌کنند. مرز بین نقاطی که به‌طور منطقی نزدیک به جایی که شروع شده‌اند و نقاطی که به بی‌نهایت می‌روند، اشکال پیچیده و پیچیده‌ای ایجاد می‌کند. این اشکال مجموعه جولیای تابع هستند.

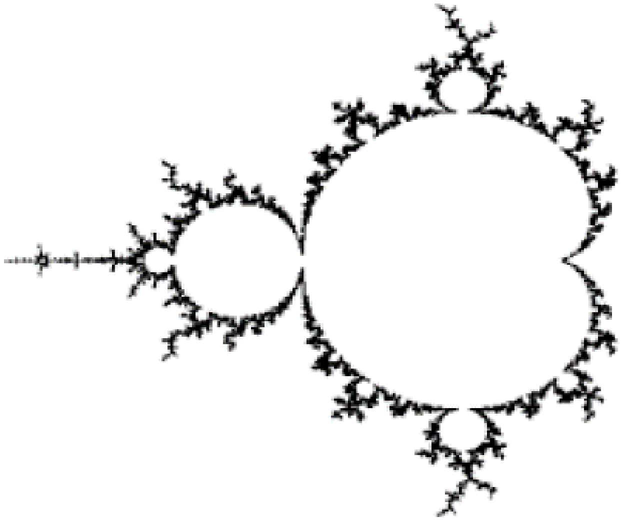
- آنها به شدت در زمینه ریاضیِ سیستم‌های دینامیکی، که بر چگونگی تکامل سیستم‌ها در طول زمان تمرکز مَی‌کنند، نقش دارند. کار براورمن فقط در زمینه سیستم‌های دینامیکی نبود. او یک نوجوانِ دانشجوی کارشناسی ارشد در علوم کامپیوتر بود. مجموعه‌های جولیا معمولاً بخشی از برنامه درسی نیستند. بااین‌حال، مشاور او استفان کوک Stephen Cook ریاضی‌دان دانشگاه تورنتو، مایکل یامپولسکیMichael Yampolsky، براورمن را به کارهای قبلی هدایت کردند که مجموعه‌های جولیا را از دید علم کامپیوتر نگاه می‌کرد. آن تحقیق، فراکتال‌ها را از نظر پیچیدگی توصیف کرد، چارچوبی که (در میان چیزهای دیگر) به‌دنبال قوانین اساسی است که مسائل سخت را که می‌توانند در مدت زمان معقول حل شوند از مسائل فوق‌العاده سختی که فقط می‌توان آنها را تقریب کرد، جدا می‌کند. در مجموعه‌های جولیا، براورمن با ترسیم مشابهی مواجه شد: چه قوانین و توابعی نقاطی را که نزدیک می‌مانند از نقاطی که به بی‌نهایت فرار می‌کنند، جدا می‌کند؟ این روشی کامل برای نگاه کردن به مسئله بود.

- براورمن تحقیقات خود را در مورد فراکتال‌ها با فکر کردن در مورد مکانیزم‌های اساسی آغاز کرد: چه چیزی یک مجموعه جولیا را از نظر محاسبات خاص می‌کند؟ بخش اعظم این کار توسط ریاضی‌دان آمریکایی جان میلنور John Milnor، که اکنون در دانشگاه استونی بروک است، انجام شده بود. براورمن، با هدایت کوک و کار با یامپولسکی، استراتژی‌های میلنور را مطالعه کرد و شروع به تمرکز بر مجموعه‌هایی کرد که محاسبه آن‌ها فوق‌العاده دشوار بود، مانند توابع پیچیده‌ای که نیاز به تکرارهای زیادی داشتند تا آشکار شود که آیا نزدیک می‌مانند یا به بی‌نهایت فرار می‌کنند. به همراه کوک، براورمن مدل‌های قبلی را بررسی کرد که قوانینی را ارائه می‌کردند که چه زمانی می‌توان چیزها را محاسبه کرد و چه زمانی نمی‌توان. با گذشت زمان، محققان متعجب شدند: آیا برخی از توابع می‌توانند آنقدر پیچیده باشند که محاسبه مجموعه جولیا آنها غیرممکن باشد؟ اینجاست که ارزشمند بودن دیدگاه علم کامپیوتر ثابت می‌شود. این نوع سوال، آیا مسائلی وجود دارد که نمی‌توانیم حل کنیم و آیا می‌توانیم آن را ثابت کنیم؟ نمونه‌ای از علم کامپیوتر نظری است.

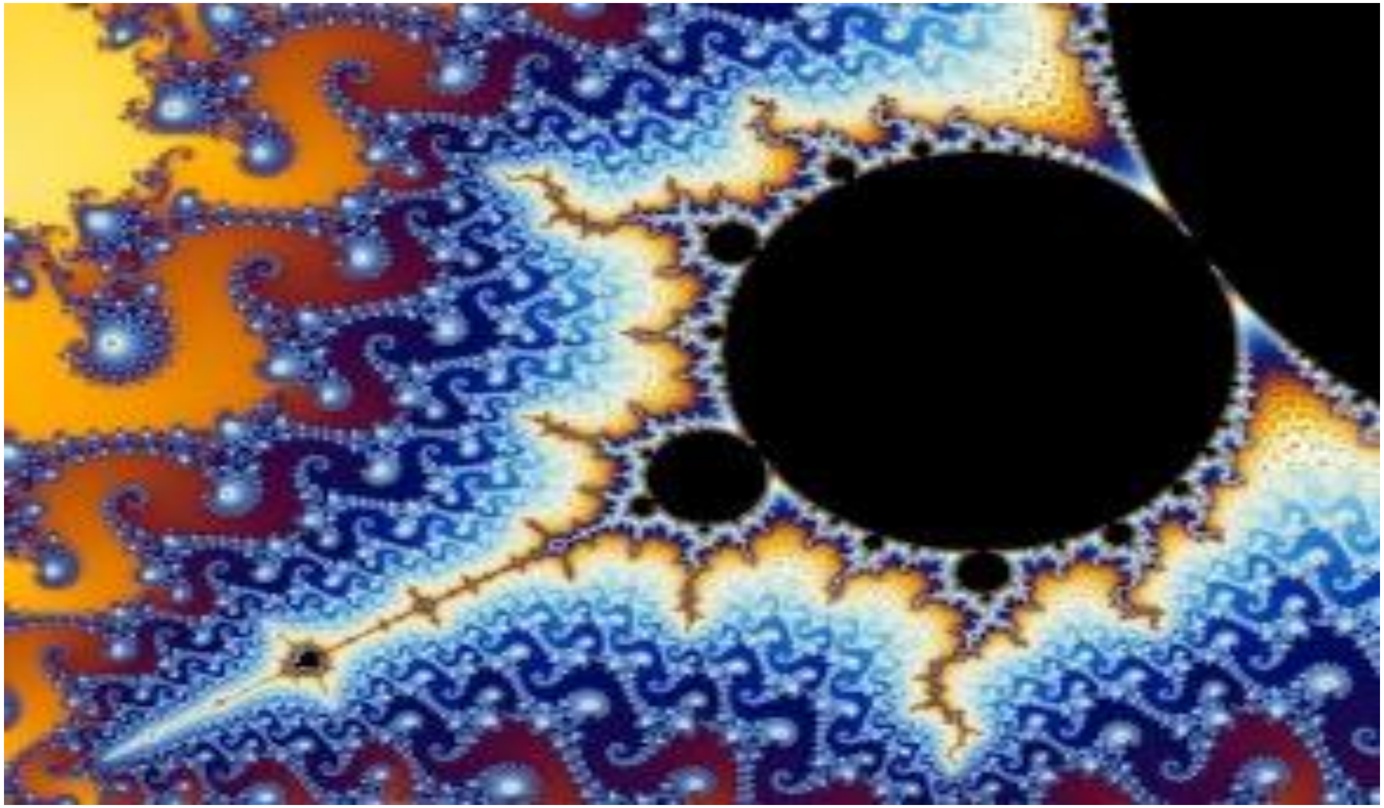
- اولین مقاله آنها قوانین روشنی را برای مجموعه‌های جولیای قابل‌محاسبه ارائه کرد و الگوریتمی برای یافتن توابعی که مجموعه‌ها را نمی‌توان برای آنها محاسبه کرد، ارائه کرد. این یافته منجر به سیل نتایج شد. به گفته یامپولسکی، یکی از شوکه‌کننده‌ترین آنها دلیلی بر این بود که راه آنها برای یافتن مجموعه‌های غیرقابل محاسبه جولیا در واقع تنها راه برای انجام آن بود. این تحقیق ابتدا پایه پایان‌نامه کارشناسی ارشد براورمن و سپس کار دکترای او در تورنتو را تشکیل داد. پایان‌نامه او با کوک، مدل محاسباتی مورد استفاده برای بررسی مجموعه‌های جولیا را توصیف کرد و در نهایت او و یامپولسکی کتابی در این زمینه نوشتند که در سال ۲۰۰۹ منتشر شد. براورمن گفت «زمانی که کار را شروع کرد، این مبحث به‌نوعی از مُد افتاده بود، اما این موضوع او را آزار نمی‌داد.» او ادامه داد: «در علوم کامپیوتر این حوزه طلایی از ایده‌ها وجود دارد. اگر خیلی آسان باشد، پر از نتایج می‌شود. اگر خیلی سخت باشد، آنقدر کم می‌شود که مردم علاقه خود را از دست می‌دهند و شما نمی‌توانید یک جامعه را حفظ کنید».


Mark Braverman
Michael Yampolsky
ALGORITHMS AND COMPUTATION IN MATHEMATICS
23
Computability of Julia Sets
[ACM]
Springer

- The term “fractal” was first used by mathematician Benoit Mandelbrot in 1975. A fractal is an abstract object used to describe and simulate naturally occurring objects. Artificially created fractals commonly exhibit similar patterns at increasingly small scales. It is also known as expanding symmetry or evolving symmetry. If the replication is exactly the same at every scale, it is called a self-similar pattern. See the following figure.



- Mandelbort fractal



- An independent set of a graph G is a set of vertices where no two vertices are adjacent. The independence number is the size of a maximum independent set in the graph and denoted by α(G). For a graph G, let i_k denote the number of independent sets of cardinality k in G $(k= 0,1,\ldots,k)$. The independence polynomial of G,

$$I(G,x)= \sum_{k=0}^{\alpha} i_k x^k$$

is the generating polynomial for the independent sequence (i_0, i_1, i_2,… , i_α).

- Theorem (Hoede and Li, 1994)
- For any vertex v of a graph G,

$$I(G,x) = I(G-v,x) + xI(G-[v],x)$$

- where $[v]$ is the closed neighbourhood of v, contains of v, together with all vertices incident with v.

- Theorem (Alikhani & Peng, 2011)
- For any positive integer n,

$$J_n(x) = \prod_{s=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \left(2x + 1 + 2x\ \cos\frac{2s\pi}{n}\right).$$

Where, $J_n(x)$ is Jacobsthal Polynomial

$$J_n(x) = J_{n-1}(x) + xJ_{n-2}(x)$$

- Corollary (Alikhani & Peng, 2011)
- For any positive integer n, $J_n(x)$ has the following zeros.

$$j_s^{(n)} = -\frac{1}{2(1+cos\frac{2s\pi}{n})}, s = 1, 2, \ldots, \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$$

- Theorem (Alikhani & Peng, 2011)
- For any positive integer n,

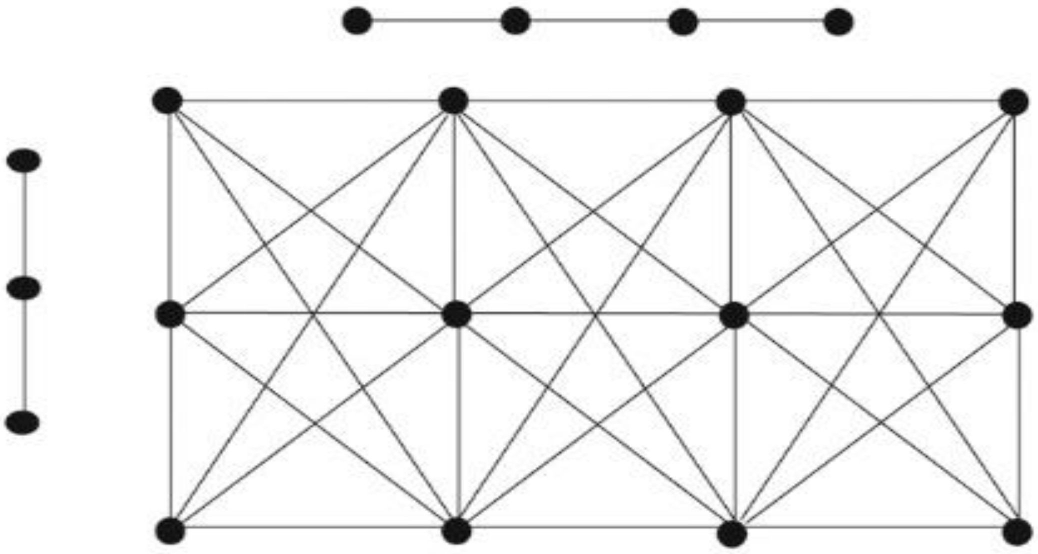
$$I(P_n, x) = J_{n+2}(x).$$

- Corollary (Alikhani & Peng, 2011)
- For any integer n, $I(P_n, x)$ has the following zeros,

$$p_s^{(n)} = -\frac{1}{2(1+ cos\frac{2s\pi}{n+2})}, s = 1, 2, \ldots, \left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor$$

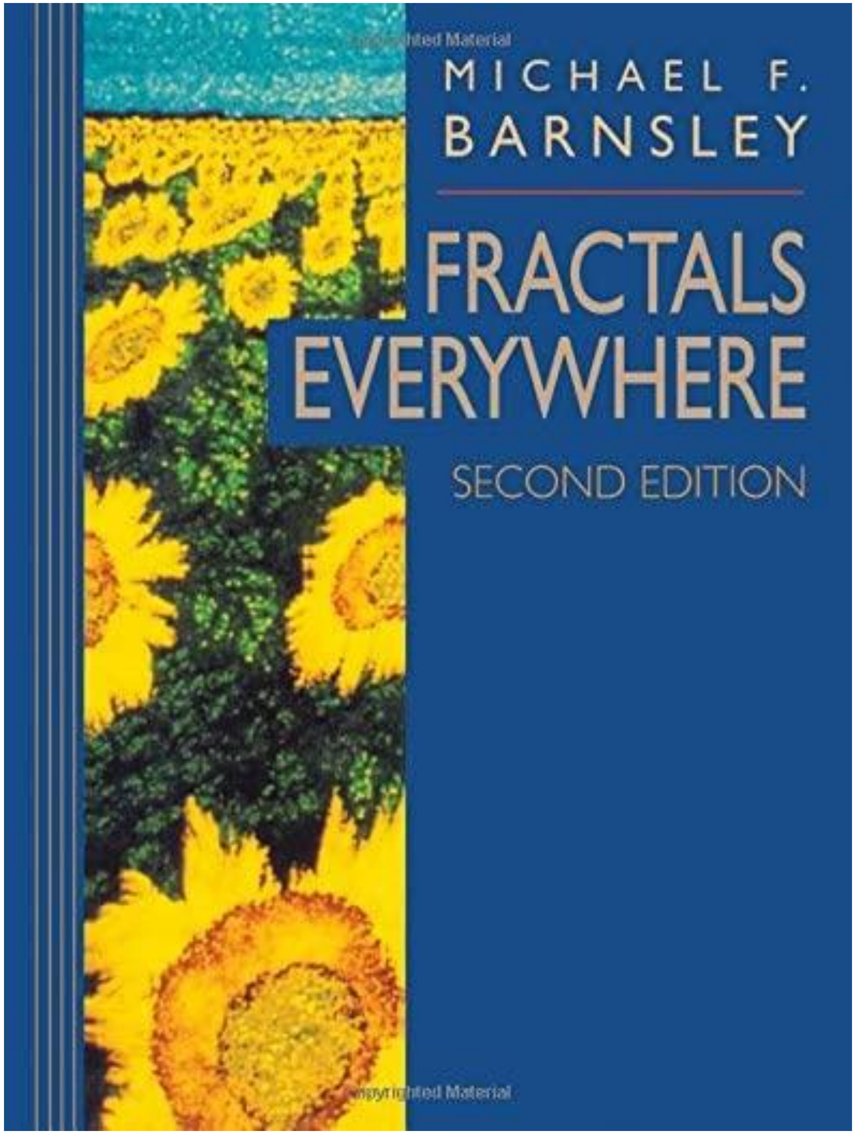
-

- For two graphs G and H, let $G[H]$ be the graph with vertex set $V(G) \times V(H)$ and such that vertex (a,x) is adjacent to vertex (b,y) if and only if a is adjacent to b (in G) or $a = b$ and x is adjacent to y (in H). The graph $G[H]$ is the lexicographic product (or composition) of G and H, and can be thought of as the graph arising from G and H by substituting a copy of H for every vertex of G.



- For a point $z_0 \in \mathbb{C}$, its *forward orbit* with respect to f is the set $O^+(z_0) = \{f^{ok}(z_0)\}_{k=0}^{\infty}$ where f^{ok} is the map *fofo ... of* and $f^{o(0)}$as the identity map.

- For a polynomial *f* , its *filled Julia* set *K(f)* is the set of all points *z* whose forward orbit $O^+(z)$ is bounded in $(\mathbb{C}, |.|)$. Its *Julia* set *J (f)* is the boundary $\partial k(f)$ and its *Fatou* set *F(f)* is the complement of *J (f)* in *C*.

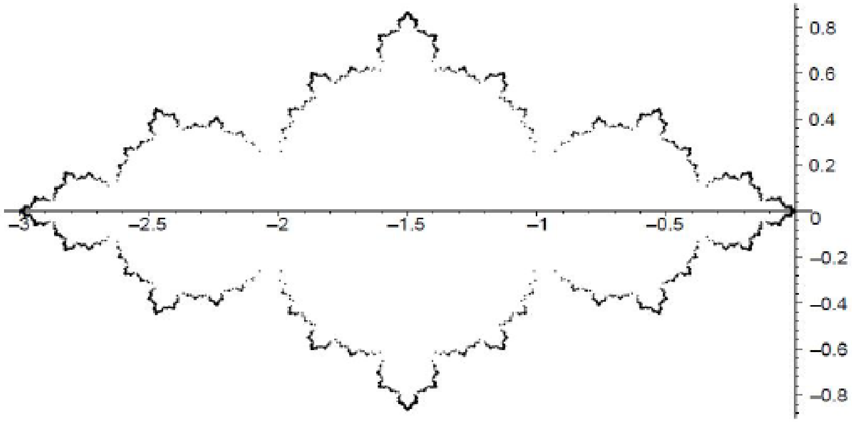

Copyrighted Material
MICHAEL F.
BARNSLEY
FRACTALS
EVERYWHERE
SECOND EDITION
Copyrighted Material

- The independence fractal or independence attractor of a graph G is the set

$$I(G) = \lim_{k\to\infty} Roots\left(I\left(G^k, x\right)\right),$$

where $G^k = G[G[\ldots]]$. (Note that for two graphs G and H, G[H] is the lexicographic product or composition of G and H).

- Example: For G = P3, the independence roots of G^{11} are shown in the following figure.



- Question: For a graph G, what happens to the roots of the independence polynomials $I(G^k, x)$ as $k \to \infty$?

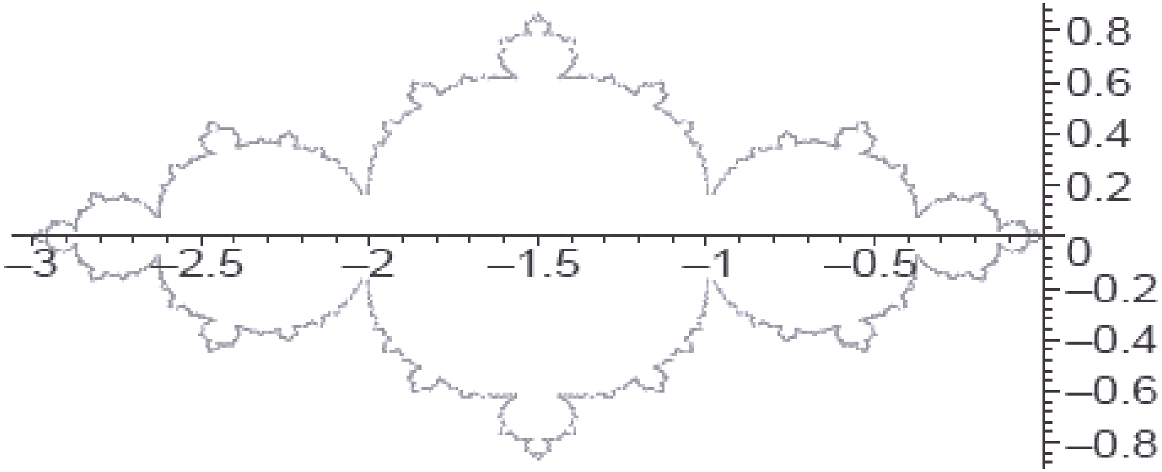
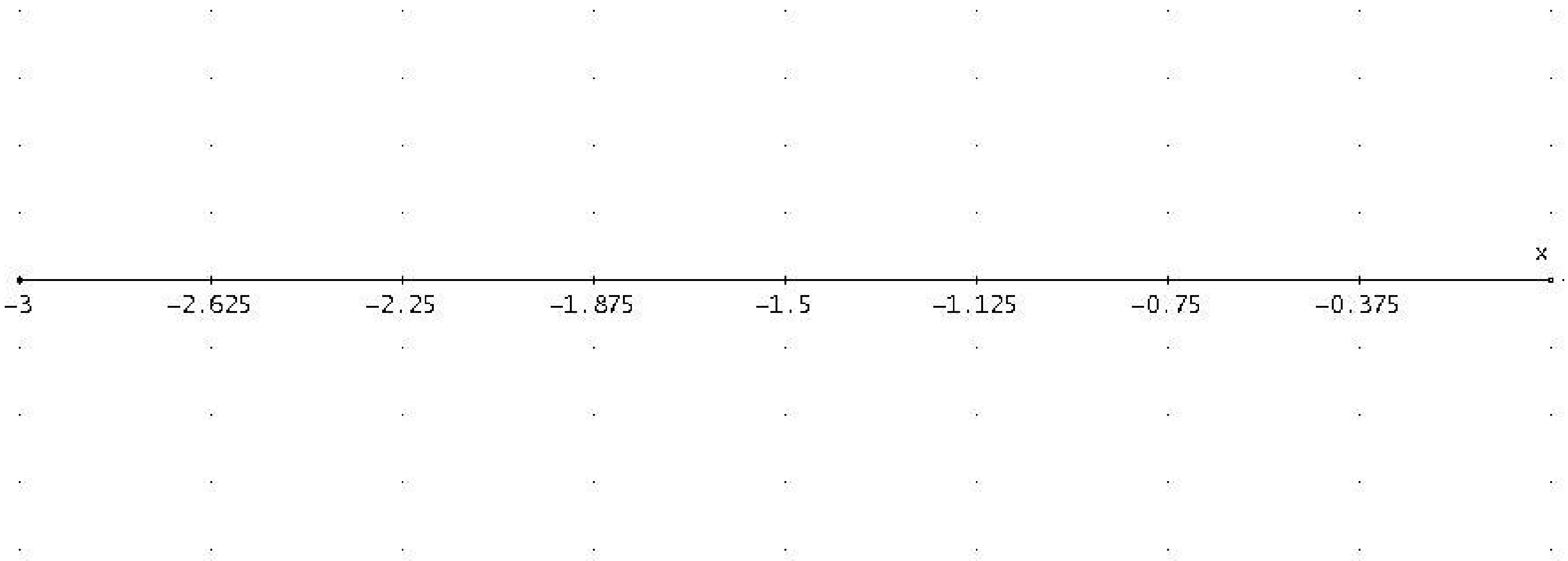
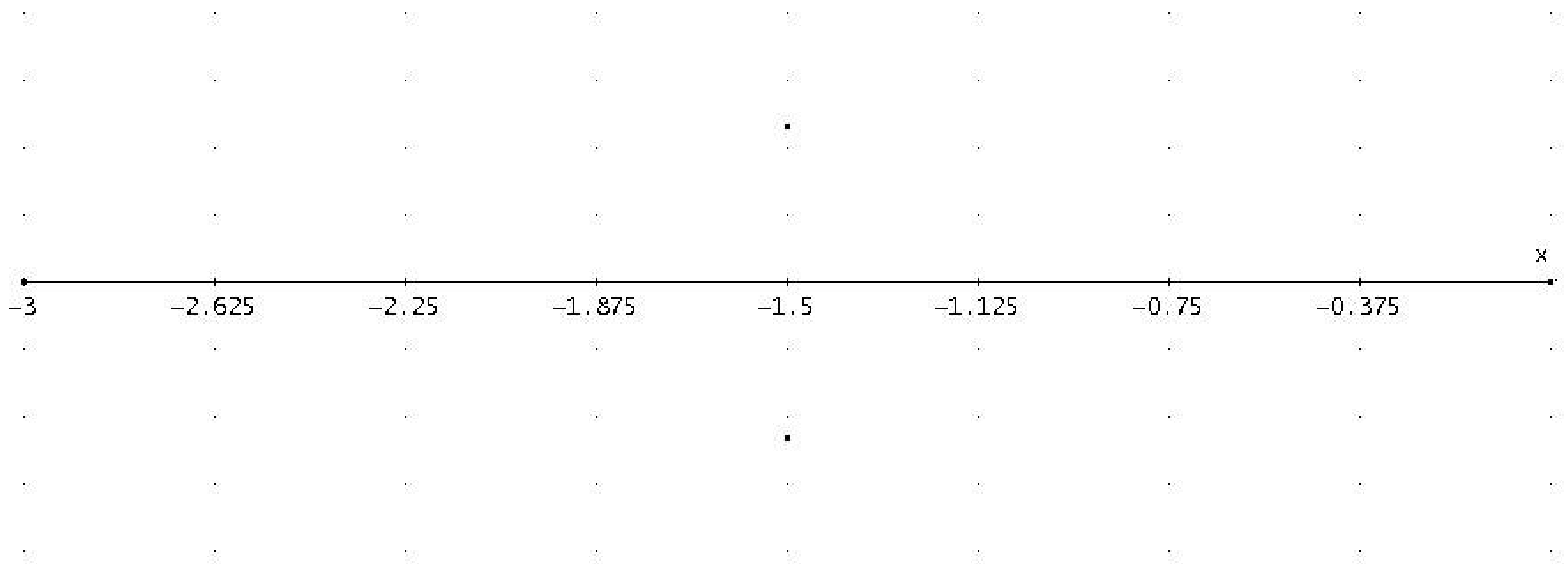


Figure: Independence fractal of P3.

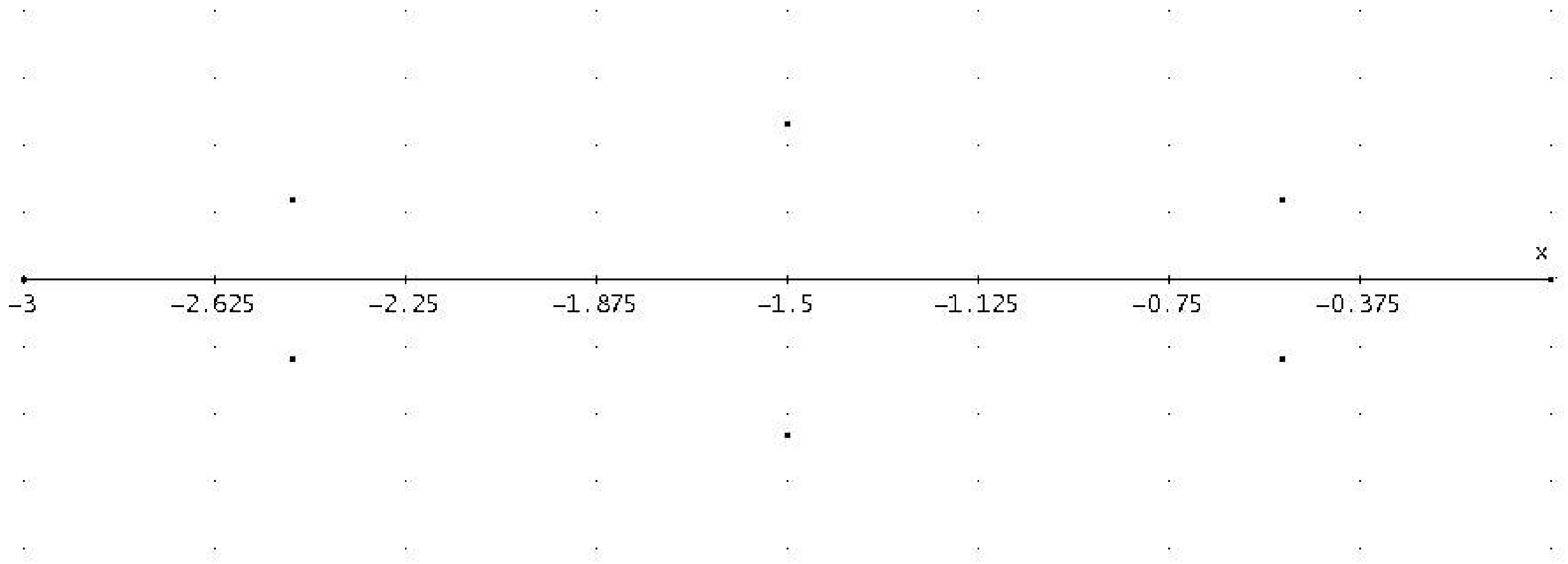
$f(x)=x^2+3x$



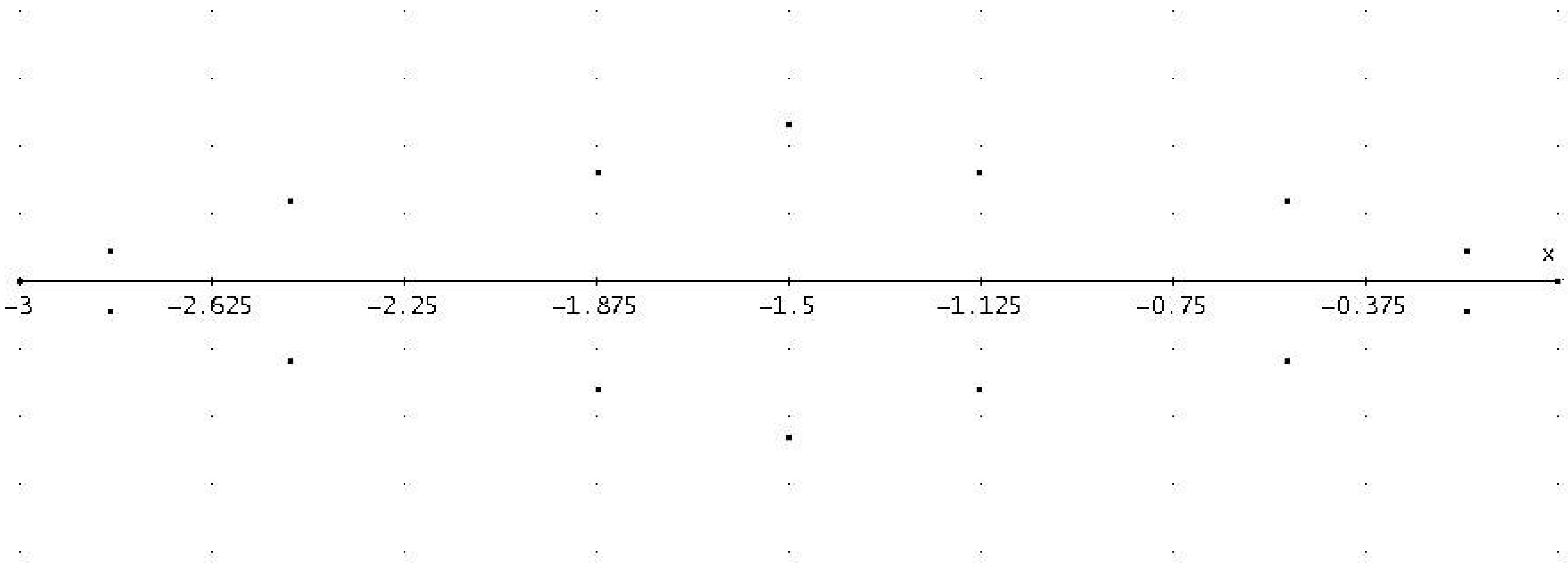
f(f(x))



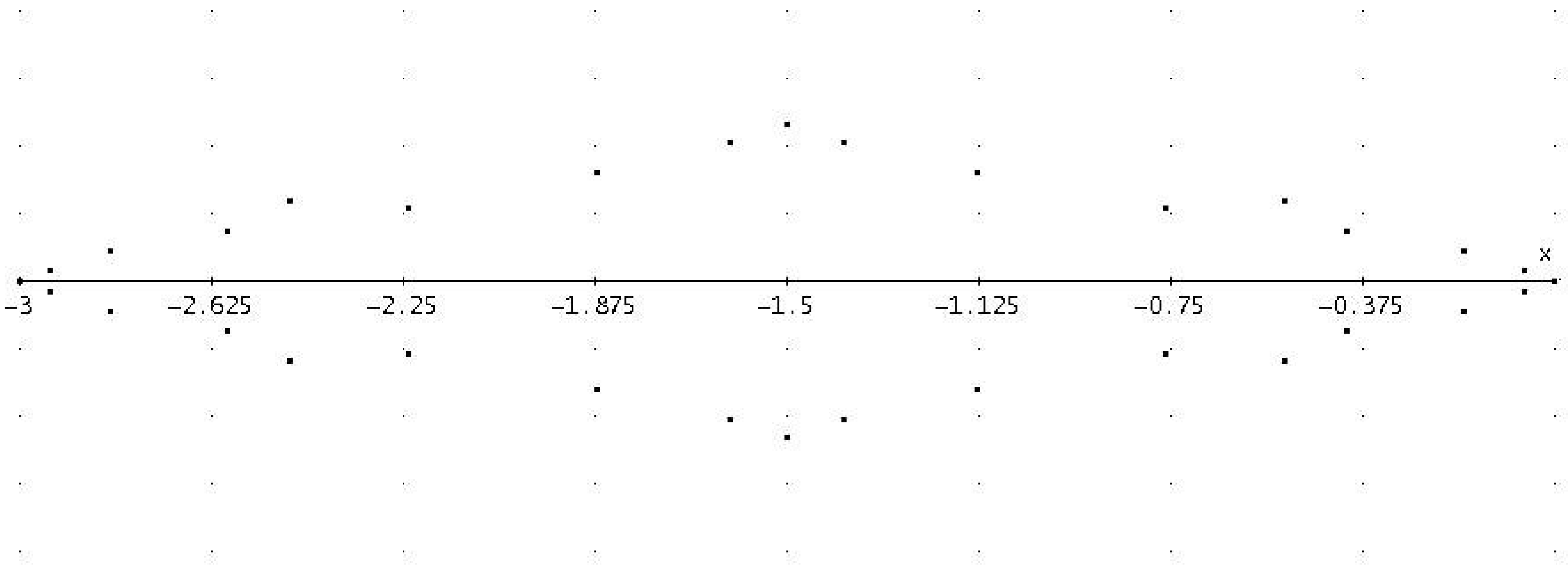
f(f(f(x)))



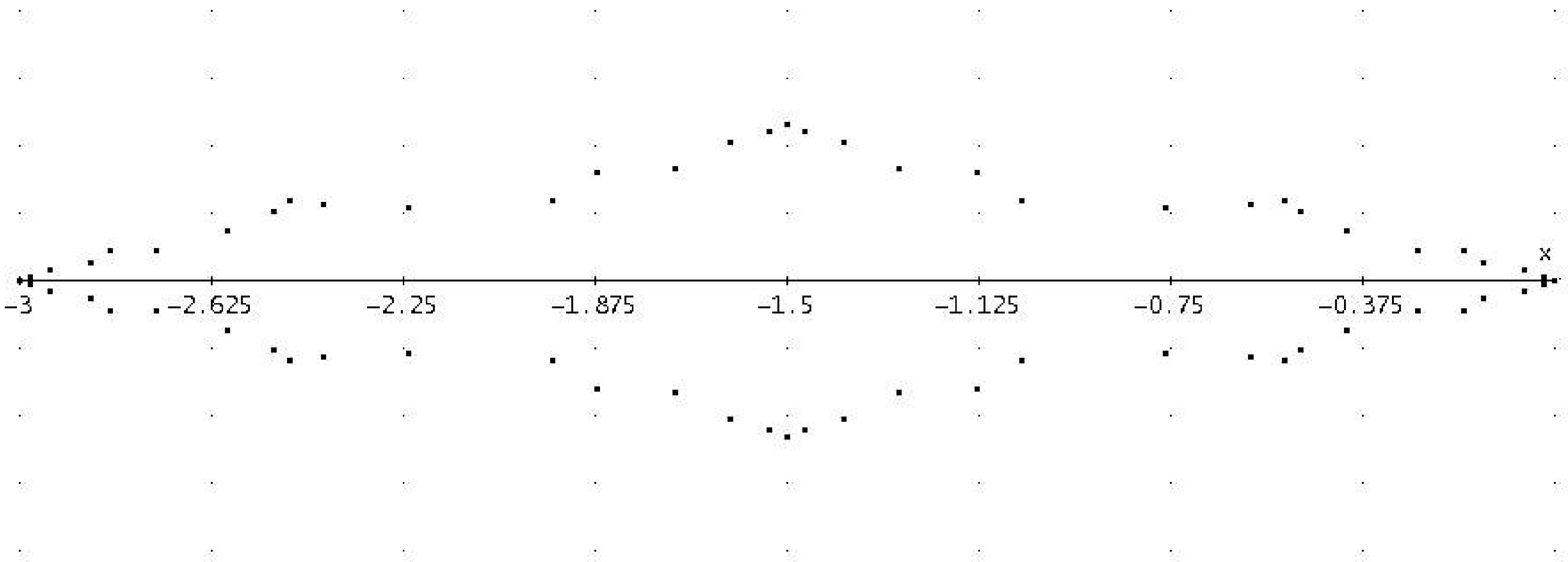
f^4(x)



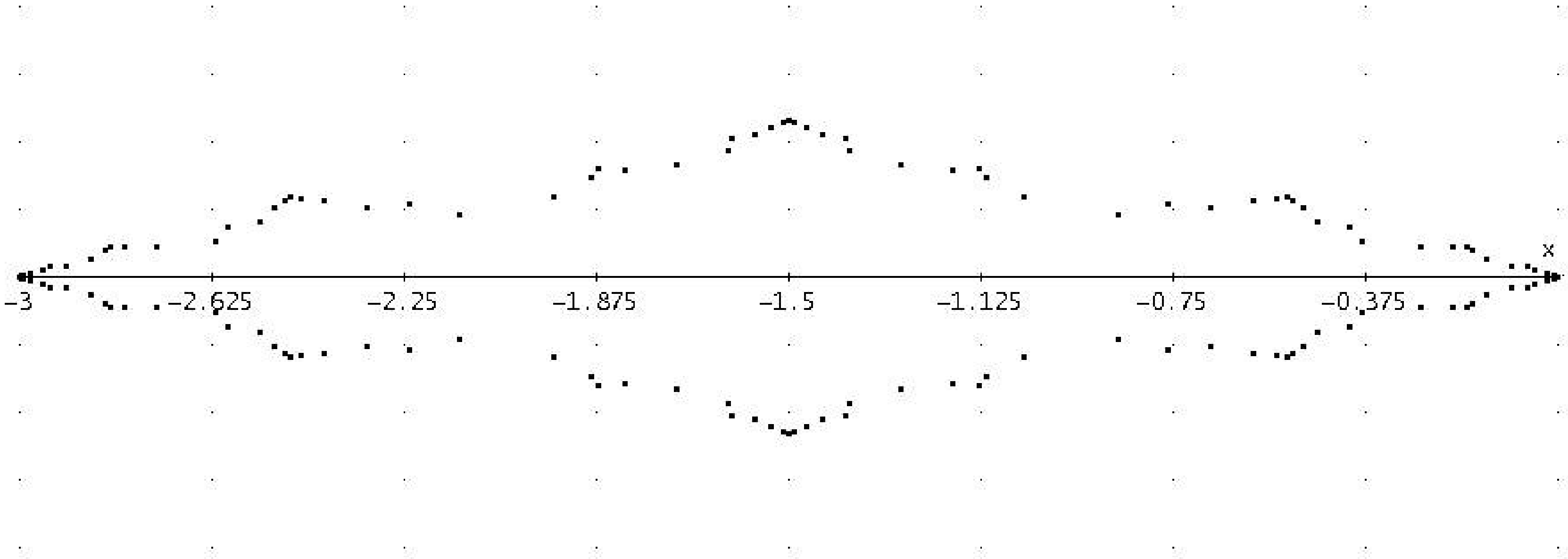
f^5(x)



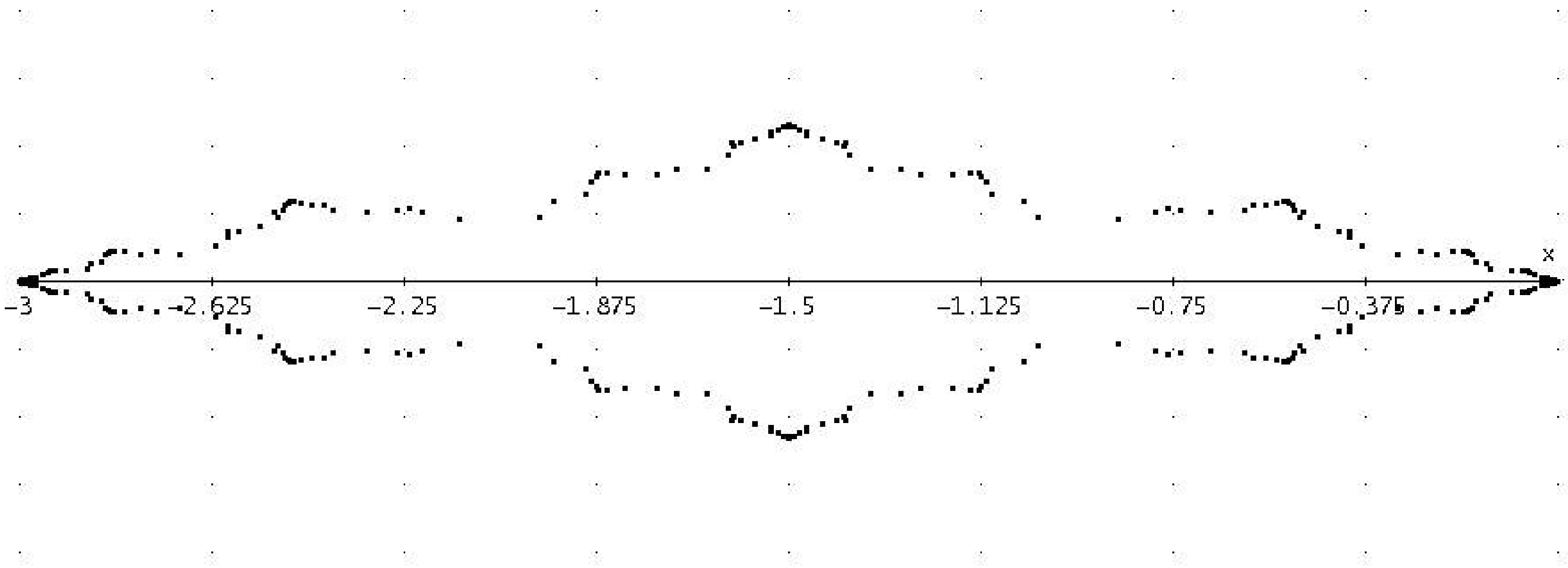
f^6(x)



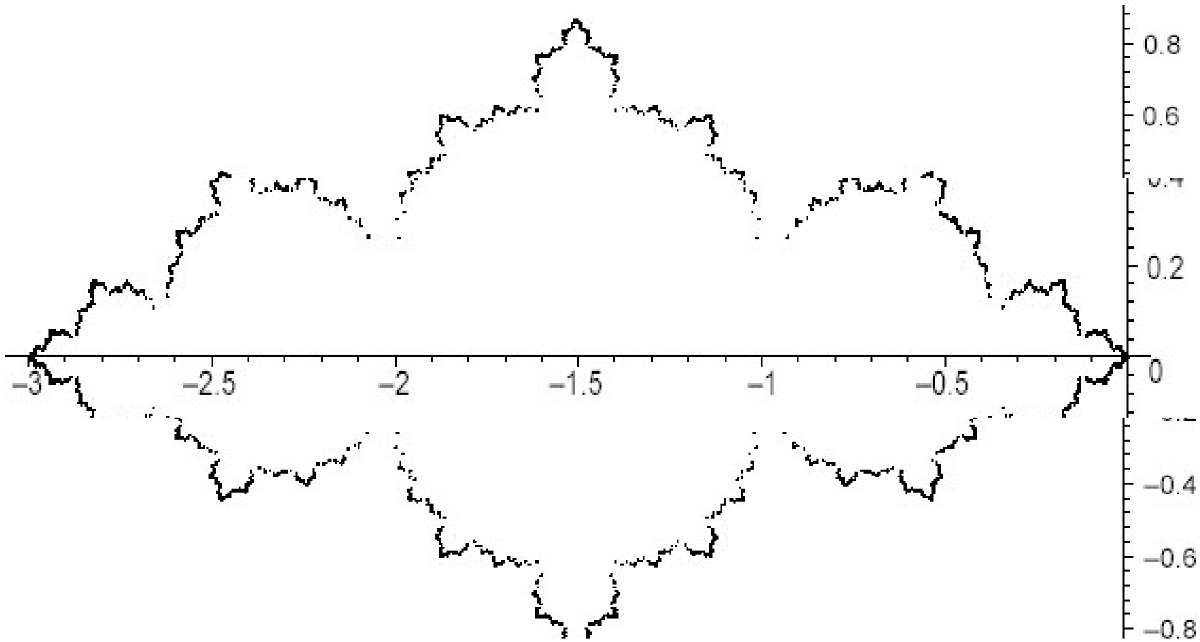
f^7(x)



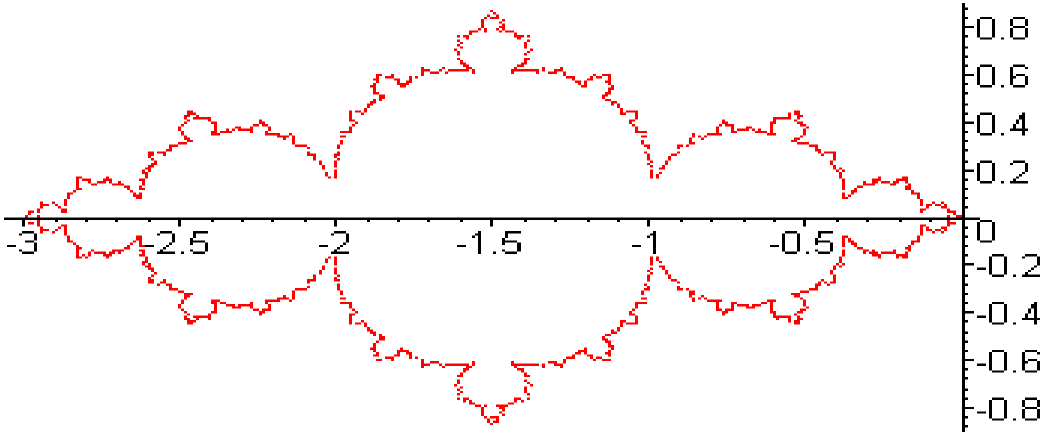
f^8(x)



f^11(x)



I (P3)



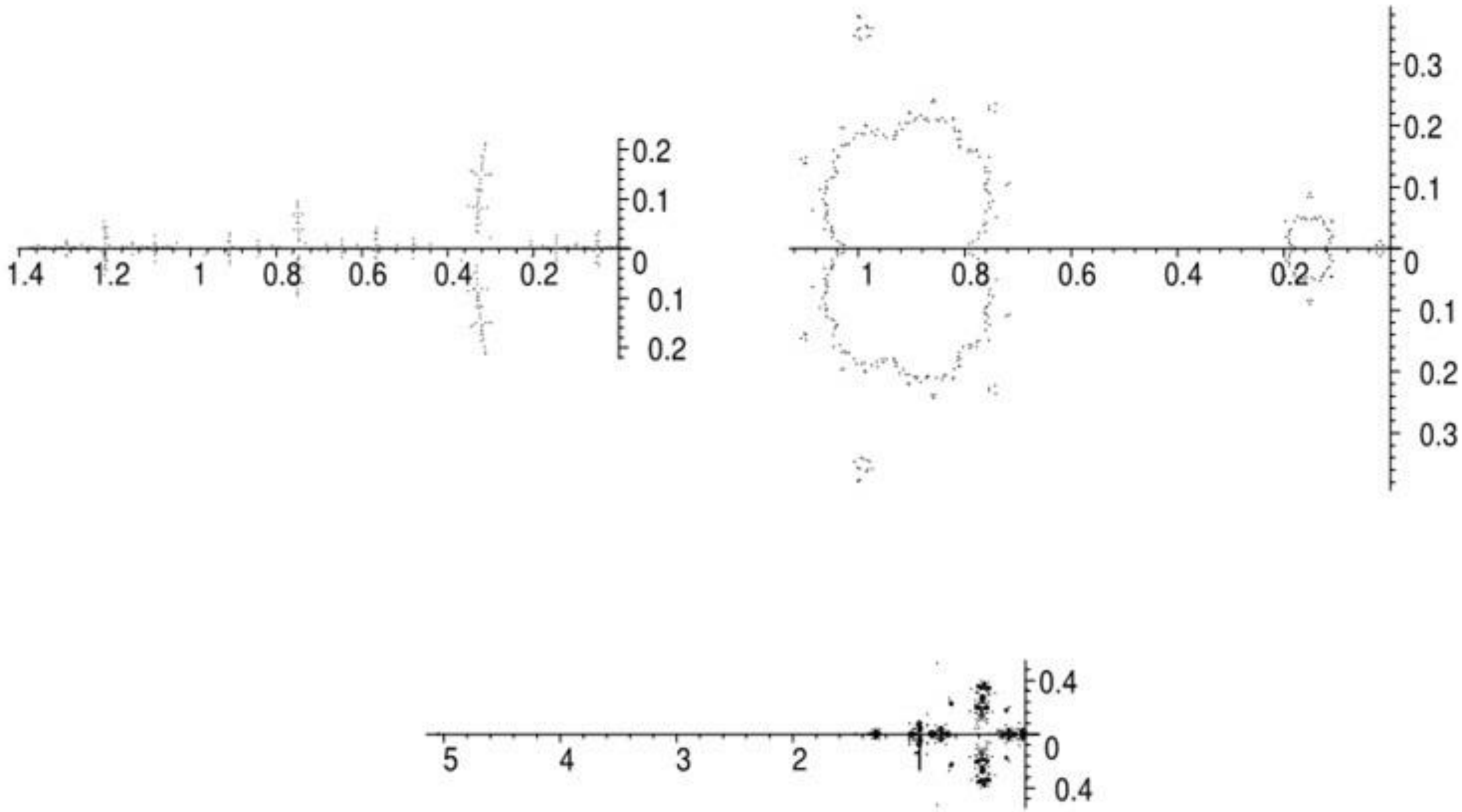


Fig. Independence fractal for C_7, W_7 and P_{12}, respectively

The importance of the number -1 as a root

Theorem. *Let G be a non-empty graph, and denote $\eta(G)$ be the multiplicity of -1 as a root of $I(G,x)$. If $\eta(G) \leq 1$, then $\mathcal{I}(G) = \mathcal{J}(I(G,x)-1)$.*

Corollary (i) *For every $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}(P_n) = \mathcal{J}(I(P_n,x)-1) = \mathcal{J}(J_{n+2}(x)-1)$.*

(ii) *For every $n \geq 3$, $\mathcal{I}(C_n) = \mathcal{J}(I(C_n,x)-1) = \mathcal{J}(J_{n+1}(x) + xJ_{n-1}(x)-1)$.*

(iii) *For every odd $n \geq 5$, $\mathcal{I}(W_n) = \mathcal{J}(I(W_n,x)-1) = \mathcal{J}(J_n(x) + xJ_{n-2}(x) + x - 1)$. Also $\mathcal{I}(W_{3n+1}) = \mathcal{J}(I(W_{3n+1},x)-1) = \mathcal{J}(J_{3n+1}(x) + xJ_{3n-1}(x) + x - 1)$*

```
Attract := proc(f,z,N)
local A,w,r,xx,yy,OldRts,NewRts,pts,i,j,n,symb:
n := degree(f):
A := table():
pts := NULL:
OldRts := [op({fsolve(f,x,complex)} minus {z})]:
pts := pts,[Re(z),Im(z)],op(map([Re,Im],OldRts)):
while nops(OldRts) > 0 do
NewRts := NULL:
for i from 1 to nops(OldRts) do
w := [fsolve(f-OldRts[i],x,complex)]:
for j from 1 to n do
r := w[j]:
xx := ceil(N*(Re(r))):
yy := ceil(N*(Im(r))):
if A[xx,yy]<>1 then
A[xx,yy] := 1:
NewRts := NewRts,r:
pts := pts,[Re(r),Im(r)]:
fi:
od:
od:
OldRts := [NewRts]:
od:
pts := [pts]:
symb := cross:
for i from 1 to min(nops(pts),20) do
if pts[i][2] <> 0 then
symb := point:
```

```
i := min(nops(pts),20):
fi:
od:
if symb=point then
print('Points calculated.  Plotting...'):
else
print('Attractor is Real.  Plotting...'):
fi:
plot(pts,style=point,symbol=symb,colour=black,scaling=constrained);
end;
```

Theorem *Let f be a polynomial of degree at least two.*

(i) *Its Julia set $\mathcal{J}(f)$ is connected if and only if the forward orbit of each of its critical points is bounded in $(\mathcal{C}, |.|)$.*

(ii) *Its Julia set $\mathcal{J}(f)$ is totally disconnected if (but not only if) the forward orbit of each of its critical points is unbounded in $(\mathcal{C}, |.|)$.*

J Appl Math Comput (2011) 36: 89–100
DOI 10.1007/s12190-010-0389-4

JAMC

Independence roots and independence fractals of certain graphs

Saeid Alikhani · Yee-hock Peng

Received: 2 June 2009 / Published online: 21 March 2010

Abstract The independence polynomial of a graph G is the polynomial $\sum i_k x^k$, where i_k denote the number of independent sets of cardinality k in G. In this paper, we obtain the relationships between the independence polynomial of path P_n and cycle C_n with Jacobsthal polynomial. We find all roots of Jacobsthal polynomial. As a consequence, the roots of independence polynomial of the family $\{P_n\}$ and $\{C_n\}$ are real and dense in $(-\infty, -\frac{1}{4}]$. Also we investigate the independence fractals or independence attractors of paths, cycles, wheels and certain trees.

Keywords Jacobsthal polynomial · Independence polynomial · Independence fractal · Julia set

Mathematics Subject Classification (2000) Primary 05C31 · Secondary 05C69

Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2021) 44:55–78
https://doi.org/10.1007/s40840-020-00936-5

BULLETIN of the
MALAYSIAN MATHEMATICAL
SCIENCES SOCIETY

Graphs Whose Independence Fractals are Line Segments

Sasmita Barik[1] · Tarakanta Nayak[1] · Ankit Pradhan[2]

Received: 26 November 2019 / Revised: 17 March 2020 / Published online: 30 April 2020

Abstract
Let G be a simple graph. By an independent set in G, we mean a set of pairwise non-adjacent vertices in G. The independence polynomial of G is defined as $I_G(z) = i_0 + i_1 z + i_2 z^2 + \cdots + i_\alpha z^\alpha$, where $i_m = i_m(G)$ is the number of independent sets in G with cardinality m and $\alpha = \alpha(G)$ denotes the cardinality of a largest independent set in G (known as the independence number of G). Let G^k denote the k-times lexicographic product of G with itself. The set of roots of I_{G^k} is known to converge as k tends to ∞, with respect to the Hausdorff metric, and the limiting set is known as the independence attractor. The independence fractal of a graph is the limiting set of roots of the reduced independence polynomial $I_{G^k} - 1$ of G^k as k tends to ∞. In this article, we consider the independence fractals of graphs with independence number 3. We attempt to find all such graphs whose independence fractal is a line segment. It is shown that the independence fractal and the independence attractor coincide when the earlier is a line segment. The line segment turns out to be an interval $[-\frac{4}{k}, 0]$ for $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. It is found that each of these graphs have 9 vertices and there are exactly 13 such disconnected graphs. We show that there does not exist any connected graph for $k = 4$. For $k = 1$, there are 17 such connected graphs and for $k = 2, 3$ the number is quite large.

Keywords Independence polynomials · Independence fractals · Line segments · Graphs

Definition (Alikhani & Peng, 2008)

The domination polynomial of a graph G of order n is the polynomial

$$D(G,x) = \sum_{i=\gamma(G)}^{n} d(G,i)x^i,$$

where $d(G,i)$ is the number of dominating sets of G of size i, and $\gamma(G)$ is the domination number of G.

Example

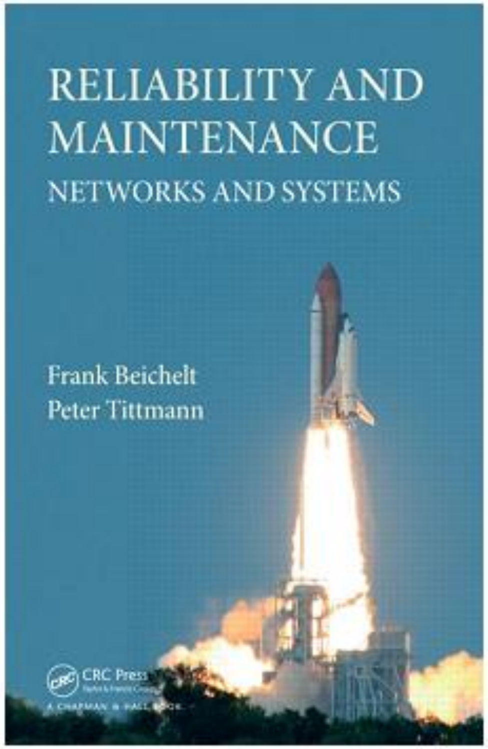
The path P_4 on 4 vertices, for example, has one dominating set of cardinality 4, four dominating sets of cardinalities 3 and 2; its domination polynomial is then $D(P_4, x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2$.

Example

As another example, it is easy to see that, for every $n \in \mathbb{N}$, $D(K_n, x) = (1 + x)^n - 1$.

Applications

Domination reliability is a network reliability measure for some particular kind of service networks, which related to the domination polynomial of a graph.



به یاد مرحوم استاد دکتر اشرفی

- من از خدا که تورا آفرید ممنونم   ازآنکه روح به جسمت دمید ممنونم

- Thanks for your attention!

Saeid Alikhani