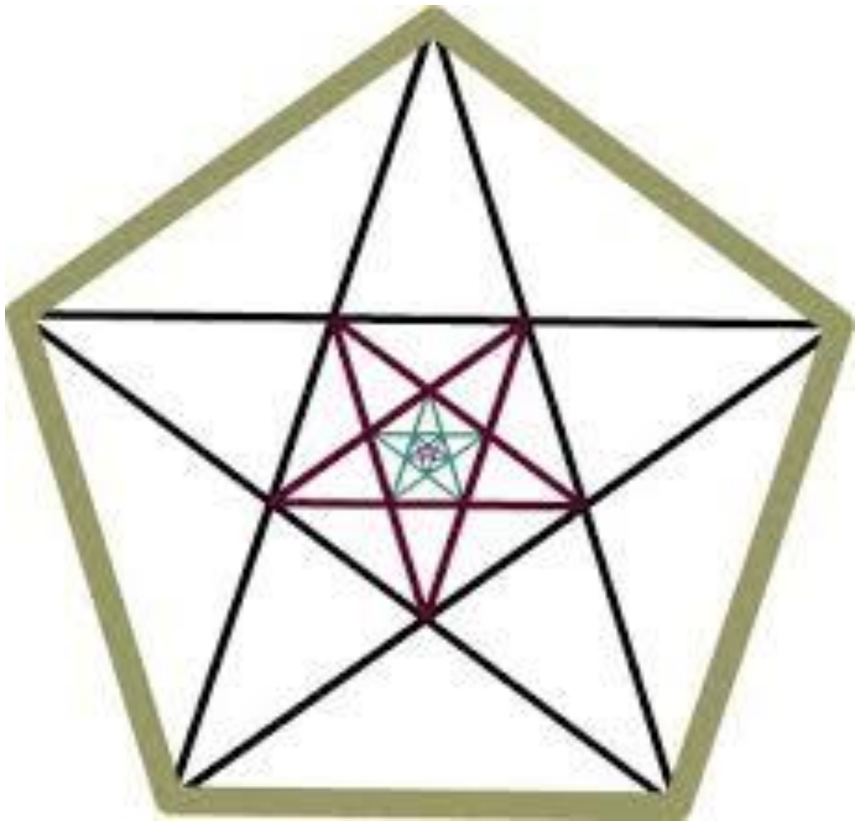
آیا اعدادحقیقی به‌واقع حقیقی‌اند؟

سیاوش شهشهانی

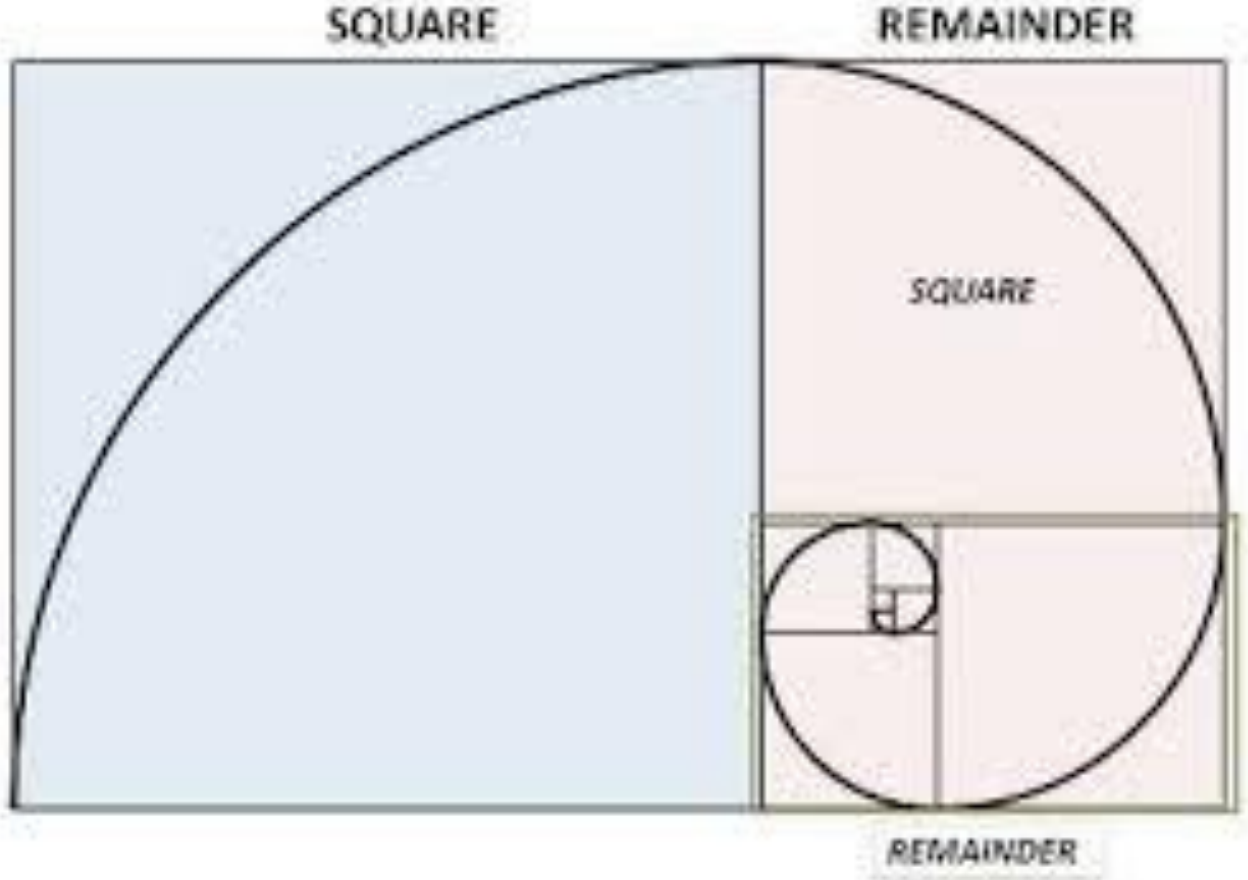
۱۷ مهر ۱۴۰۳

دانشگاه تحصیلات تکمیلی زنجان

ستاره پنجپر در پنجضلعی منتظم



مستطيل طلائى



الگوریتم اقلیدسی

$a_0 = n_0 a_1 + a_2 \quad , a_2 < a_1$

$a_1 = n_1 a_2 + a_3 \quad , a_3 < a_2$

$a_2 = n_2 a_3 + a_4 \quad , a_4 < a_3$

-
-
-

قضیه بنیادی حساب

هر عدد صحیح مثبت بزرگتر از واحد برابر حاصل‌ضرب اعداد اول است و این نمایش مستقل از ترتیب عوامل یکتا است.

Discrete vs Continuous: *Categoriae*, V.6

Quantity is either discrete or continuous…Instances of discrete are numbers and speech; of continuous, lines, surfaces, solids, and, besides these, time and place…

In the case of the parts of a number, there is no common boundary at which they join. For example: two fives make ten, but the two fives have no common boundary, but are separate; the parts three and seven also do not join at any boundary… Number, therefore, is a discrete quantity…A line, on the other hand, is a continuous quantity, for it is possible to find a common boundary at which its parts join. In the case of the line, this common boundary is the point…

Discrete vs Continuous: *Analytica Posteriora*, I.7

It follows that we cannot in demonstrating pass from one genus to another. We cannot, for instance, prove geometrical truths by arithmetic. For there are three elements in demonstration: (1) what is proved, the conclusion – an attribute inhering essentially in a genus; (2) the axioms, i.e., the axioms which are premises of demonstration; (3) the subject genus whose attributes, i.e., essential properties, are revealed by the demonstration. The axioms which are the premises of demonstration may be identical in two or more sciences: but in the case of two different genera such as arithmetic and geometry you cannot apply arithmetical demonstration to the properties of magnitudes unless the magnitudes in question are numbers…

Analytica Posteriora, I.2 مبنای دانش علمی

We suppose ourselves to possess unqualified scientific knowledge of a thing, as opposed to knowing it in an accidental way… when we know the cause on which the fact depends…What I now assert is that at all events we do know by demonstration. I mean a syllogism productive of scientific knowledge, a syllogism, that is, the grasp of which is *eo ipso* such knowledge. Assuming then my thesis as to the nature of scientific knowing is correct, <u>the premises of demonstrated knowledge must be true, primary, immediate, better known than and prior to the conclusion</u>, which is further related to them as effect to cause…

بحث ائودوکسوس (فصل پنج اقلیدس) از مقایسه دو نسبت:

A و B دو مقدار از یک کمیت پیوسته همگن، و C و D دو مقدار از یک کمیت پیوسته همگن (دیگر) هستند. نسبت (A:B) را برابر نسبت (C:D) می‌نامیم در صورتی‌که به‌ازای هر دو عدد صحیح(مثبت) m و n (حداکثر) دفعاتی که nB در mA می‌گنجد برابر (حداکثر) دفعاتی باشد که nD در mC می‌گنجد. چنانچه تعداد دفعات مربوط به (A:B) از تعداد دفعات مربوط به (C:D) کوچک‌تر باشد، نسبت (A:B) ازنسبت (C:D) کوچکتر است.

توجه: برابری دو نسبت ناگویا در تعدادی متناهی گام نتیجه نمی‌شود.

بحث خیام از مقایسه دو نسبت:

A و B دو مقدار از یک کمیت پیوسته همگن، و C و D دو مقدار از یک کمیت پیوسته همگن (دیگر) هستند. برای نسبت (A:B) نمایش کسر مسلسل $[r_0;r_1,r_2,r_3,\ldots]$ وبرای نسبت نمایش (C:D)کسر مسلسل $[s_0;s_1,s_2,s_3,\ldots]$ را درنظر می‌گیریم. اگر به‌ازای هر n ، r_n و s_n برابر باشند می‌گوییم دو نسبت برابرند. فرض کنید n کوچکترین مرتبه‌ای باشد که مثلا $r_n < s_n$ چنانچه n فرد باشد، نسبت (A:B) از نسبت (C:D) بزرگتر است، و چنانچه n زوج باشد، نسبت (A:B) از نسبت (C:D)کوچکتر است

توجه: برابری دو نسبت ناگویا در تعدادی متناهی گام نتیجه نمی‌شود.

ا

مطالب این کتاب شامل محاسباتی است درارث و وصیت و مقاسمه (تقسیم کردن اموال مشترک) و امور دیوانی و تجارت، و نیز در تمام اموری که به حساب و معامله مربوط می‌شود – مانند : مساحت کردن زمین‌ها و اندازه‌گیری نهرها و هندسه (= نقشه‌کشی) و دیگر مباحث و فنون ریاضی – قابل استفاده خواهد بود. این کتاب را با حسن نیتی که ...

(از مقدمه *جبر و مقابله* خوارزمی، ترجمه حسین خدیوجم)

-----------------------------------ابوکامل، کرجی، ماهانی، سموئل مغربی، ...

اروپای قرن شانزده

Gerolamo Cardano	***Ars Magna* (1545)** **حل جبری معادلات درجه۳ و ۴، پذیرش اعداد منفی و به‌کارگیری محدود اعداد موهومی**
Simon Stevin	***De Thiende* (1585), *L'arithmétique* (1585)** **رواج دادن عددنویسی (کسری) اعشاری در اروپا، یکپارچه کردن مفهوم عدد حقیقی، قضیه مقدار بینی برای چندجمله‌ایها**
François Viète	***Algebra Nova* (1591), *Supplementum geometriae* (1593)** **آغاز استفاده کامل از جبر نمادین، پیشتاز هندسه تحلیلی**

نقل از کتاب *آنالیزدان* جرج بارکلی:

And what are these fluxions? The velocities of evanescent increments? And what are these same evanescent increments? They are neither finite quantities, nor quantities infinitely small, nor yet nothing. May we not call them ghosts of departed quantities?

و این *فلوکسیون‌ها* چه هستند؟ سرعت نموهای میرا (ناپدیدشونده)؟ و خود این نموهای میرا چه هستند؟ اینها نه کمیت‌های متناهی هستند، نه کمیت‌های بینهایت کوچک، و نه اینکه هیچ هستند. شاید بتوانیم آنهارا ارواح کمیت‌های محوشونده بنامیم؟

تعریف دقیق مجموعه اعداد حقیقی در نیمه دوم قرن ۱۹

- **روش ددکیند (ائودکسوس)**: برش مجموعه اعداد گویا

- **روش وایرشتراس و کانتور (خیام)**: رده‌های هم‌ارزی
دنباله‌های کوشی
اعداد گویا

- دستاورد مشترک و بحث‌برانگیز: **تمامیت مجموعه اعداد حقیقی**

From the Preface to: ***Was sind und was sollen die Zahlen***

از گفتن اینکه حساب (جبر، آنالیز) جزئی از منطق است مقصودم این است که مفهوم عدد را کاملا مستقل از ایده‌های شهودی فضا و زمان می‌دانم، و آن را نتیجه مستقیم قوانین تفکر به‌شمار می‌آورم ....

اعداد آفریده‌های آزاد ذهن انسانند؛ آنها وسیله‌ای برای درک آسان‌تر و دقیق‌تر تمایز اشیاء هستند. تنها توسط فرایند صرفا منطقیِ بناکردن علم اعداد و بدین ترتیب دست‌یافتن به قلمرو پیوسته اعداد است که امکان بررسی دقیق فهم ما از فضا و زمان، با ایجاد ارتباط آنها با قلمرو عددی ذهن، فراهم می‌گردد.

معنی وجود در ریاضیات

- متقدمان
- فرگه و منطق‌گرایان
- پوانکاره
- براوئر
- هیلبرت
- ساخت‌گرایان متاخر (مکتب روسی، بیشاپ، ...)
- پیاده‌سازی رایانه‌ای (؟)

درباره اثبات قضیه آخر فرما

- What does it take to prove Fermat's Last Theorem? Grothendieck and the logic of number theory

by Colin McLarty

The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 16, No. 3,

September 2010, pp 359-377