تعامد و توصیف فضاهای ضرب داخلی

دکتر جمال روئین

دانشکده ریاضی
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان (IASBS)، زنجان، ایران

۱۰ بهمن ۱۴۰۲

فهرست

قرارداد

در سرتاسر این سخنرانی فرض می‌کنیم X یک فضای نرمدار روی میدان اعداد حقیقی باشد.

تعامد در فضاهای نرمدار

تعریف

رابطه دوتایی $\perp$ در فضای نرمدار X را یک تعامد در X گوییم هرگاه در صورتیکه X یک فضای ضرب داخلی باشد،

$$x \perp y \Longleftrightarrow < x, y >= \circ.$$

تعامد فیثاغورثی

در فضای نرمدار X گوییم x متعامد فیثاغورثی به y است و می نویسیم $y \perp_P x$ اگر

$$\|x-y\|^۲ = \|x\|^۲ + \|y\|^۲.$$

خوش تعریفی تعامد فیثاغورثی

در یک فضای ضرب داخلی،

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\iff \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x,y >= \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\iff < x,y >= 0.$$

تعامد متساوی الساقین

در فضای نرمدار X گوییم x متعامد متساوی الساقین به y است و می نویسیم $x \perp_I y$ هرگاه

$$\|x+y\| = \|x-y\|.$$

خوش تعریفی تعامد متساوی الساقین

در یک فضای ضرب داخلی،

$$\|x+y\| = \|x-y\|$$

$$\Longleftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x-y\|^2$$

$$\Longleftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > \\ = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 < x, y >$$

$$\Longleftrightarrow 4 < x, y > = 0$$

$$\Longleftrightarrow < x, y > = 0.$$

تعامد بیرکف

در فضای نرمدار X، گوییم x عمود بیرکف به y است و می نویسیم $x \perp_B y$ هرگاه به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$،

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

خوش تعریفی تعامد بیرکف

در یک فضای ضرب داخلی،

$$
\begin{aligned}
&\|x+\lambda y\| \geq \|x\| \\
&\Longleftrightarrow \|x+\lambda y\|^2 \geq \|x\|^2 \\
&\Longleftrightarrow \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda < x, y > \geq \|x\|^2 \\
&\Longrightarrow \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda < x, y > \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} < x, y > \leq -\frac{\lambda}{2}\|y\|^2 & (\lambda < 0) \\ < x, y > \geq -\frac{\lambda}{2}\|y\|^2 & (\lambda > 0) \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} < x, y > \leq \lim_{\lambda \to 0^-}(-\frac{\lambda}{2}\|y\|^2) = 0 \\ < x, y > \geq \lim_{\lambda \to 0^+}(-\frac{\lambda}{2}\|y\|^2) = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow < x, y > = 0.
\end{aligned}
$$

α – تعامد

فرض کنیم $\alpha \neq ۱$. در فضای نرمدار X گوییم x، αـمتعامد به y است و می نویسیم $x \perp y(\alpha)$ هرگاه

$$(۱+\alpha^۲)\|x-y\|^۲ = \|x-\alpha y\|^۲ + \|y-\alpha x\|^۲.$$

خوش تعریفی α − تعامد

در یک فضای ضرب داخلی،

$$(1+\alpha^2)\|x-y\|^2 = \|x-\alpha y\|^2 + \|y-\alpha x\|^2$$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow (1+\alpha^2)\big(\|x\|^2+\|y\|^2-2<x,y>\big)\\ = \|x\|^2+\alpha^2\|y\|^2-2\alpha<x,y>+\|y\|^2+\alpha^2\|x\|^2-2\alpha<y,x>\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow -2(1+\alpha^2)<x,y> = -4\alpha<x,y>$$

$$\Longleftrightarrow (1-\alpha)^2<x,y> = 0$$

$$\Longleftrightarrow <x,y> = 0.$$

تعامد سینگر یا Sـتعامد

در فضای نرمدار X گوییم x متعامد سینگر به y است و می نویسیم $x \perp_S y$، هرگاه $\|x\|\|y\| = 0$ یا

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|.$$

خوش تعریفی تعامد سینگر

در یک فضای ضرب داخلی اگر $x \neq ۰$ و $y \neq ۰$، آنگاه

$$\begin{aligned} x \perp_S y &\Longleftrightarrow \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|^۲ = \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|^۲ \\ &\Longleftrightarrow ۲ + \frac{۲ < x, y >}{\|x\|\|y\|} = ۲ - \frac{۲ < x, y >}{\|x\|\|y\|} \\ &\Longleftrightarrow \frac{۴ < x, y >}{\|x\|\|y\|} = ۰ \\ &\Longleftrightarrow < x, y > = ۰. \end{aligned}$$

اگر $x = ۰$ یا $y = ۰$، آنگاه

$$x \perp_S y \Longleftrightarrow < x, y > = ۰$$

زیرا طرفین گزاره دوشرطی فوق صحیح می باشند.

S'ـ تعامد

در فضای نرمدار X گوییم x متعامد S' به y است و می نویسیم $x \perp_{S'} y$، هرگاه

$$\left\| \frac{x}{1+\|x\|} + \frac{y}{1+\|y\|} \right\| = \left\| \frac{x}{1+\|x\|} - \frac{y}{1+\|y\|} \right\|.$$

S''ـتعامد

در فضای نرمدار X گوییم x متعامد S'' به y است و می نویسیم $x \perp_{S'} y$، هرگاه

$$\left\| \frac{\|x\|}{1+\|x\|}x + \frac{\|y\|}{1+\|y\|}y \right\| = \left\| \frac{\|x\|}{1+\|x\|}x - \frac{\|y\|}{1+\|y\|}y \right\|.$$

تعامد فاصله pـزاویه ای

فرض کنیم $p \in \mathbb{R}$. در فضای نرمدار X گوییم x بطور فاصله pـزاویه ای به y متعامد است و می نویسیم $x \perp_A^p y$، هرگاه $\|x\|\|y\| = ۰$ یا

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^{۱-p}} + \frac{y}{\|y\|^{۱-p}} \right\| = \left\| \frac{x}{\|x\|^{۱-p}} - \frac{y}{\|y\|^{۱-p}} \right\|.$$

خواص مهم تعامد

ناتباهی

اگر $x \perp x$، آنگاه $x = 0$.

ناتباهی

اگر $x \perp x$، آنگاه $x = 0$.

پیوستگی

اگر $\{x_i\}$ و $\{y_i\}$ دنباله‌هایی باشند که $x = \lim_{i\to\infty} x_i$ و $y = \lim_{i\to\infty} y_i$، و به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $x_i \perp y_i$، آنگاه $x \perp y$.

ناتباهی

اگر $x \perp x$، آنگاه $x = 0$.

پیوستگی

اگر $\{x_i\}$ و $\{y_i\}$ دنباله‌هایی باشند که $x = \lim_{i\to\infty} x_i$ و $y = \lim_{i\to\infty} y_i$، و به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $x_i \perp y_i$، آنگاه $x \perp y$.

ساده کردن

اگر $x \perp y$، آنگاه به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $\lambda x \perp \lambda y$.

ناتباهی

اگر $x \perp x$، آنگاه $x = ۰$.

پیوستگی

اگر $\{x_i\}$ و $\{y_i\}$ دنباله‌هایی باشند که $x = \lim_{i\to\infty} x_i$ و $y = \lim_{i\to\infty} y_i$، و به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $x_i \perp y_i$، آنگاه $x \perp y$.

ساده کردن

اگر $x \perp y$، آنگاه به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $\lambda x \perp \lambda y$.

همگنی

اگر $x \perp y$، آنگاه به ازای هر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$، $\lambda x \perp \mu y$.

تقارن

اگر $y \perp x$، آنگاه $x \perp y$.

تقارن

اگر $y \perp x$، $x \perp y$ آنگاه.

جمع پذیری راست (متناظرا چپ)

اگر $y \perp x$ و $z \perp x$ (متناظرا $x \perp y$ و $x \perp z$) آنگاه $y+z \perp x$ (متناظرا $x \perp y+z$).

تقارن

اگر $y \perp x$، آنگاه $x \perp y$.

جمع پذیری راست (متناظرا چپ)

اگر $y \perp x$ و $z \perp x$ (متناظرا $x \perp y$ و $x \perp z$) آنگاه $y + z \perp x$ (متناظرا $x \perp y + z$).

α–وجود راست (متناظرا چپ)

برای هر $x, y \in X$، عدد حقیقی α هست که $y + \alpha x \perp x$ (متناظرا $x \perp \alpha x + y$).

تقارن

اگر $y \perp x$، آنگاه $x \perp y$.

جمع پذیری راست (متناظرا چپ)

اگر $y \perp x$ و $z \perp x$ (متناظرا $x \perp y$ و $x \perp z$) آنگاه $y + z \perp x$ (متناظرا $x \perp y + z$).

αـوجود راست (متناظرا چپ)

برای هر $x, y \in X$، عدد حقیقی α هست که $x \perp \alpha x + y$ (متناظرا $\alpha x + y \perp x$).

αـیگانگی راست (متناظرا چپ)

برای هر $x, y \in X$ که $x \neq 0$، حداکثر یک عدد حقیقی α هست که $x \perp \alpha x + y$ (متناظرا $\alpha x + y \perp x$).

برآورد α در خاصیت α-وجود

برآورد α در تعامد سینگر

اگر در یک فضای نرمدار $\|x\| = \|y\| = ۱$ و $\alpha x + y \perp_S x$، آنگاه

$$|\alpha| \leq \frac{۱ + \sqrt{۲}}{۲}.$$

برآورد α در S'ـتعامد

اگر در یک فضای نرمدار $\|x\| = \|y\| = ۱$ و $\alpha x + y \perp_{S'} x$، آنگاه

$$|\alpha| \leq \frac{۲ + ۴\sqrt{۲}}{۷}.$$

برآورد α در S''ـتعامد

اگر در یک فضای نرمدار $\|x\| = \|y\| = ۱$ و $\alpha x + y \perp_{S''} x$، آنگاه

$$|\alpha| \leq \frac{۳}{۲}.$$

توصیف فضاهای ضرب داخلی

توصیف فضاهای ضرب داخلی

هر گزاره صحیح بین اعضای یک فضای ضرب داخلی که با فرض برقرار بودن آن در یک فضای نرمدار آنرا به یک فضای ضرب داخلی تبدیل کند، یک توصیف فضاهای ضرب داخلی نامیده می شود.

توصیف متوازی الاضلاع

فضای نرمدار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر به ازای هر $x, y \in X$،

$$\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲\|x\|^۲ + ۲\|y\|^۲.$$

تساوی متوازی الاضلاع در فضاهای ضرب داخلی

در یک فضای ضرب داخلی داریم

$$\begin{aligned}\|x+y\|^{۲}+\|x-y\|^{۲} &=< x+y, x+y > + < x-y, x-y > \\ &= \|x\|^{۲} + < x, y > + < y, x > + \|y\|^{۲} \\ &+ \|x\|^{۲} - < x, y > - < y, x > + \|y\|^{۲} \\ &= ۲\|x\|^{۲} + ۲\|y\|^{۲}.\end{aligned}$$

توصیف لورچ

فضای نرمدار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر به ازای هر $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ و هر $x, y \in X$ اگر $\|y\| = \|x\|$ آنگاه

$$\|\lambda x + \lambda^{-1} y\| \geq \|x + y\|.$$

نامساوی لورچ در فضاهای ضرب داخلی

اگر $\|y\| = \|x\|$ و $\lambda \neq 0$، آنگاه در یک فضای ضرب داخلی داریم

$$\|\lambda x + \lambda^{-1} y\| \geq \|x + y\|$$

$$\iff \|\lambda x + \lambda^{-1} y\|^2 \geq \|x + y\|^2$$

$$\iff \lambda^2 \|x\|^2 + \lambda^{-2} \|y\|^2 + 2 < x, y > \geq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >$$

$$\iff (\lambda^2 - 1)\|x\|^2 - \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2}\|y\|^2 \geq 0$$

$$\iff \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{\lambda^2}\|x\|^2 \geq 0.$$

توصیف دانکل-ویلیامز

فضای نرمدار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر به ازای هر دو بردار ناصفر $x, y \in X$،

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{۲\|x - y\|}{\|x\| + \|y\|}.$$

نامساوی دانکل–ویلیامز در فضاهای ضرب داخلی

در یک فضای ضرب داخلی،

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \frac{۲\|x-y\|}{\|x\| + \|y\|}$$

$$\iff \|x-y\|^{۲} - \left(\frac{\|x\| + \|y\|}{۲} \right)^{۲} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^{۲} \geq ۰$$

$$\iff \|x-y\|^{۲} - \frac{(\|x\| + \|y\|)^{۲}}{۴\|x\|\|y\|} \left[\|x-y\|^{۲} - (\|x\| - \|y\|)^{۲} \right] \geq ۰$$

$$\iff \frac{(\|x\| - \|y\|)^{۲}}{۴\|x\|\|y\|} \left[(\|x\| + \|y\|)^{۲} - \|x-y\|^{۲} \right] \geq ۰.$$

توصیف بطلمیوسی

فضای نرمدار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر به ازای هر $x, y, z \in X$،

$$\|z\|\|x-y\| \leq \|y\|\|x-z\| + \|x\|\|y-z\|.$$

نامساوی بطلمیوس در فضاهای ضرب داخلی

در یک فضای ضرب داخلی اگر یکی از بردارهای x، y، z صفر باشد، آنگاه نامساوی بطلمیوس بدیهی است. فرض کنیم x، y و z ناصفر باشند. قرار می دهیم $x' = \frac{x}{\|x\|^۲}$، $y' = \frac{y}{\|y\|^۲}$ و $z' = \frac{z}{\|z\|^۲}$. داریم

$$\|x' - y'\|^۲ = \left\|\frac{x}{\|x\|^۲} - \frac{y}{\|y\|^۲}\right\|^۲ = \frac{۱}{\|x\|^۲} + \frac{۱}{\|y\|^۲} - ۲\frac{< x, y >}{\|x\|^۲\|y\|^۲}$$
$$= \frac{\|x\|^۲ + \|y\|^۲ - ۲ < x, y >}{\|x\|^۲\|y\|^۲} = \frac{\|x - y\|^۲}{\|x\|^۲\|y\|^۲}.$$

حال با توجه به نامساوی مثلثی $\|x' - y'\| \leq \|x' - z'\| + \|z' - y'\|$ خواهیم داشت

$$\frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|} \leq \frac{\|x - z\|}{\|x\|\|z\|} + \frac{\|y - z\|}{\|y\|\|z\|}.$$

از اینجا حکم بدست می آید.

توصیف فاصله زاویه ای (H. Dehghan)

فضای نرمدار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر به ازای هر $x, y \in X \setminus \{0\}$،

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \left\| \frac{x}{\|y\|} - \frac{y}{\|x\|} \right\|.$$

در یک فضای ضرب داخلی،

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\| \leq \left\|\frac{x}{\|y\|}-\frac{y}{\|x\|}\right\|$$

$$\Longleftrightarrow \left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|^{۲} \leq \left\|\frac{x}{\|y\|}-\frac{y}{\|x\|}\right\|^{۲}$$

$$\Longleftrightarrow ۲-\frac{۲<x,y>}{\|x\|\|y\|} \leq \frac{\|x\|^{۲}}{\|y\|^{۲}}+\frac{\|y\|^{۲}}{\|x\|^{۲}}-\frac{۲<x,y>}{\|x\|\|y\|}$$

$$\Longleftrightarrow ۰ \leq \left(\frac{\|x\|}{\|y\|}-\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{۲}.$$

توصیف pـفاصله زاویه ای

فرض کنیم $p < ۱$ ($p > ۱$). در اینصورت فضای نرمدار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر به ازای هر $x, y \in X \setminus \{۰\}$،

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^{۱-p}} - \frac{y}{\|y\|^{۱-p}} \right\| \leq (\geq) \left\| \frac{x}{\|y\|^{۱-p}} - \frac{y}{\|x\|^{۱-p}} \right\|.$$

فرض کنیم ۱ $p < ۱$ ($p > ۱$). در یک فضای ضرب داخلی، داریم

$$\left\|\frac{x}{\|x\|^{۱-p}} - \frac{y}{\|y\|^{۱-p}}\right\|^{۲} - \left\|\frac{x}{\|y\|^{۱-p}} - \frac{y}{\|x\|^{۱-p}}\right\|^{۲}$$

$$= \left(\|x\|^{۲} - \|y\|^{۲}\right)\left(\|x\|^{۲p-۲} - \|y\|^{۲p-۲}\right) \leq ۰ (\geq ۰).$$

توصیف مشابه اول فاصله زاویه ای

فضای نرمدار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر به ازای هر $x, y \in X$،

$$\left\| \frac{x}{۱ + \|x\|} - \frac{y}{۱ + \|y\|} \right\| \leq \left\| \frac{x}{۱ + \|y\|} - \frac{y}{۱ + \|x\|} \right\|.$$

در یک فضای ضرب داخلی،

$$\left\| \frac{x}{1+\|x\|} - \frac{y}{1+\|y\|} \right\| \leq \left\| \frac{x}{1+\|y\|} - \frac{y}{1+\|x\|} \right\|$$

$$\iff \quad \frac{\left(\|x\|-\|y\|\right)^{2}\left(\|x\|+\|y\|\right)\left(2+\|x\|+\|y\|\right)}{\left(1+\|x\|\right)^{2}\left(1+\|y\|\right)^{2}} \geq 0.$$

توصیف مشابه دوم فاصله زاویه ای

فضای نرمدار X یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر به ازای هر $x, y \in X$،

$$\left\| \frac{\|x\|x}{۱ + \|x\|} - \frac{\|y\|y}{۱ + \|y\|} \right\| \leq \left\| \frac{\|y\|x}{۱ + \|y\|} - \frac{\|x\|y}{۱ + \|x\|} \right\|.$$

در یک فضای ضرب داخلی، داریم

$$\left\|\frac{\|y\|x}{۱+\|y\|}-\frac{\|x\|y}{۱+\|x\|}\right\| \leq \left\|\frac{\|x\|y}{۱+\|x\|}-\frac{\|y\|y}{۱+\|y\|}\right\|$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\left(\|x\|-\|y\|\right)^{۲}\left(\|x\|+\|y\|\right)\left(\|x\|+\|y\|+۲\|x\|\|y\|\right)}{\left(۱+\|x\|\right)^{۲}\left(۱+\|y\|\right)^{۲}} \geq ۰.$$

ارتباط بین تعامد و توصیف فضاهای ضرب داخلی

R. C. James

فضای نرمدار X با بعد حداقل ۳، یک فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر تعامد بیرکف در آن متقارن باشد.

J. Alonso

اگر در یک فضای نرمدار X،

$$\|x\| = \|y\| = ۱ \quad \Longrightarrow \quad x + y \perp_S x - y$$

آنگاه X یک فضای ضرب داخلی است.

O. P. Kapoor, S. B. Mathur

اگر در یک فضای نرمدار X

$$\|x\| = \|y\| = ١ \;,\; x \perp_I y \implies x \perp_B y$$

آنگاه X یک فضای ضرب داخلی است.

J. Rooin, S. Rajabi, and M. S. Moslehian

فرض کنیم $p \in \mathbb{R}$، در اینصورت احکام زیر معادل اند:

(i) X یک فضای ضرب داخلی است.

(ii) تعامد فاصله p–زاویه ای در X جمعی است.

(iii) تعامد فاصله p–زاویه ای در X همگن است.

مراجع

- J. Alonso,, *Some results on Singer orthogonality and characterizations of inner product spaces*, Arch. Math. (Basel), **61** (1993), no. 2, pp. 177–182.
- G. D. Birkhoff, M. R. Hestenes,, *Generalized minimax principle in the calculus of variations*, Duke Math. J., **1** (1935), no. 4, pp. 413–432.
- H. Dehghan, *A Characterization of Inner Product Spaces Related to the Skew-Angular Distance*, Russian in Matematicheskie Zametki, **93** (2013), pp. 549–554.
- S. Habibzadeh, M.S. Moslehian, J. Rooin, *Singer-type orthogonalities*, Results Math., **76** (2021), no. 4, 17 pp. MR4314225.
- R. C. James , *Orthogonality in normed linear spaces*, Duke Math. J., **24** (1945), no. 12, pp. 291–302.
- A. Javier, B. Carlos, *Orthogonality in normed linear spaces: a survey. I. Main properties*, Extracta Math, **3** (1988), no. 1, pp. 1–15.

- A. Javier, B. Carlos, *Orthogonality in normed linear spaces: a survey. II. Relations between main orthogonalities*, Extracta Math, **4** (1989), no. 3, pp. 121–131.
- A. Javier, *Some results on Singer orthogonality and characterizations of inner product spaces*, Arch. Math. (Basel), **61** (1993), no. 2, pp. 177–182.
- O. P. Kapoor, S. B. Mathur, *Some geometric characterizations of inner product spaces*, Bull. Austral. Math. Soc., **24** (1981), no. 2, pp. 239–246.
- J. Rooin, S. Habibzadeh and M. S. Moslehian, *Geometric aspects of p-angular and skew p-angular distances*, Tokyo J. Math., **41** (2018), no. 1, pp. 253–272.
- J. Rooin, S. Rajabi and M. S. Moslehian, *Extension of Dunkl-Williams inequality and characterizations of inner product spaces*, Rocky Mountain J. Math., **49** (2019), no. 8, pp. 2755–2777.
- J. Rooin, S. Rajabi and M. S. Moslehian, *p-angular distance orthogonality*, Aequationes Math., **94** (2020), no. 1, pp. 103–121.