مباحثی در ترکیبیات
(آنالیز ترکیبی) ver ۸۷

دکتر سید عبادالله محمودیان

۱ بهمن ۱۳۹۶

فهرست مطالب

فصل ۲

سیستم نمایندگی متمایز

مقدمه

مسأله‌ی انتخاب مجموعه‌ای از نمایندگان از خانواده‌ای از مجموعه‌ها، اغلب اوقات کاربردهای بسیار مهمی دارد. مثلاً انتخاب کمیته‌ای از نمایندگان کمیته‌های مختلف و حتی پذیرش مناسب از دانشجویان متقاضی برای ادامه تحصیل از جمله این مباحث است. در این فصل صورت‌های مختلفی از این مسأله‌ی ترکیبیاتی را بحث می کنیم.

۲-۱ قضیه‌ی فیلیپ هال

فرض کنید n استاد و n درس متمایز در یک گروه ریاضی وجود دارد. هر استاد مایل به تدریس هرکدام از k درس مورد علاقه‌ی خود است و برای هر درس نیز k استاد داوطلب تدریس آن هستند. حال سؤال این است: آیا می‌توان برای هر استاد یک درس معین کرد به‌طوری که مورد علاقه‌اش باشد؟ برای جواب به این سؤال و سؤال‌های مشابه، اول تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید n مجموعه‌ی $T_۱$، $T_۲$، $T_۳$، ...، T_n داده شده‌اند. گوییم $\{a_۱, a_۲, a_۳, \ldots, a_n\}$ یک سیستم نمایندگی متمایز (SDR) برای T_iها است هرگاه

$$a_i \in T_i \quad \text{و} \quad i = ۱, ۲, \ldots, n$$

و برای $i \neq j$، $a_i \neq a_j$.

یک قضیه‌ی اساسی در مورد SDRها موجود است که فیلیپ هال[۱] آن را در سال ۱۹۳۵ بیان کرده است.

?

قضیه ۲.۲ (فیلیپ هال). *فرض کنید $T_۱$، $T_۲$، $T_۳$، ...، T_n زیرمجموعه‌های متناهی از یک مجموعه‌ی E باشند. شرط لازم و کافی برای وجود یک SDR برای این مجموعه‌ها عبارت است از اینکه برای هر انتخاب kتایی از T_iها، اجتماع آن‌ها حداقل دارای k عضو باشد. به‌عبارت دیگر*

$$\forall I \subseteq N = \{۱, ۲, \ldots, n\}, \qquad |\bigcup_{i \in I} T_i| \geq |I|. \qquad \text{(شرایط هال)}$$

دکتر محمد باقری

40 سال قبل در کنفرانس انجمن ریاضی ایران

کاربرد در (توموگرافی2 بعدی) X-RAY؟

Advances in Discrete Tomography and Its Applications

APPLICATION OF MATRICES IN BASIC SCIENCES AND TOMOGRAPHY

Gale-Ryser's Theorem

Consider a matrix $A_{m\times n}$ with integer elements. We denote the sum of the i-th row by r_i and the sum of the k-th column by s_k. The vector $R = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ is called row sum vector, and the vector $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ is called column sum vector. If τ is the sum of all members in A, it is clear that

$$\tau = \sum_{i=1}^{m} r_i = \sum_{k=1}^{n} s_k \,.$$

In 1957, Gale and Ryser each independently, discovered and proved the following theorem for $(0,1)$ −matrices. We state and prove a more general theorem in here that Gale-Ryser's Theorem will be a special case $(c = 1)$ of this theorem.

Theorem

Let $\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_m)$ and $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \ldots, \boldsymbol{s}_n)$ be two vectors with non-negative integer elements, and also let $\boldsymbol{c}$ be a positive integer, A necessary and sufficient condition for the existence of a matrix $\boldsymbol{A}$ which has the row sum vectors $\boldsymbol{R}$ and the column sum vectors $\boldsymbol{S}$, respectively, and its entries are non-negative integers but not greater than $\boldsymbol{c}$, is as following

i. $\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{s}_k$,

ii. For every pair of sets $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{M} = \{1, 2, \cdots, m\}$ and $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{N} = \{1, 2, \cdots, n\}$

$$\sum_{i \in I} \boldsymbol{r}_i + \sum_{k \in K} \boldsymbol{s}_k \leq \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{c}|\boldsymbol{I}||\boldsymbol{K}|.$$

This theorem has a very wide applications in x-ray (two-dimensional) tomography. See reference [1]

https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-8176-4543-4

There is an introduction in [2]

https://www.math.leidenuniv.nl/~tijdemanr/DiscTom.pdf

Question

An attempt to generalize the Gale-Ryser's Theorem.

Gale-Ryser's theorem may be generalized to higher dimensions.

For example, we consider a three-dimensional matrix $(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p})$. There are three vectors $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{R}$ to represent the sum of the poles along the coordinate axes.

(x-poles) $R = (r_1, r_2, \ldots, r_{np})$, **(y-poles)** $S = (s_1, s_2, \ldots, s_{mp})$, **and (z-poles)** $T = (t_1, t_2, \ldots, t_{mn})$.

It can be shown that the necessary condition to existence of a three-dimensional matrix that has the vector sum of x-poles (R), the vector sum of y-poles (S), and the vector sum of z-poles (T), respectively, is that the Gale-Ryser's Conditions are satisfied for each of the planes being cut in a peoper way.

Finding The necessary and sufficient conditions for this problem

are still open.

Motivation to Generalization of Gale-Ryser Theorem

Various generalizations of the above theorem are given in the above book [1]. Of course, we haven't seen that "poles" idea yet. This question is within the understanding of undergraduate students and even high school students, for example, ninth grade and above. And it is a good motivation to draw their attention to unsolved problems in mathematics and it’s applications. My experiences of working with undergraduate students, and even high school students like Maryam Mirzakhani and Mohammad Mahdian, is an incentive to organize a workshop in this field.

Representation of Explanations about the Following

- **Mojtaba Shakoori**

- **Research problem for “ teaching mathematics”: Methods of research**

- **Research on present status of Maryam Mirzakhani-Mahmoodian’s Problem in graph theory, see [3]**

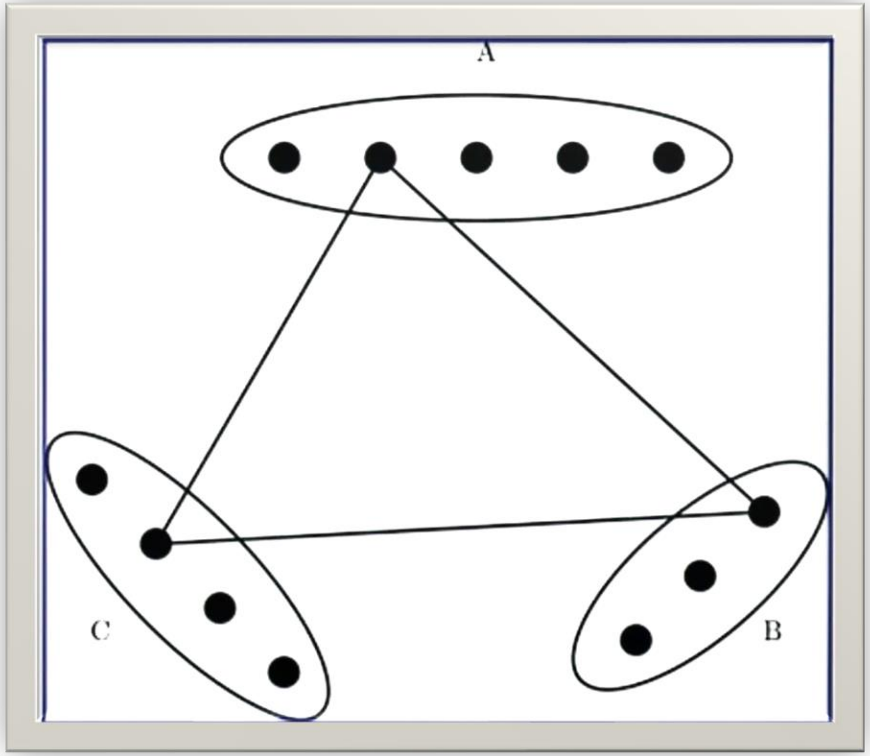
Representation of Explanations about the Following

- **Research on present status of problems in Mathematics of Sudoku, problems of Silver Matrices. proposed by Mohammad Mahdian and Mahmoodian see [3]**

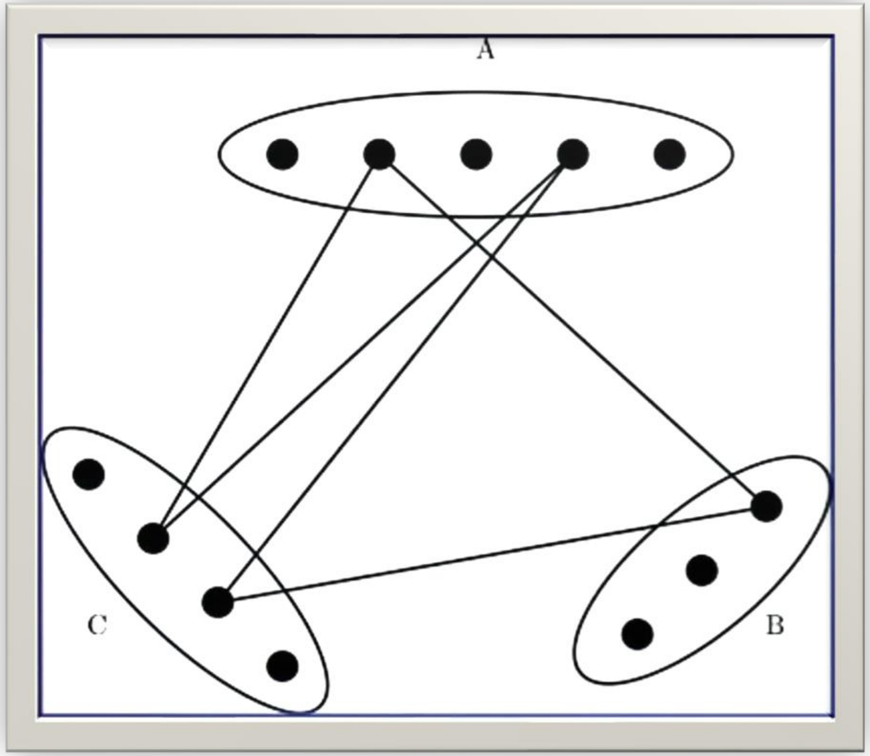
https://fa.ims.ir/2024/04/02/%D8%AE%D8%A8%D8%B1%D9%86%D8%A7%D9%85%D9%87-%D8%A7%D9%86%D8%AC%D9%85%D9%86-

Research on present status of Maryam Mirzakhani-Mahmoodian's Problem in graph theory, see [3]

Example of 3-cycle or triangle in decomposition of complete 3-partite graph



Example of 5-cycle in decomposition of complete 3-partite graph



Research on present status of problems in Mathematics of Sudoku, problems of Silver Matrices. proposed by Mohammad Mahdian and Mahmoodian see[3]

A 4 x 4 Silver matrix:

A

1	2	5	6
3	1	7	5
4	6	1	2
7	4	3	1

For example, Sudoku is also such a problem

			8		1			
						4	3	
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

References

[1] **Herman, Gabor T and Kuba, Attila, Discrete tomography: Foundations, algorithms, and applications, Springer Science \& Business Media, 2012.**

[2] **Herman, Gabor T and Kuba, Attila, Advances in discrete tomography and its applications, Springer Science \& Business Media, 2008.**

[3] **Iranian Mathematics Society, "Newslleter No 177". page 63-71.**

دبیرستان شریعتی یکی از قدیمی ترین مدارس استان زنجان هم اکنون به موزه آموزش و پرورش تبدیل شده و مکان مناسبی برای مرور تاریخ آموزش و پرورش در استان زنجان است


اولین اردوی المپیاد ریاضی
دانشگاه زنجان شهریور ۷۳

کاربرد ماتریس‌ها در علوم پایه و توموگرافی

قضیه‌ی گیل-رایزر

یک ماتریس $A_{m\times n}$ با درایه‌های صحیح را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم حاصل‌جمع سطر i-اُم مساوی r_i و حاصل‌جمع ستون k-اُم مساوی s_k باشد. بردار $R = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ را بردار حاصل جمع سطرها و بردار $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ را بردار حاصل جمع ستون ها می نامند.

اگر τ مجموع تمام اعضای A باشد در این‌صورت روشن است که

$$\tau = \sum_{i=1}^{m} r_i = \sum_{k=1}^{n} s_k.$$

در سال 1957, گیل و رایزر هرکدام به‌طور مستقل قضیه‌ی زیر را برای ماتریس‌های صفر و یک کشف و اثبات نمودند. ما در اینجا یک قضیه‌ی کلی‌تر را بیان و اثبات می‌کنیم. قضیه‌ی گیل-رایزر حالت خاص $(c = 1)$ این قضیه خواهدبود.

قضیه

فرض کنید $R=(r_1,r_2,\dots,r_m)$ و $S=(s_1,s_2,\dots,s_n)$ دو بردار با مؤلفه‌های صحیح غیرمنفی باشند و c هم یک عدد صحیح و مثبت باشد. در این‌صورت شرایط لازم و کافی برای وجود یک ماتریس A که به‌ترتیب دارای بردار حاصل‌جمع سطرها R، و بردار حاصل‌جمع ستون‌ها S بوده و درایه‌هایش از اعداد صحیح نامنفی که بزرگ‌تر از c نیستند، عبارت است از

1) $\tau=\sum_{i=1}^{m} r_i=\sum_{k=1}^{n} s_k$

2) برای هر جفت مجموعه ی $I\subseteq M=\{1,2,\cdots,m\}$ و $K\subseteq N=\{1,2,\cdots,n\}$ داریم:

$$\sum_{i\in I} r_i+\sum_{k\in K} s_k\le \tau+c|I||K|.$$

این قضیه کاربردهای بسیار وسیع در x-ری (توموگرافی 2-بعدی) دارد. رجوع کنید به کتاب [1]

https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-8176-4543-4

یک مقدمه معرفی در [2] است.

https://www.math.leidenuniv.nl/~tijdemanr/DiscTom.pdf

سؤال

سعی در تعمیم قضیه‌ی گیل-رایزر.

می‌توان قضیه‌ی گیل-رایزر را برای بُعدهای بالاتر تعمیم داد. به‌عنوان مثال اگر ماتریس با $(\boldsymbol{m}$

ابعاد $\boldsymbol{\times n \times p}$ سه‌بعدی درنظر بگیریم در این حالت سه بردار $\boldsymbol{R,S,T}$ (حاصلجمع میله‌ها)

را درامتداد محورهای مختصات خواهیم داشت به‌طوری که

$\boldsymbol{R = (r_1, r_2, \ldots, r_{np})}$ (x-میله ها)، $\boldsymbol{S = (s_1, s_2, \ldots, s_{mp})}$ (y-میله‌ها)

و $\boldsymbol{T = (t_1, t_2, \cdots, t_{mn})}$ (z- میله ها) .

می‌توان نشان داد که شرط لازم برای وجود یک ماتریس سه‌بعدی که به‌ترتیب دارای بردار حاصل‌جمع x-میله‌ها (R)، بردار حاصل‌جمع y-میله‌ها (S) و بردار حاصل‌جمع z-میله‌ها (T) باشد، آن است که شرایط قضیه‌ی گیل-رایزر بر روی تک‌تک -صفحات- برقرار باشد.

پیدا کردن شرایط لازم و کافی برای این مسئله هنوز باز است.

تعمیم‌های مختلف از قضیه فوق در کتاب فوق آمده است. البته آن ایده "میله‌ها" را هنوز در جایی ندیده‌ایم. این سؤال در حد فهم دانشجویان کارشناسی و حتی دانش‌آموزان مثلاً کلاس نهم به‌بالا است. و خوراک خوبی است برای جلب ایشان به مسائل حل نشده ریاضی و کاربردها. تجربه من از کار با دانشجویان مقطع کارشناسی و حتی دانش‌آموزانی مانند مریم میرزاخانی و محمد مهدیان انگیزه ایست که کارگاهی در این زمینه برگزار کنیم.

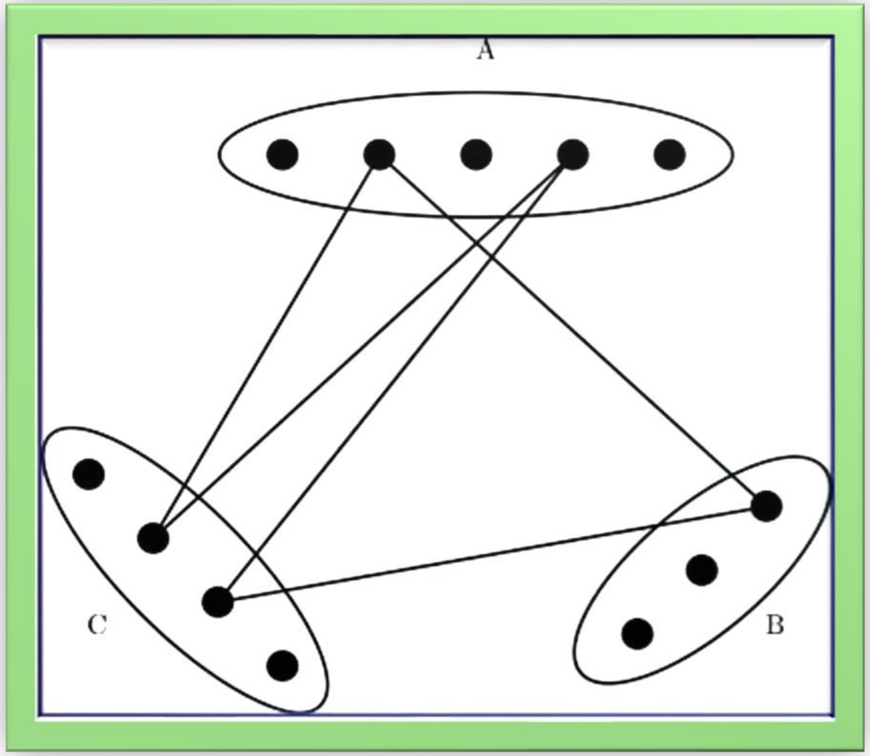
ارائه توضیحات درباره ی موارد زیر

- مجتبی شکوری
- سؤال پژوهشی برای " آموزش ریاضی"- دانشگاه فرهنگیان
- تحقیق درمورد وضعیت فعلی مسئله ی مطرح شده توسط مریم میرزاخانی و دکتر محمودیان در نظریه گراف ها [3].
- تحقیق در مورد وضعیت فعلی مسائل موجود در در ریاضیات سودوکو، مسائل ماتریس های نقره ای که توسط محمد مهدیان و دکتر محمودیان مطرح شده است [3].

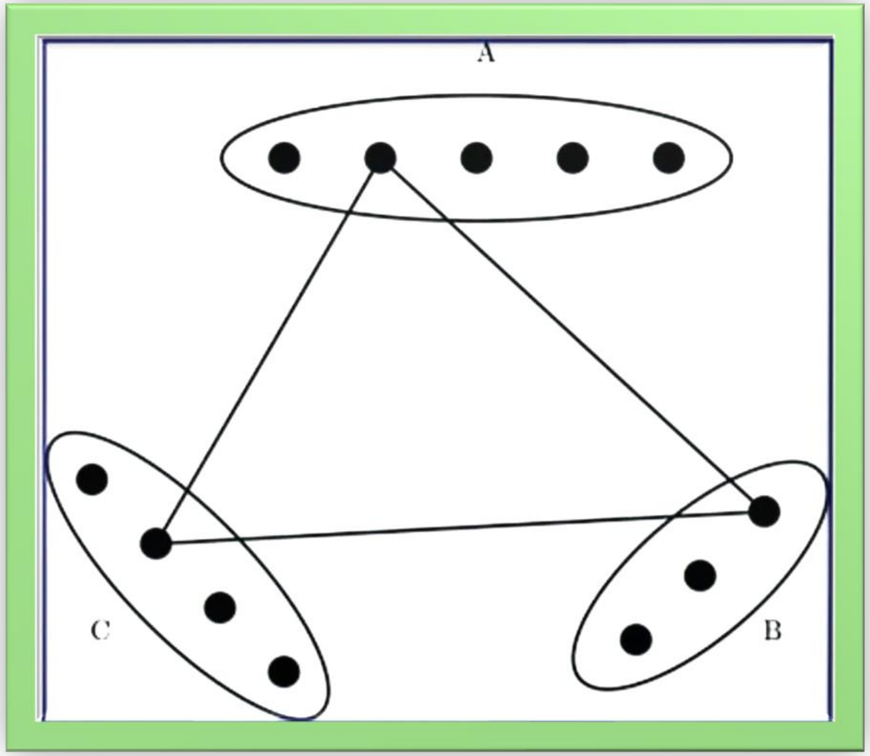
https://fa.ims.ir/2024/04/02/%D8%AE%D8%A8%D8%B1%D9%86%D8%A7%D9%85%D9%87-%D8%A7%D9%86%D8%AC%D9%85%D9%86-

تحقیق درمورد وضعیت فعلی مسئله ی مطرح شده توسط مریم میرزاخانی و دکتر محمودیان در نظریه گراف ها [3].

نمونه دور 5-تایی در تجزیه گراف 3 بخشی کامل



نمونه دور 3-تایی یا مثلث در تجزیه گراف سه بخشی کامل



تحقیق در مورد وضعیت فعلی مسائل موجود در در ریاضیات سودوکو، مسائل ماتریس های نقره ای که توسط محمد مهدیان و دکتر محمودیان مطرح شده است [3].

برای مثال، سودوکو نیز چنین مسئله ای است

			8		1			
						4	3	
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

ماتریس نقره ای

1	2	5	6
3	1	7	5
4	6	1	2
7	4	3	1

مراجع

[1] **Herman, Gabor T and Kuba, Attila, Discrete tomography: Foundations, algorithms, and applications, Springer Science \& Business Media, 2012.**

[2] **Herman, Gabor T and Kuba, Attila, Advances in discrete tomography and its applications, Springer Science \& Business Media, 2008.**

[3] **Iranian Mathematics Society, "Newslleter No 177". page 63-71.**

طرح "مستندسازی تاریخ ریاضیات در ایران معاصر" و نتایج آن

برای شناخت و بررسی تاریخ ریاضیات ایران در صد سال گذشته، به داده‌هایی نیاز است که ممکن است در برخی موارد به‌طور پراکنده در برخی از نشریات و کتاب‌ها و یا در فضای مجازی نوشته شده باشند و به بسیاری از موارد هم اصلاً پرداخته نشده است. طرح "مستندسازی تاریخ ریاضیات در ایران معاصر" با هدف رفع کاستی‌هایی که مانع بررسی و تحلیل تاریخی جریان ریاضیات ایران معاصر شده‌اند، در پی تهیه و انتشار اسنادی است که به نحوی به آموزش، پژوهش، مقاله‌ها، سخنرانی‌ها، ترجمه و تألیف و فعالیت‌های انتشاراتی، ترویجی و جمعی مانند گردهمایی‌ها و تشکیل انجمن‌ها در زمینه ریاضیات در صد سال اخیر ارتباط داشته باشند. شیوه کار مجریان طرح بیشتر بر گفتگو با نقش‌آفرینان هر عرصه از جریان ریاضیات ایران معاصر استوار است.

طرح مستندسازی تاریخ ریاضیات در ایران معاصر با اتکا بر تجربیات چنده‌ساله یکی از مجریان