# دترمینان تعمیم‌یافته ماتریس‌ها و کاربردهای آن

مرتضی بیات

دانشگاه آزاد واحد زنجان

۲۰ خرداد ۱۴۰۴

# تاریخچه تحول مفهوم دترمینان

## دوره پایه‌گذاری (قرن ۱۷–۱۸)

لایبنیتز (۱۶۹۳):

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

کرامر (۱۷۵۰):

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

# تاریخچه تحول مفهوم دترمینان

## صورت‌بندی دقیق (قرن ۱۹)

**بینت و کوشی (۱۸۱۲):**

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

**ژاکوبی (۱۸۴۱):** دترمینان تابعی (ژاکوبین) را معرفی کرد:

$$J = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

## صورت‌بندی دقیق (قرن ۱۹)

**بینت و کوشی (۱۸۱۲):**

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

**ژاکوبی (۱۸۴۱):** دترمینان تابعی (ژاکوبین) را معرفی کرد:

$$J = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

# تاریخچه تحول مفهوم دترمینان

## دترمینان کوانتومی (دهه ۱۹۸۰)

**دترمینان کوانتومی:**

$$\det_q \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - qbc$$

$$\det_q \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = q^{۲}(bfg - bdi) + q(cdh - ceg - afh) + aei$$

$$\det_q(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-q)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \prod_{i=۱}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

## دترمینان کوانتومی (دهه ۱۹۸۰)

**دترمینان کوانتومی:**

$$\det_q \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - qbc$$

$$\det_q \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = q^{۲}(bfg - bdi) + q(cdh - ceg - afh) + aei$$

$$\det_q(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-q)^{\mathrm{inv}(\sigma)} \prod_{i=۱}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

# تاریخچه تحول مفهوم دترمینان

## تحلیل ماتریس‌های مدرن (قرن ۲۰)

**تجزیه مقدار تکین –(SVD) (۱۸۷۳-۱۹۳۶):**

$A = U\Sigma V^*$

$U$: ماتریس $m \times m$ متعامد (بردارهای ویژه $AA^T$)

$\sum$: ماتریس $m \times n$ قطری با مقادیر تکین روی قطر

$V$: ماتریس $n \times n$ متعامد (بردارهای ویژه $A^TA$)

$\mathrm{pdet}(A) = \prod_{i=1}^{r} \sigma_i$

$|\det(A)| = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i$ (برای ماتریس مربعی)

## تحلیل ماتریس‌های مدرن (قرن ۲۰)

**تجزیه مقدار تکین –(SVD) (۱۸۷۳-۱۹۳۶):**

$A = U\Sigma V^*$

$U$: ماتریس $m \times m$ متعامد (بردارهای ویژه $AA^T$)

$\sum$: ماتریس $m \times n$ قطری با مقادیر تکین روی قطر

$V$: ماتریس $n \times n$ متعامد (بردارهای ویژه $A^TA$)

$\mathrm{pdet}(A) = \prod_{i=1}^{r} \sigma_i$

$|\det(A)| = \prod_{i=1}^{n} \sigma_i$ (برای ماتریس مربعی)

# تاریخچه تحول مفهوم دترمینان

## تعمیم دترمینان ماتریس غیرمربعی

- از تلاش‌های اولیه در سال ۱۹۲۵ برای تعمیم دترمینان مستطیلی، می‌توان به کار C.E. Cullis اشاره کرد که مفهوم determinoid را معرفی کرد.
- در سال ۱۹۶۶، M.Radic دترمینان ماتریس مستطیلی $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ با $m \leq n$ ارائه داد:

$$|A|_{\text{Radic}} = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_m\leq n} (-1)^{r+j_1+\cdots+j_m} \cdot \det(A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}), \quad r = \sum_{k=1}^{m} k$$

که در آن، دترمینان هر زیرماتریس مربعی $m \times m$ از ستون‌ها محاسبه می‌شود. این تعریف ویژگی‌های کلیدی همچون چندخطی بودن و تقارن علامت را حفظ می‌کند و در حالت $m = n$ به دترمینان کلاسیک تبدیل می‌شود.

## تعمیم دترمینان ماتریس غیرمربعی

- از تلاش‌های اولیه در سال ۱۹۲۵ برای تعمیم دترمینان مستطیلی، می‌توان به کار C.E. Cullis اشاره کرد که مفهوم determinoid را معرفی کرد.
- در سال ۱۹۶۶، M.Radic دترمینان ماتریس مستطیلی $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ با $m \leq n$ ارائه داد:

$$|A|_{\text{Radic}} = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_m\leq n} (-1)^{r+j_1+\cdots+j_m} \cdot \det(A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}), \quad r = \sum_{k=1}^{m} k$$

که در آن، دترمینان هر زیرماتریس مربعی $m \times m$ از ستون‌ها محاسبه می‌شود. این تعریف ویژگی‌های کلیدی همچون چندخطی بودن و تقارن علامت را حفظ می‌کند و در حالت $m = n$ به دترمینان کلاسیک تبدیل می‌شود.

# تاریخچه تحول مفهوم دترمینان

## توسعه‌های هندسی و جبری

- Radic در آثار بعدی خود دترمینان مستطیلی را در هندسه به‌کار برد؛ از جمله در محاسبه مساحت چندضلعی‌های تخت و حجم چندوجهی ها. کار او بعدها توسط Radic و Susanj و Joshi گسترش یافت. همچنین، Stanimirovic و Stankovic دترمینان را در ارتباط با وارون‌های تعمیم‌یافته پنروز مطالعه کردند.

## توسعه‌های هندسی و جبری

- Radic در آثار بعدی خود دترمینان مستطیلی را در هندسه به‌کار برد؛ از جمله در محاسبه مساحت چندضلعی‌های تخت و حجم چندوجهی ها. کار او بعدها توسط Radic و Susanj و Joshi گسترش یافت. همچنین، Stanimirovic و Stankovic دترمینان را در ارتباط با وارون‌های تعمیم‌یافته پنروز مطالعه کردند.

## پیوند با جبر خارجی و هندسه جبری

- مطالعات نوین‌تری همچون دترمینان مستطیلی را در چارچوب جبر خارجی (Exterior Algebra) و روابط پلوکر جای دادند. این چارچوب‌ها تعمیمی طبیعی از دترمینان هستند که کاربردهایی در مترویدها، تانسورها و فضای گراسمانی دارند.

# تاریخچه تحول مفهوم دترمینان

## تعمیم فرمول‌های کلاسیک

- Bayat، Joshi و Lu و همکارانشان به تعمیم فرمول‌های معروف مانند Cauchy–Binet، Laplace و Dodgson برای ماتریس‌های مستطیلی با استفاده از دترمینان Radic پرداختند.

## تعمیم فرمول‌های کلاسیک

- Bayat، Joshi و Lu و همکارانشان به تعمیم فرمول‌های معروف مانند Cauchy–Binet، Laplace و Dodgson برای ماتریس‌های مستطیلی با استفاده از دترمینان Radic پرداختند.

## کاربردهای مدرن

دترمینان مستطیلی در شاخه‌های گوناگونی نقش دارد:

- **هندسه جبری:** روابط پلوکر، مترویدها
- **تحلیل عددی و جبر خطی کاربردی:** شبه‌وارون‌ها
- **یادگیری ماشین:** تحلیل داده‌های ماتریسی
- **گرافیک رایانه‌ای و رباتیک:** محاسبه حجم چندوجهی‌ها

## تعمیم فرمول‌های کلاسیک

- Bayat، Joshi و Lu و همکارانشان به تعمیم فرمول‌های معروف مانند Cauchy–Binet، Laplace و Dodgson برای ماتریس‌های مستطیلی با استفاده از دترمینان Radic پرداختند.

## کاربردهای مدرن

دترمینان مستطیلی در شاخه‌های گوناگونی نقش دارد:

- **هندسه جبری:** روابط پلوکر، مترویدها
- **تحلیل عددی و جبر خطی کاربردی:** شبه‌وارون‌ها
- **یادگیری ماشین:** تحلیل داده‌های ماتریسی
- **گرافیک رایانه‌ای و رباتیک:** محاسبه حجم چندوجهی‌ها

# دترمینان Radic

## تعریف دترمینان نوع اول: دترمینان Radic

Radic تعریف زیر از دترمینان یک ماتریس مستطیلی ارائه داده است: دترمینان یک ماتریس $m \times n$ با ستون‌های $A_1, \ldots, A_n$ و شرط $m \leq n$ برابر است با مجموع:

$$\sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n} (-1)^{r+s} |A_{j_1}, \ldots, A_{j_m}|, \tag{1}$$

که در آن $r = 1 + \cdots + m$ و $s = j_1 + \cdots + j_m$. این دترمینان یک **تابع چندخطی و پادمتقارن نسبت به سطرهاست و در نتیجه دارای بسیاری از ویژگی‌های شناخته‌شده مانند بسط لاپلاس است.**

# دترمینان Radic

## چند مثال

### مثال

$$|a_۱, a_۲, a_۳| = (-۱)^{۱+۱}a_۱ + (-۱)^{۱+۲}a_۲ + (-۱)^{۱+۳}a_۳ = a_۱ - a_۲ + a_۳.$$

### مثال

$$\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} = (-۱)^{(۱+۲)+(۱+۲)} \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix} + (-۱)^{(۱+۲)+(۱+۳)} \begin{vmatrix} a_۱ & a_۳ \\ b_۱ & b_۳ \end{vmatrix}$$
$$+ (-۱)^{(۱+۲)+(۲+۳)} \begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ \\ b_۱ & b_۲ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_۱ & a_۳ \\ b_۱ & b_۳ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_۲ & a_۳ \\ b_۲ & b_۳ \end{vmatrix}.$$

# دترمینان Radic

## ادامه مثال

$$\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} = a_۱(-۱)^{۱+۱}|b_۲, b_۳| + a_۲(-۱)^{۱+۲}|b_۱, b_۳| + a_۳(-۱)^{۱+۳}|b_۱, b_۲|$$

$$= a_۱ b_۲ - a_۲ b_۱ - (a_۱ b_۳ - a_۳ b_۱) + a_۲ b_۳ - a_۳ b_۲.$$

که $|b_i, b_j| = b_i - b_j$.

## ادامه مثال

$$\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} = a_۱(-۱)^{۱+۱}|b_۲, b_۳| + a_۲(-۱)^{۱+۲}|b_۱, b_۳| + a_۳(-۱)^{۱+۳}|b_۱, b_۲|$$
$$= a_۱ b_۲ - a_۲ b_۱ - (a_۱ b_۳ - a_۳ b_۱) + a_۲ b_۳ - a_۳ b_۲.$$

که $|b_i, b_j| = b_i - b_j$.

## حالت خاص $m = ۲$

$$\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & \cdots & a_n \\ b_۱ & b_۲ & \cdots & b_n \end{vmatrix} = \sum_{۱\leq i<j\leq n} (-۱)^{۱+۲+(i+j)} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$$

# دترمینان Radic

## محاسبه مساحت به کمک دترمینان رادیچ -۲۰۰۵

### قضیه

برای هر چندضلعی با رئوس $A_1, \ldots, A_n$ در $\mathbb{R}^2$:

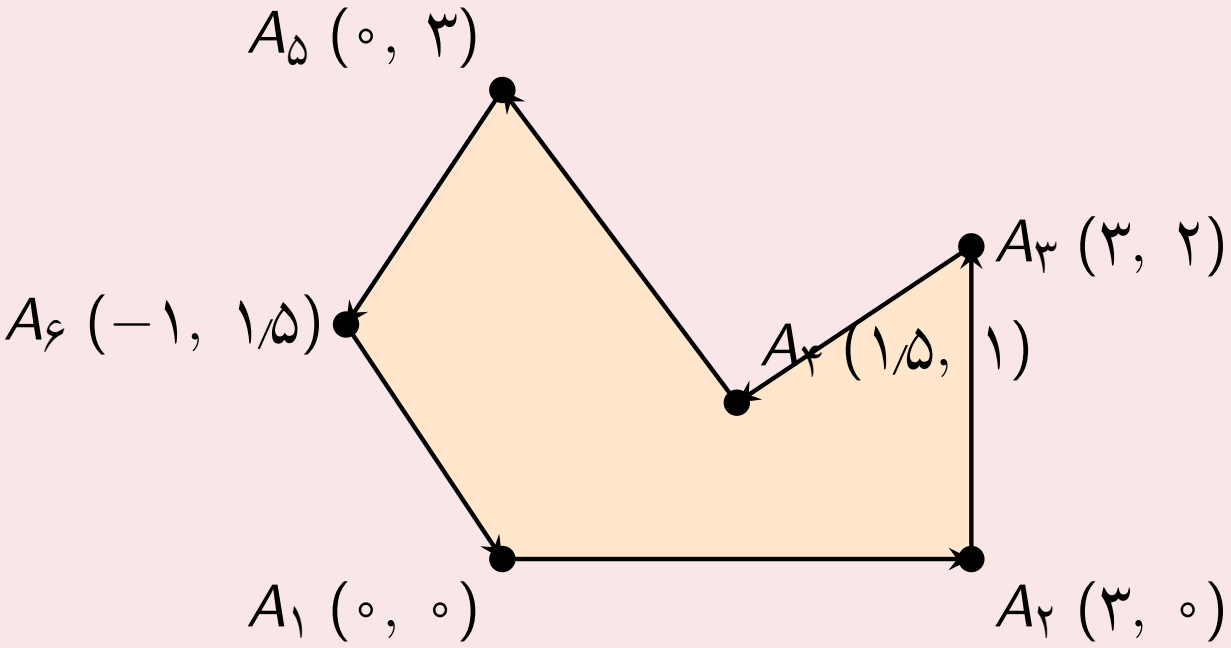
$$\text{Area}(A_1, \ldots, A_n) = \frac{1}{2} \left|\det[A_1, A_2, \ldots, A_n]\right|$$

که در آن دترمینان مستطیلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\det[A_1, \ldots, A_n] = \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j+1} \det[A_i, A_j]$$

# دترمینان Radic

## مثال




$$\text{Area} = \frac{۱}{۲}\left|\sum_{i=۱}^{۶}(x_i y_{i+۱} - x_{i+۱} y_i)\right| = \frac{۱}{۲}\times ۱۳/۵ = \boxed{۶/۷۵}$$

# دترمینان Radic

## قضایا

### قضیه

فرض کنید $A_1 \cdots A_n$ یک چندضلعی در $\mathbb{R}^2$ باشد. آنگاه:

$$2 \times \text{Area}(A_1 \cdots A_n) = |A_1 + A_2, A_2 + A_3, \ldots, A_{n-1} + A_n, A_n + A_1|$$

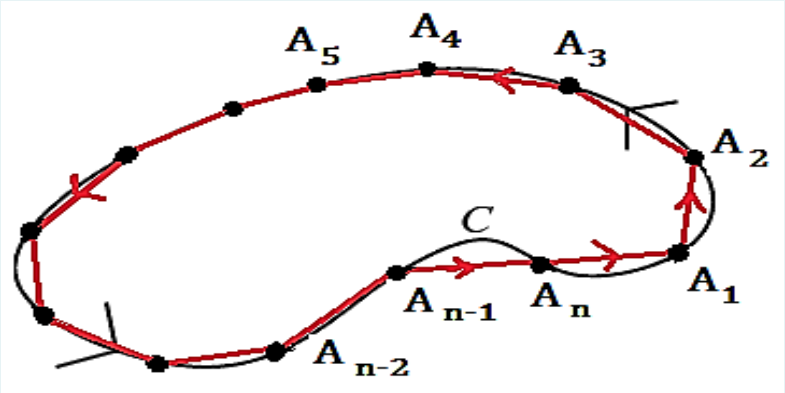
اگر $n$ فرد باشد، آنگاه برای هر نقطه $X \in \mathbb{R}^2$ داریم:

$$|A_1 + X, A_2 + X, \ldots, A_n + X| = |A_1, A_2, \ldots, A_n|$$

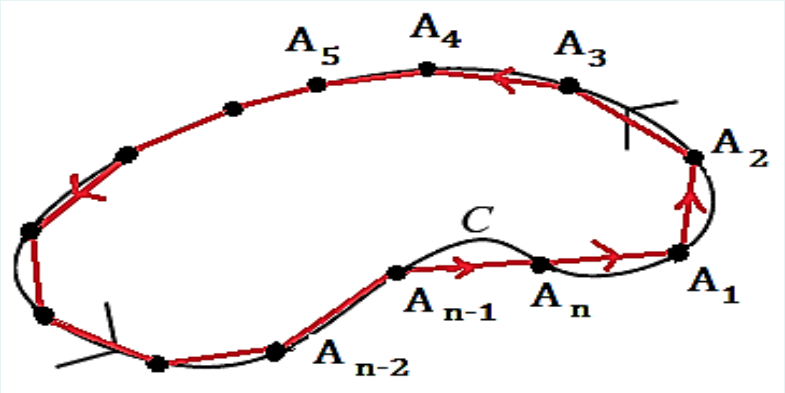
اگر $n$ زوج باشد، و شرط $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i A_i = 0$ برقرار باشد، آنگاه تساوی بالا را داریم.

# دترمینان Radic

## قضیه گرین



## قضیه گرین

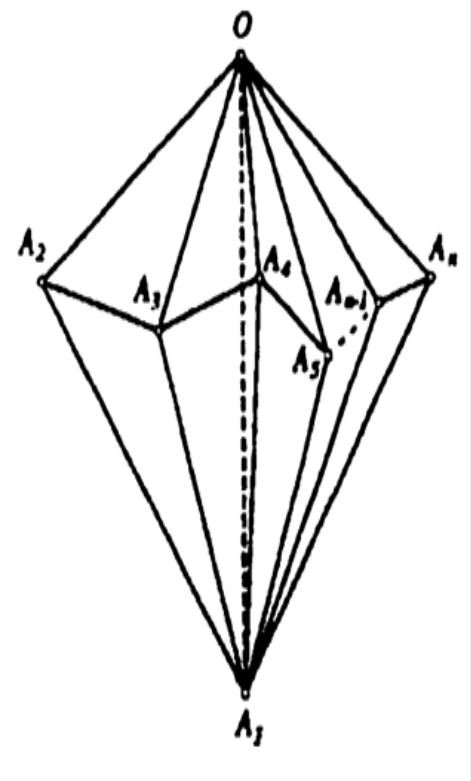



## قضیه گرین

$$۲ \times \text{Area} = \lim_{n\to\infty} |A_۱ + A_۲,\ A_۲ + A_۳,\ \ldots,\ A_n + A_۱| = \oint_C xdy - ydx.$$

# دترمینان Radic

## قضیه حجم برای چندوجهی در فضای $\mathbb{R}^3$



# دترمینان Radic

## قضیه حجم برای چندوجهی در فضای $\mathbb{R}^۳$

### قضیه

فرض کنید $A = [A_۱, A_۲, \ldots, A_n]$ یک ماتریس $۳ \times n$ باشد که ستون‌های آن نقاطی در فضای $\mathbb{R}^۳$ هستند و $n$ یک عدد فرد باشد. آنگاه:

$$\mathrm{vol}(A_۱, A_۲, \ldots, A_n, O) = \frac{۱}{۱۲} \left| A_۱ + A_۲, A_۲ + A_۳, \ldots, A_n + A_۱ \right|,$$

این دترمینان برابر است با مجموع حجم‌های چهاروجهی‌های تشکیل‌شده از سه نقطه متوالی و مبدأ مختصات:

$$\left| A_۱ + A_۲, \ldots, A_n + A_۱ \right| = ۲ \sum_{i=۱}^{n-۲} \left| A_i, A_{i+۱}, A_{i+۲} \right|.$$

# دترمینان Radic

## قضیه دیورژانس

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{۱۲}|A_۱ + A_۲, ..., A_n + A_۱| = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV$$

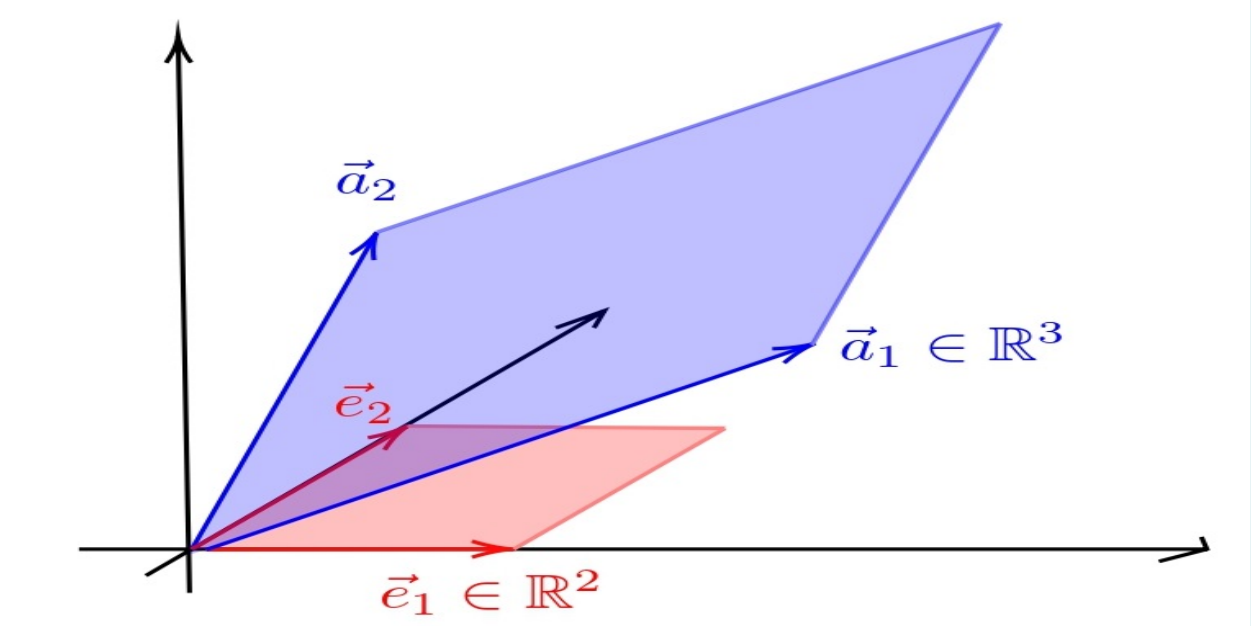
$$\lim_{n\to\infty} ۲\sum_{i=۱}^{n-۲} |A_i, A_{i+۱}, A_{i+۲}| = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

برای یک میدان برداری $\mathbf{F}$ و با تعریف:

$$A_i \equiv \mathbf{F}(x_i, y_i, z_i)$$

## تعبیر هندسی دترمینان ماتریس بلند

تابع شبه-دترمینان برای یک ماتریس بلند $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ را به عنوان حجم $n-$ بعدی تصویر در فضای $m-$ بعدی از فرم $n-$ بعدی واحد تعریف می کنیم.



## تعریف دترمینان برا سا س ضرب خارجی

به طور رسمی، می‌توانیم ویژگی جبر خارجی دترمینان استاندارد (برای ماتریسی از $n$ بردار در $\mathbb{R}^n$) را به صورت زیر تعمیم دهیم:

$$|\det(\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n)| = \left| \bigwedge_i \vec{c}_i \right|$$

به تابع شبه–دترمینان Gdet که در تعریف زیر بیان می‌شود:

## تعریف شبه–دترمینان بدون علامت

### تعریف

تابع شبه–دترمینان یک ماتریس متشکل از ستون‌های $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ که هر $c_j \in \mathbb{R}^m$ $(m \geq n)$ باشد، به صورت حجم بدون علامت $n-$ بعدی فرم $n-$ بعدی تولید شده توسط این ستون‌ها تعریف می‌شود، یعنی:

$$\mathrm{Gdet}(\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n) = \left| \bigwedge_j \vec{c}_j \right|$$

## مثال

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \qquad A \wedge A = \sum_{۱ \leq i < j \leq ۴} \det \begin{pmatrix} r_i \\ r_j \end{pmatrix} e_i \wedge e_j$$

$$\begin{aligned} A \wedge A = {} & (ad - bc)\, e_۱ \wedge e_۲ + (af - be)\, e_۱ \wedge e_۳ + (ah - bg)\, e_۱ \wedge e_۴ \\ & + (cf - de)\, e_۲ \wedge e_۳ + (ch - dg)\, e_۲ \wedge e_۴ \\ & + (eh - fg)\, e_۳ \wedge e_۴ \end{aligned}$$

## سیستم علامت برای دترمینان ماتریس‌ها

### تعریف

علامت ماتریس $A$ با علامت اولین زیرماتریس $n \times n$ که دترمینان آن ناصفر است، برابر است؛ به شرطی که زیرماتریس‌ها $n \times n$ بر اساس ترتیب لغوی $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ مرتب شده باشند. به‌طور خاص، اگر $\det(A_{1,2,\ldots,n}) \neq 0$، آنگاه:

$$\operatorname{sign}(A) = \operatorname{sign}(\det(A_{1,2,\ldots,n})).$$

اگر $m < n$ و $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. آنگاه به‌صورت قراردادی $\operatorname{sign}(A) = 0$ تعریف می‌شود. دلیل این در بخش بعدی روشن خواهد شد.

## قضیه علامت شبه-دترمینان

### قضیه

فرض کنید $m \geq n$ و $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. آنگاه:

- اگر $m = n$، آنگاه $\operatorname{sign}(A) = \operatorname{sign}(\det(A))$.
- اگر $A$ ماتریس همانی مستطیلی باشد، $\operatorname{sign}(A) = ۱$.
- اگر $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$، آنگاه $\operatorname{sign}(AB) = \operatorname{sign}(A)\operatorname{sign}(B)$.
- اگر $A = (\alpha_۱, \ldots, \alpha_n)$ و $B = (\alpha_۱, \ldots, \alpha_{i-۱}, \alpha_i + k\alpha_j, \alpha_{i+۱}, \ldots, \alpha_n)$، آنگاه $\operatorname{sign}(B) = \operatorname{sign}(A)$.
- اگر $k \in \mathbb{R}$ و $A = (\alpha_۱, \ldots, \alpha_n)$، $B = (\alpha_۱, \ldots, k\alpha_i, \ldots, \alpha_n)$، آنگاه $\operatorname{sign}(B) = \operatorname{sign}(k)\operatorname{sign}(A)$.

## تعریف شبه-دترمینان علامت دار

### تعریف

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. دترمینان تعمیم یافته $A$، $\mathrm{Gdet}(A)$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Gdet}(A) := \begin{cases} \mathrm{sign}(A)\left(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_n\le m}(\det(A_{i_1,\ldots,i_n}))^2\right)^{\frac{1}{2}} & m \ge n \\ 0 & m < n \end{cases}$$

که در آن $A_{i_1,\ldots,i_n}$ ماتریس $n \times n$ حاصل از سطرهای $i_1, \ldots, i_n$ ماتریس $A$ است.

## یک ملاحظه

به نظر می‌رسد راه طبیعی دیگری برای تعریف Gdet وقتی $m < n$ وجود دارد، یعنی $\mathrm{Gdet}(A) := \mathrm{Gdet}(A^T)$. اما اگر چنین کنیم، بسیاری از ویژگی‌های خوب و کاربردها مانند فرمول ضرب، قاعده کرامر تعمیم یافته و غیره از دست خواهند رفت.

# خواص شبه–دترمینان

## سازگاری شبه-دترمینان با حالت معمولی

### قضیه

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. آنگاه $\mathrm{Gdet}(A) = \det(A)$.

**اثبات.**

$$|\,\mathrm{Gdet}(A)| = \left(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_n\le n} (\det(A_{i_1,\ldots,i_n}))^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\det(A)|$$

طبق قضیه علامت قسمت (۱)، $\mathrm{sign}(A) = \mathrm{sign}(\det(A))$. در نتیجه $\mathrm{Gdet}(A) = \det(A)$.

# خواص شبه–دترمینان

## محاسبه شبه-دترمینان به کمک فقط یک دترمینان

### قضیه

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. آنگاه:

$$|\operatorname{Gdet}(A)| = (\det(A^T A))^{\frac{1}{2}}$$

**اثبات.** اگر $m \geq n$ باشد، از فرمول کوشی-بینت استفاده می‌کنیم:

$$\det(A^T A) = \sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_n \leq m} (\det(A_{i_1,\ldots,i_n}))^2$$

$$\rightarrow |\operatorname{Gdet}(A)| = \left( \sum (\det(A_{i_1,\ldots,i_n}))^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (\det(A^T A))^{\frac{1}{2}}$$

# خواص شبه–دترمینان

## خاصیت چند خطی بودن شبه- دترمینان

### قضیه

1. $\mathrm{Gdet}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \mathrm{Gdet}(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i + k\alpha_j, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n)$
2. $\mathrm{Gdet}(\alpha_1, \cdots, k\alpha_i, \cdots, \alpha_n) = k\,\mathrm{Gdet}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$
3. $\mathrm{Gdet}(\alpha_1, \cdots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n) = -\,\mathrm{Gdet}(\alpha_1, \cdots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \cdots, \alpha_n)$
4. $\mathrm{Gdet}(e_1, \cdots, e_n) = 1$

# خواص شبه–دترمینان

## فرمول ضربی شبه–دترمینان

### قضیه

فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. آنگاه $\mathrm{Gdet}(AB) = \mathrm{Gdet}(A)\,\mathrm{Gdet}(B)$.

# خواص شبه–دترمینان

**ملاحظه ۱**

اگر تعریف حالت $m < n$ به صورت $\mathrm{Gdet}(A) := \mathrm{Gdet}(A^T)$ باشد، آنگاه قضیه اخیر برقرار نخواهد بود. برای مثال، اگر:

$$A = (۱, ۰), \quad B = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}$$

آنگاه:

$$\mathrm{Gdet}(AB) = ۱ \neq ۲ = \mathrm{Gdet}(A)\,\mathrm{Gdet}(B)$$

# خواص شبه–دترمینان

## فرمول کوشی-بینت برای شبه-دترمینان

همچنین فرمول کوشی-بنیت را در مورد $A^TA$ تعمیم می‌دهد.

### قضیه

فرض کنید $m \geq n$ و $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. برای هر $n \leq k \leq m$ داریم:

$$\binom{k-n}{m-n}\det(A^TA) = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq m} (\mathrm{Gdet}(A_{i_1,i_2,\ldots,i_k}))^2,$$

که در آن $A_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ ماتریس $k \times n$ تشکیل شده از سطرهای $i_1, \ldots, i_k$ ماتریس $A$ است.

# کاربردها

## قاعده کرامر تعمیم‌یافته

### قضیه

فرض کنید $m \geq n$، $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $b \in R(A)$ (فضای ستونی $A$). در این صورت دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ دقیقاً یک جواب دارد اگر و فقط اگر $\mathrm{Gdet}(A) \neq 0$ باشد. در این حالت، جواب $x = (x_i)_{i=1}^{n}$ را می‌توان با قاعده کرامر تعمیم‌یافته به صورت زیر نمایش داد:

$$x_i = \frac{\mathrm{Gdet}(A_i)}{\mathrm{Gdet}(A)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

که در آن $A_i = (Ae_1, \ldots, Ae_{i-1}, b, Ae_{i+1}, \ldots, Ae_n)$.

# کاربردها

## نمایش زیرمجموعه‌ها در هندسه تصویری

### قضیه

فرض کنید $V \subseteq \mathbb{R}^m$ یک زیرفضای خطی حقیقی با پایه $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ باشد. در این صورت:

$$V = \{x \in \mathbb{R}^m | \operatorname{Gdet}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, x) = 0\}.$$

# کاربردها

**نتیجه**

اکنون گونه خطی کلی در فضای تصویری $\mathbb{R}^m$ را در نظر می‌گیریم. منظور از گونه خطی زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^m$ به شکل $V+\alpha_\circ$ است که در آن: - $\alpha_\circ \in \mathbb{R}^m$ یک بردار ثابت است - $V$ یک زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^m$ می‌باشد.

**نتیجه**

فرض کنید $\alpha_\circ \in \mathbb{R}^m$ و $V \subseteq \mathbb{R}^m$ یک زیرفضای خطی حقیقی با پایه $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ باشد. در این صورت:

$$V+\alpha_\circ = \{x \in \mathbb{R}^m | \operatorname{Gdet}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, x-\alpha_\circ) = \circ\}.$$

# کاربردها

## حجم جهت‌دار تعمیم‌یافته

### قضیه

فرض کنید $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^m$ مستقل خطی باشند و

$$P = \{\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i | 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$$

چندوجهی موازی تولید شده توسط $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ باشد. در این صورت:

$$GV(P) = |\operatorname{Gdet}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)|.$$

# کاربردها

## مثال ها

**مثال ۱.** برای یک بردار $\alpha \in \mathbb{R}^m$، مقدار $|\mathrm{Gdet}(\alpha)|$ دقیقاً برابر طول اقلیدسی معمولی بردار $\alpha$ است. اگر $\alpha \neq ۰$ باشد، علامت $\mathrm{Gdet}(\alpha)$ برابر با علامت اولین مؤلفه غیرصفر $\alpha$ است.

**مثال ۲.** برای دو بردار $\alpha_۱, \alpha_۲$ در $\mathbb{R}^۳$، مقدار $|\mathrm{Gdet}(\alpha_۱, \alpha_۲)|$ مساحت متوازی‌الاضلاع تشکیل شده توسط این دو بردار است. به عنوان مثال، اگر:

$$\alpha_۱ = (۳, ۴, ۲)^T, \quad \alpha_۲ = (۶, ۸, ۱)^T$$

آنگاه $\mathrm{Gdet}\begin{pmatrix} ۳ & ۶ \\ ۴ & ۸ \\ ۲ & ۱ \end{pmatrix} = -۱۵$، یعنی $GV(P) = ۱۵$. علامت منفی $-۱۵$ جهت‌گیری تصویر $\alpha_۱, \alpha_۲$ روی صفحه $xz$ را نشان می‌دهد.

# کاربردها

## حجم کوچکترین چندوجهی محدب $n$-بعدی

### نتیجه

فرض کنید $m \geq n$ و $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^m$ باشد. اگر $M$ کوچکترین چندوجهی محدب $n$-بعدی شامل مبدأ و این نقاط باشد، آنگاه حجم $M$ برابر است با:

$$V(M) = \frac{1}{n!} |\operatorname{Gdet}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)|.$$

# مراجع I

1. P.S. Abhimanyu, Defining the determinant-like function for $m$ by $n$ matrices using the exterior algebra, Advances in Applied Clifford Algebras, **23** (2013), 787-792.

2. M. Bayat, A bijective proof of generalized Cauchy–Binet, Laplace, Sylvester and Dodgson formulas, Linear and Multilinear Algebra,**70**(2022), 3220-3230.

3. C.E. Cullis, Matrices and Determinoids, Vol. 1–3, Cambridge Univ. Press, 1913–1925.

4. J. Giansiracusa and N. Giansiracusa, A Grassmann algebra for matroids, Manuscripta Mathematica, **156**(2018), 187–213.

# مراجع II

6. R. Hirota, The Direct Method in Soliton Theory, Cambridge, (2004).

7. M. Ishikawa and M. Wakayama, Applications of Minor Summation Formula III, Plücker Relations, Lattice Paths and Pfaffian Identities, J. Combin. Theory Ser. A, **113**(2006), 113-155.

8. M. Janjić, A Proof of Generalized Laplace's Expansion Theorem, Bull. Soc. Math. Banja Luka **15**(2008), 5-7.

9. V.N. Joshi, A Determinant for Rectangular Matrices, Bull. Australl. Math. Soc., **21**(1980), 137-146.

10. A. Kasman, K. Pedings, A. Reiszl and T. Shiota, Universality of

# مراجع III

11. M. Kleber, Plücker Relations on Schur Functions, Journal of Algebraic Combinatorics, **13**(2001), 199-211.

12. X. Lu, S. Mao, Z. Wang and Y. Zhang, A Generalized Determinant of Matrices and Applications, arXiv:2111.14840 [math.CA]29 Nov 2021.

13. A. Makarewicz, P. Pikuta and D. Szałkowski, Properties of the determinant of a rectangular matrix, Anna Makarewicz, Piotr Pikuta and Dominik Szałkowski, **68**(2014), 31-41.

14. A. Makarewicz, P. Pikuta and D. Szałkowski, Cullis–Radić determinant of a rectangular matrix, Anna Makarewicz, Piotr Pikuta and Dominik Szałkowski, **74**(2020), 31-41.

# مراجع IV

16. Y. Nakagami and H. Yanai, On Cullis' determinant for rectangular matrices, Linear Algebra and its Applications, **422**(2007), 422-441.

17. M. Radić, A definition of determinant of rectangular matrix, Glas. Mat. Ser. III **1**(1966), 17-22.

18. M. Radić, Areas of certain polygons in connection with determinants of rectangular matrices, Beiträge Algebra Geom. **49**(2008), 71-96.

19. M. Radić and R. Sušanj, Geometrical meaning of one generalization of the determinant of a square matrix, Glas. Mat. Ser.

# مراجع V

20. M. Radić and R. Sušanj, On determinants of rectangular matrices which have Laplace's expansion along rows, Glas. Mat., **29**(2012), 175-180.

21. P. Stanimirović and M. Stanković, Determinants of rectangular matrices and the Moore-Penrose inverse, Novi Sad J. Math, **27**(1997), 53-69.

22. M. Stojaković, Determinante nekvadratnih matrica, Vesnik DMNRS, **1-2**(1952), 9-12.

23. B. Tondu and P. Soueres, A Weak Generalized Inverse Applied to Redundancy Solving of Serial Chain Robots