اتحادهای دترمینانی و قضیه کوشی-بنه

چکیده: مفهوم دترمینان یکی از مفاهیم اساسی در ریاضیات است که کاربردهای فراوانی در شاخه‌های مختلف ریاضیات و سایر علوم پایه دارد. از نظرتاریخی، ریاضی‌دانان بزرگی مانند لایب‌نیتز، کرامر، لاپلاس، لاگرانژ، گاوس، بنه، کوشی و سیلوستر سهم هایی در توسعه نظریه دترمینان‌ها داشته اند. در این جلسه، پس از یادآوری تعریف دترمینان با مروری بر برخی از ویژگی‌های آن و ارتباط آن با نظریه ماتریس‌ها، چند «اتحاد دترمینانی» به ویژه دستور کوشی-بنه مورد بحث قرار می‌گیرد. سپس، کاربردی از دستور کوشی-بنه برای محاسبه تعداد درخت‌های فراگیر یک گراف همبند بیان می شود. به ویژه، نتیجه می‌شود تعداد درخت‌های فراگیر یک گراف کامل p راسی برابر است با p^{p-2}. بخش قابل توجهی از مطالب مقدماتی خواهد بود.

یادآوری دترمینان: دترمینان ۲ در ۲ را می‌شناسیم

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \mathrm{ad} - \mathrm{bc}$$

دترمینان ۳ در ۳ کمی غیر طبیعی به نظر می‌رسد

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \mathrm{aei} + \mathrm{bfg} + \mathrm{cdh} - \mathrm{ceg} - \mathrm{afh} - \mathrm{bdi}$$

که مثلاً با قاعده ساروس برابر است با جمع حاصل‌ضرب‌های درایه های قطرهای چپ به راست با علامت مثبت، و حاصل‌ضرب‌های درایه های قطرهای راست به چپ با علامت منفی:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{bmatrix}$$

اگر همه علامت ها را مثبت بگیریم مفهومی به‌دست می‌آید که پرمننت (permanent) نام دارد ولی اهمیت چندانی ندارد.

در واقع مفهوم دترمینان یک مفهوم کلیدی طبیعی در ریاضیات است مثل مفهوم مساحت یک شکل هندسی.

مثلاً در دستگاه دو معادله خطی دو مجهولی

$$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

$$x = \frac{ud - vb}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{bv - du}{ad - bc} = \frac{\begin{vmatrix} b & u \\ d & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

دستگاه بالا یک و تنها یک جواب دارد اگر و تنها اگر

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

این ویژگی برای دستگاه سه معادله خطی سه مجهولی هم برقرار است و حتی در حالت کلی.

برای تعریف دترمینان n در n روش‌های مختلفی وجود دارد مانند روش لایب‌نیتز، روش گاوس، روش لاپلاس، ...

برای بیان روش لاپلاس بهتر است از مفهوم ماتریس استفاده کنیم.

تعریف: یک ماتریس m در n جدولی است m سطری و n ستونی از اعداد حقیقی

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}, 1\leq i \leq m, 1 \leq j \leq n) = (a_{ij})$$

برای m=n، A را یک ماتریس مربع گویند.

روش لاپلاس: دترمینان یک ماتریس مربع n در n مانند $A= (a_{ij})$ را به صورت استقرایی تعیین می کند:

(بسط دترمینان نسبت به سطر i ام)

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\, a_{ij}\, M_{ij}$$

و یا (بسط دترمینان نسبت به ستون j ام)

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\, a_{ij}\, M_{ij}$$

که در آن M_{ij} دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A به‌دست می‌آید.

مثلاً

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

ویژگی‌های مشخصه دترمینان:

۱.**حفظ همانی:** برای ماتریس همانی n در n

$$\det(I_n) = \det\begin{bmatrix} 1 \ldots & \ldots 0 \ldots & 0 \\ 0 \ldots & 1 & 0 \\ 0 \ldots & \ldots 0 \ldots & 1 \end{bmatrix} = 1$$

۲. **چند خطی بودن:**اگر ستون j ام ماتریس A را با C_j نمایش دهیم، برای

هر عدد حقیقی r و ماتریس‌های ستونی C و D داریم:

$$\det [C_1 \quad C_{j-1} \ \ C_j= rC+D \ \ C_{j+1} \quad C_n] =$$

$$r.\det [C_1 \quad C_{j-1} \ \ C \ \ C_{j+1} \quad C_n]+ \det [C_1 \quad C_{j-1} \ \ D \ \ C_{j+1} \quad C_n]$$

۳.**ویژگی تناوب:** اگر دو ستون ماتریس A مساوی باشند آنگاه

$$\det(A) = 0.$$

این سه ویژگی مقدار دترمینان را به طور یکتا مشخص می‌کنند و سایر

ویژگی‌ها از آنها نتیجه می‌شود:

- با جابه‌جایی دو ستون دترمینان مقدار آن تغییر علامت می دهد.
- برای عددحقیقی r، با اضافه کردن r برابر ستون k ام یک دترمینان به ستون j ام آن، مقدار دترمینان تغییر نمی‌کند.
- مشابه این ویژگی‌ها برای سطرها هم برقرار است.

کار برد اولیه دترمینان در دستگاه معادله های خطی است.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن‌که دستگاه n معادله خطی n مجهولی

$$\begin{cases} a_{11}x_1+ a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+ a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+ a_{n2}x_2+ \quad +a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

دارای جواب یکتا باشد این است که دترمینان **ماتریس ضرایب** آن $A=(a_{ij})$ ناصفر باشد. در صورت ناصفر بودن دترمینان ماتریس ضرایب جواب x_i مثل حالت دستگاه دو معادله خطی دو مجهولی به‌دست می‌آید.

به‌علاوه، شرط لازم و کافی برای آن‌که دستگاه n معادله خطی n مجهولی همگن (یعنی با $b_1 = b_2=\ldots= b_n= 0$) دارای جواب ناصفر باشد این است که دترمینان **ماتریس ضرایب** آن $A=(a_{ij})$ صفر باشد.

مفهوم دترمینان کاربردهای فراوان دیگری دارد. برای بیان برخی از آنها، به جمع و ضرب ماتریس‌ها نیاز داریم.

جمع و ضرب ماتریس ها:

برای دو ماتریس m در n مانند $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$

$$A+B = (a_{ij} + b_{ij})$$

اگر $A=(a_{ij})$ یک ماتریس m در n و $B=(b_{ij})$ یک ماتریس n در m باشد

A.B یک ماتریس m در m است که

$$A.B = (c_{ij}), \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

در حالت کلی حتی در مورد ماتریس‌های مربع $A.B \neq B.A$.

مجموعه ماتریس‌های مربع تشکیل یک حلقه می دهند که نقش مهمی در نظریه حلقه‌ها دارد مثل قضیه ودربرن و قضیه ودربرن-آرتین.

چند اتحاد دترمینانی:

۱ – اگر A و B دو ماتریس مربع باشند

$$\det(A.B) = \det(B.A) = \det(A).\det(B)$$

۲ – **قضیه سیلوستر**: اگر A ماتریس m در n ، B ماتریس n در m و I_m و I_n به ترتیب ماتریس های همانی m در m و n در n باشند

$$\det(I_m + A.B) = \det(I_n + B.A)$$

برهان!:

$$\det\begin{bmatrix} I & -B \\ A & I \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} I & B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I & 0 \\ A & AB + I \end{bmatrix} = \det(I_m + A.B)$$

از طرف دیگر

$$\det\begin{bmatrix} I & -B \\ A & I \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} I & B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I & B \\ 0 & I \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} I & -B \\ A & I \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} I + BA & 0 \\ A & I \end{bmatrix} = \det(I_n + B.A)$$

۳ ـ**جایگشت درایه‌ای در سطر یا ستون** (2002,--) : فرض کنید T یک جایگشت $\{1, 2, \ldots, n\}$ است یعنی یک نگاشتی دو سویی از $\{1, 2, \ldots, n\}$ در $\{1, 2, \ldots, n\}$. برای ماتریس سطری

$$L = [x_1 \quad x_2 \ \ldots \ x_n]$$

قرار می‌دهیم

$$T(L) = [x_{T(1)} \quad x_{T(2)} \ \ldots \ x_{T(n)}]$$

تعداد عضوهای $\{1, 2, \ldots, n\}$ که تحت T ثابت می‌مانند را با fix(T) نمایش می‌دهیم.

اگر L_i سطر i ام ماتریس M باشد و M_i ماتریس حاصل از M با جایگزینی سطر i ام M با $T(L_i)$ (بدون تغییر سایر سطرها) باشد آنگاه

$$\det(M_1) + \det(M_2) + \ldots + \det(M_n) = \mathrm{fix}(T).\det(M)$$

به ویژه، اگر $\mathrm{fix}(T)=0$ باشد آنگاه جمع بالا صفر است.

مشابه اتحاد بالا برای سطر ها به جای ستون‌ها نیز برقرار است.

مثال: $M=\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ، T=(1 2 3) ، داریم fix(T)=0 پس

$$\det\begin{bmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 8 & 9 & 6 \end{bmatrix} = 0.$$

۳ – قضیه کوشی-بنه که تعمیم دستور

$$\det (A.B) = \det (A). \det (B)$$

است.

یک حالت ساده:

$$A = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 \\ & & \\ b1 & b2 & b3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} c1 & d1 \\ c2 & d2 \\ c3 & d3 \end{bmatrix}$$

$$\det (A.B) = \begin{vmatrix} a1 & a2 \\ b1 & b2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} c1 & d1 \\ c2 & d2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a1 & a3 \\ b1 & b3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} c1 & d1 \\ c3 & d3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a2 & a3 \\ b2 & b3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} c2 & d2 \\ c3 & d3 \end{vmatrix}$$

قضیه کوشی-بنه: فرض کنید A یک ماتریس m در n و B یک ماتریس n در m است

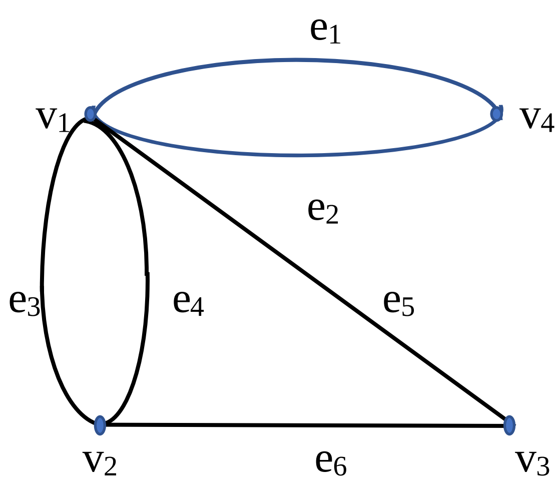
- اگر $m > n$ آنگاه $\det(AB) = 0$
- اگر $m \leq n$ آنگاه

$$\det(AB) = \sum_S \det(A[S]) \,.\, \det(B[S])$$

که در این مجموع، S همه زیر مجموعه های m عضوی $\{1,2,\ldots,n\}$ را می‌پیماید و $A[S]$ دترمینان ماتریس حاصل از ستون‌های A با اندیس در S است و $B[S]$ د ترمینان ماتریس حاصل از سطرهای B با اندیس در S.

کاربردی از قضیه کوشی-بنه در نظریه گراف

تعریف : یک گراف G با p راس و q یال عبارت است از مجموعه‌های $V=\{ v_1, v_2, \ldots, v_p \}$ از راس‌ها و $E=\{ e_1, e_2, \ldots, e_q \}$ از یال‌ها.



شکل ۱

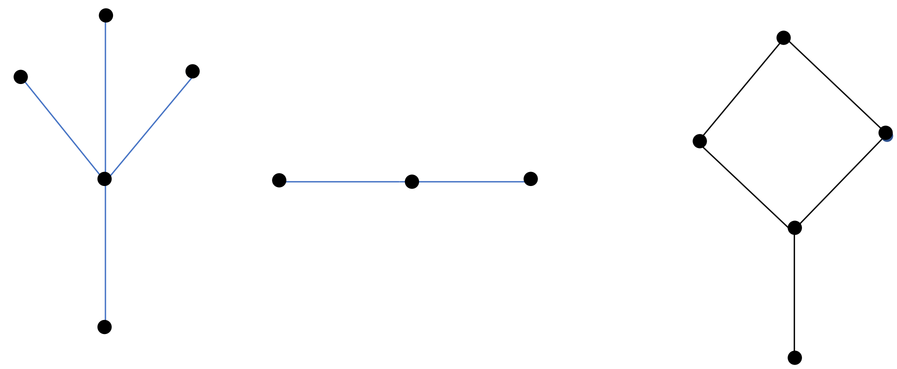
تعداد یال‌ها با راس v_i = درجه راس v_i = $\deg (v_i)$

مثلاً در گراف بالا

$$\deg (v_1) = 5$$

$$\deg (v_3) = 2$$

تعریف. گراف G با p راس را یک **درخت** گوییم هرگاه همبند باشد و p-1 یال داشته باشد (به ویژه، نمی‌تواند دور داشته باشد)

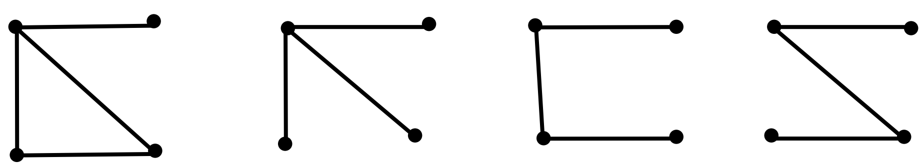


درخت نیست   درخت   درخت

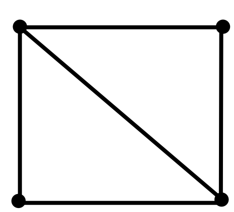
تعریف: برای گراف داده شده G ، یک درخت فراگیر G درختی است با همان راس‌های G که یال‌های آن متعلق به یال‌های G باشد.

مثال: گراف G زیرسه درخت فراگیر دارد.

G:



گراف زیر ۸ درخت فراگیر دارد:



یکی از سئوالات مهم در نظریه گراف تعیین تعداد درخت های فراگیر یک گراف داده شده G است که آنرا با κ (G) نمایش می‌دهند.

مثلاً اگر K_p گراف کامل p راسی باشد (یعنی بین هر دو راس یک و فقط یک یال وجود دارد)، آنگاه

$$\kappa(K_1) = 1, \quad \kappa(K_2) = 1, \quad \kappa(K_3) = 3, \quad \kappa(K_4) = 16,$$

$$\kappa(K_5) = 125$$

قضیه «ماتریس-درخت» تعداد درخت‌های یک گراف همبند *بدون طوقه* G را برحسب یک دترمینان به‌دست می‌دهد.

تعریف: برای گراف G با p راس، **ماتریس لاپلاسی** G ، $L(G) = (L_{ij})$، چنین تعریف می شود:

$$\begin{cases} L_{ij} = -m_{ij} & \text{اگر } i \neq j \text{ و تعداد یال‌ها بین } v_i \text{ و } v_j \text{ برابر } m_{ij} \text{ باشد} \\ L_{ii} = \deg(v_i) \end{cases}$$

که ماتریسی متقارن است.

مثال: ماتریس لاپلاسی گراف G شکل ۱ :

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

قضیه ماتریس-درخت (Matrix-Tree Theorem) : فرض کنید G یک گراف همبند بدون طوقه و $L(G)= (L_{ij})$ ماتریس لاپلاسی آن است. اگر L_0 ماتریس حاصل از حذف سطر آخر و ستون آخر $L(G)$ باشد آنگاه

$$\kappa(G) = \det (L_0)$$

قضیه کوشی-بنه در برهان قضیه ماتریس-درخت به‌کار می‌رود. البته برهان‌های دیگری هم وجود دارد.

مثال ۱: تعداد درخت های فراگیر ماتریس G شکل ۱ برابر است با

$$\det\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 10$$

مثال ۲: تعداد درخت های فراگیر ماتریس کامل K_5 برابر است با

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

که برابر است با ۱۲۵.

به طور کلی برای گراف کامل p راسی K_p داریم

$$\kappa(K_p) = p^{p-2}$$

که برهان آن به جبر خطی بیشتر یا روش‌های ترکیبیاتی پیشرفته‌تر نیاز دارد.

کتاب آقای ریچارد استنلی

Richard Stanley, Albebraic Combinatorics, Springer, 2018.

مرجع بسیار خوبی در مورد مطالب مربوط به نظریه گراف، قضیه کوشی-بنه و قضیه ماتریس-درخت است.

با تشکر