

# مکانیک توپولوژیک

علی نجفی

najafi@iasbs.ac.ir

۵ بهمن ۱۳۹۸

## چکیده

پس از جایزه‌ی نوبل سال ۲۰۱۶، توجه گسترده‌ای به فاز(حالت) -های توپولوژیکی در سیستم‌های کوانتومی شده است. اخیراً معلوم شده است که این موضوع مختص سیستم‌های کوانتومی نیست و در سیستم‌های کلاسیکی هم می‌توان رد چنین رفتاری را مشاهده کرد. البته یک تفاوت وجود دارد. در مورد سیستم‌های کوانتومی، مواد واقعی مثل عایق‌های توپولوژیکی یافت شده‌اند که رفتار توپولوژیکی دارند. ولی سیستم‌های کلاسیکی که تاکنون در این حوزه مطالعه شده‌اند، سیستم‌هایی هستند که از کنار هم قرار گرفتن اجزا ماکروسکوپیکی و به گونه‌ای ساخته می‌شوند که سیستم مرکب به‌دست آمده در مجموع رفتار توپولوژیکی دارد. به این سیستم‌های کلاسیکی، فراماده گفته (metamaterial) می‌شود. البته به نظر نمی‌رسد محدودیتی بنیادی برای اینکه مواد واقعی با رفتار توپولوژیکی کلاسیکی یافت شوند، وجود داشته باشد. در این نوشته به صورت مقدماتی رفتار توپولوژیکی معرفی شده و یک نمونه‌ی مهم از فرامواد که این خواص را دارند بررسی می‌شود.

## ۱ مقدمه

مایکل بری می‌گوید: در علم همواره تمایل داریم روی بکر و ناب بودن ایده‌هایمان تاکید کنیم. این تمایل تا زمانی بی‌ضرر است که چشممان را روی این واقعیت که به ندرت مفاهیم از هیچ خلق می‌شوند، نبندد. البته روی سخن بری با خودش بوده، زمانی که پس از معرفی فاز معروف خودش (فاز بری) در سامانه‌های کوانتومی، به زودی توسط آقای هنی *J. H. Hannay* مطلع می‌شود که اثرهای هندسی مشابهی در مکانیک کلاسیک هامیلتونی هم قابل مطالعه شده است [۱]. در هر صورت نکته‌ی مورد اشاره‌ی بری همواره می‌تواند مورد توجه قرار گیرد. حالت‌های توپولوژیکی که اخیراً در سامانه‌های کوانتومی مورد توجه قرار گرفته‌اند، در سامانه‌های کلاسیکی هم وجود دارند. جالب است که این موضوع اخیر در ارتباط مستقیمی است با دوگانه‌ی بری-هنی که پیش از این معرفی شد. در سامانه‌های کوانتومی، از ساختار نواری الکترونها برای دسته‌بندی حالت‌های توپولوژیکی استفاده می‌شود. کلاس‌های متفاوت توپولوژیکی با وجود یا عدم وجود شکاف انرژی در طیف الکترونی سیستم‌های کوانتومی ارتباط دارند. در یک سیستم کشسان، دسته‌بندی مشابهی بر حسب ساختار طیف فونونی می‌توان ارائه کرد. در این نوشته با یک بحث کلی در مورد تقارن و توپولوژی به معرفی انتقال موازی و فاز بری می‌پردازیم. فاز بری معیاری برای توپولوژیک بودن فاز یک ماده در شرایط کوانتومی است. در ادامه با معرفی یک ساختار کشبستی (tensegrity) ساده به عنوان مدلی برای یک فراماده‌ی کلاسیکی (meta-material) با خواص توپولوژیکی، نشان می‌دهیم که چگونه شکاف فرکانسی در طیف فونونی سامانه ایجاد می‌شود و شکاف فرکانسی چه ارتباطی با حالت‌های لبه‌ای دارد. سال‌ها بود که تصور می‌کردیم تقسیم‌بندی فازهای (ترمودینامیکی) مواد بر مبنای نظریه‌ی لاندائو گینزبرگ و شکست خودبخودی تقارن، دسته‌بندی کامل و جامعی است. بحث تقارن به ناوردایی تحت تبدیلات مربوط می‌شود. مثلاً فازهای گاز، مایع، جامد، رسانا و عایق در مواد با وجود یا عدم وجود یک تقارن خاص در آنها دسته‌بندی می‌شوند. مثلاً در گذار فاز مایع-جامد، تقارن انتقالی و در گذار فاز به فاز ابرسیال، تقارن  $U(1)$  می‌شکند. همینطور توجه کنید که در پی شکست تقارن پیوسته، ناگزیر مدهای طول موج بلند گلدستون در فاز منظم دیده می‌شوند. اکنون با پیشرفت‌ها و اکتشاف مواد جدید، معلوم شده است که دسته‌بندی بر اساس شکست تقارن همیشه کارایی ندارد. فازهایی هستند که از شکست خودبخودی تقارنی حاصل نشده‌اند و تمیز آنها از یکدیگر بر مبنای خواص توپولوژیکی آنهاست.

ایده‌ی توپولوژی با تقارن متفاوت است. در بحث توپولوژی به تغییر شکل‌های پیوسته‌ی می‌پردازیم، مثل اینکه با تغییرات پیوسته‌ای می‌توانیم کره را به بیضی‌گون تبدیل کنیم ولی کره و چنبره به هم قابل تبدیل نیستند. توپولوژی کره و بیضی‌گون یکسان و هر دوی آنها با چنبره متفاوت هستند. برای تشخیص تقارن‌ها، مطالعه‌ی خواص موضعی سامانه کفایت می‌کند ولی برای تشخیص توپولوژی لازم است که سرتاسر سیستم در یک نگاه در نظر گرفته شود.

ماده‌ی ابرسانا شده، گزالترونی دوبعدی در میدان مغناطیسی خارجی که اثر کوانتومی هال را نشان می‌دهد و عایق‌های توپولوژیکی با رسانندگی سطحی از مثال‌های مشهور فازهای توپولوژیکی هستند. یکی از معیارهای مهمی که فازهای توپولوژیکی را مشخص می‌کند فاز بری است. به همین دلیل بحثمان را با معرفی این فاز هندسی ادامه می‌دهیم.

## ۲ فاز بری - انتقال موازی

تغییر سرتاسری (global) که با تغییر موضعی (local) بدست نمی‌آید، از بحث‌های مهمی است که تحت عنوان anholonomy شناخته می‌شود. مهمترین مثال ریاضی برای انهولونومی، موضوع انتقال موازی روی سطح بسته‌ای است که در فضایی غوطه‌ور است. انتقال موازی یک بردار در طول مسیر یک خمینه‌ی بسته ما را به نقطه‌ی اولیه و برداری جدید می‌رساند که با بردار اولیه زاویه می‌سازد. مقدار زاویه‌ی به دست آمده به زاویه‌ی انهولونومی معروف است و آن نیز به شعاع انحنای ذاتی سطح مربوط است. نشان داده می‌شود که مقدار عددی کل زاویه‌ی انهولونومی (که در زیر معرفی می‌شود) به توپولوژی سطح وابسته است. در انتقال موازی سعی می‌کنیم برداری را با قاعده‌ی خاصی که اجزای تغییرات موضعی در آن ننگنچیده است، منتقل کنیم و در نهایت شاهد تغییراتی خواهیم بود. تغییرات مشاهده شده از این طریق مشخصه‌ای سرتاسری خواهند بود. مثال فیزیکی از انهولونومی، فاز هندسی بری است. چون فاز بری به زبان انتقال موازی هم قابل بیان است، بحثمان را با جزییاتی از انتقال موازی ادامه می‌دهیم.

یادآوری می‌شود که کلمه‌ی هولونومی یا انهولونومی در مکانیک و در مورد قیدهای حرکتی هم استفاده می‌شود. قیدهایی هولونومیک هستند که می‌توانیم از آنها انتگرال گرفته و با استفاده از آن درجات آزادی سیستم را کاهش دهیم. قیدهای حرکتی انتگرال ناپذیر انهولونومیک هستند.

## انتقال موازی

رویه‌ای دلخواه با مسیر  $C$  روی آن را در نظر بگیرید. دستگاه متعامد  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  که در هر نقطه روی مسیر تعریف شده است را در نظر بگیرید. بردار یکه‌ی اول عمود بر سطح و دو دیگر مماس بر سطح هستند. نمادهای بکار رفته شده طوری استفاده شده‌اند که برای سطح کره یادآور دستگاه قطبی باشند. البته در حالت کلی تنها چیزی که مورد نظرمان است این است که راستای عمود بر سطح با  $\hat{r}$  و دو راستای دیگر به هر صورت دیگری هم می‌توانند انتخاب شوند. در یک نقطه‌ی دلخواه روی خم، دستگاه متعامد دلخواهی با راستاهای  $(\hat{r}, \hat{e}_1, \hat{e}_2)$  را در نظر بگیرید. این دستگاه متعامد را به صورت موازی روی خم منتقل می‌کنیم. یعنی آنرا طوری انتقال می‌دهیم که سرعت زاویه‌ای آن دستگاه متحرک که با  $\Omega$  نشان داده می‌شود در راستای  $\hat{r}$  مولفه‌ای نداشته باشد. در واقع انتقال موازی با میزان چرخش موضعی حول راستای عمود بر سطح سنجیده می‌شود و شرط:  $\Omega \cdot \hat{r} = 0$  موازی بودن انتقال را می‌رساند. زاویه‌ای که در یک نقطه، دستگاه متعامد متحرک با دستگاه متعامد موضعی می‌سازد را با  $\alpha(x)$  نشان می‌دهیم که در آن متغیر  $x$  برای نشان دادن نقطه‌ی خاصی روی خم  $C$  استفاده شده است. واضح است که برای سطح صاف، زاویه‌ی مورد بحث کمیتی انتگرال‌پذیر است یعنی انتگرال تغییرات آن روی مسیر بسته صفر خواهد بود. این موضوع برای سطوح با خمیدگی ذاتی، نتیجه‌ای دیگر خواهد داشت. این موضوع را با کمی محاسبه به صورت فشرده‌ای بیان می‌کنیم. نمایش مختلط زیر کمک می‌کند که زاویه‌ی بین دستگاه متعامد متحرک و دستگاه متعامد موضعی را به صورت ساده‌تری بیان کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= (\hat{e}_1 + i\hat{e}_2)/\sqrt{2}, \\ \hat{n} &= (\hat{\theta} + i\hat{\phi})/\sqrt{2}, \quad \rightarrow \hat{\Psi} = e^{-i\alpha(x)}\hat{n}, \end{aligned} \quad (1)$$

شرط انتقال موازی را بصورت زیر هم می‌توان بیان کرد. یک انتقال موازی بی‌نهایت کوچک را در نظر بگیرید. در این صورت دستگاه متعامد به اندازه‌ی بی‌نهایت کوچک  $d\Psi = (d\hat{e}_1 + id\hat{e}_2)/\sqrt{2}$  تغییر می‌کند. تغییرات هر بردار دلخواه در حالت کلی

به صورت  $d\hat{e}_1 = \Omega \times \hat{e}_1$  است. برای انتقال موازی چون

$$\Omega \cdot \hat{r} = \Omega \cdot (\hat{e}_1 \times \hat{e}_2) = (\Omega \times \hat{e}_1) \cdot \hat{e}_2 = d\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$$

در نتیجه با ترکیب روابط اخیر، شرط انتقال موازی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\hat{\Psi}^* \cdot d\hat{\Psi} = 0.$$

پس تغییرات بی نهایت کوچک زاویه برابر می شود با:

$$d\alpha = \frac{1}{i} \hat{n}^* \cdot d\hat{n}$$

با جمع زدن روی تمام تغییرات زاویه روی یک مسیر بسته می بینیم که:

$$\alpha(C) = \frac{1}{i} \oint \hat{n}^* \cdot d\hat{n} = \frac{1}{i} \int_S \left( \frac{d\hat{n}^*}{dx_1} \cdot \frac{d\hat{n}}{dx_2} - \frac{d\hat{n}}{dx_1} \cdot \frac{d\hat{n}^*}{dx_2} \right) dx_1 dx_2$$

که در آن با استفاده از قضیه ی گاوس انتگرال خطی به انتگرال سطحی تبدیل شده است و  $x_1$  و  $x_2$  متغیرهایی هستند که برای پارامتری کردن سطح انتخاب شده اند و در حالت خاص می توانند  $\theta$  و  $\phi$  باشند. در حالت خاص و برای یک مسیر بسته ی دلخواه روی کره می بینیم که:

$$\alpha(C) = \frac{S}{R^2}$$

که در آن  $S$  مساحتی آن ناحیه روی کره و  $R$  شعاع کره است. از این مثال وابستگی زاویه ی انهلونومی به شعاع انحنای ذاتی دیده می شود.

اکنون مسیر بسته ی بی نهایت کوچکی را در نظر بگیرید. در این مورد انتگرال باید روی تمام سطح گرفته شود. می توان نشان داد:

$$\alpha(C) = 2\pi(2 - 2g)$$

که در آن  $g$  تعداد حفره هایی است که سطح بسته دارد. این عدد برای کره صفر و برای چنبره ۱ است. قضیه ی اخیر که به قضیه ی گاوس- بونه معروف است، معروفترین رابطه ای است که بصورت عددی بین سطوح با توپولوژی های مختلف تمایز قایل می شود.

شفاف سازی: برای محاسبه ی زاویه ی انهلونومی فرض کنید در نقطه ای روی کره ای ایستاده و میله ای را موازی سطح کره در دست گرفته اید. می خواهید آن را بصورت موازی در راستای مسیری انتقال دهید. طبق تعریف، بردار سرعت همواره در راستای مماس بر مسیر است پس در واقع شما سوار ماشینی شده اید که همواره در راستای مسیر مشخص شده پیش می رود. اگر شما روی یک دایره ی عظیمه مثل استوا (ژئودزیک) حرکت کنید، برای انتقال موازی میله کافیست آن را همواره در راستای سرعت  $v$  حرکت بگیرید. در نتیجه در انتهای مسیر و با برگشت به نقطه ی شروع هیچ تغییری در جهت گیری میله نسبت به راستای اول آن مشاهده نمی کنید و زاویه ی انهلونومی صفر است. برای تحقیق این حرف، کافیست توجه کنیم که در مورد این مثال، تغییرات بردار سرعت یعنی بردار شتاب  $a = \Omega \times v$  همواره در راستای عمود بر زمین است. چون بردار سرعت در راستای شرقی- غربی است پس بردار چرخش  $\Omega$  در راستای قطب شمال به قطب جنوب است. در نتیجه بردار چرخش در راستای عمود بر سطح زمین روی استوا مولفه ای ندارد و انتقال موازی برقرار است. واضح است که این اتفاق روی یک مدار دلخواه (غیر استوا) صحت ندارد. در واقع برای انتقال موازی میله روی این مدار نمی توانیم آنرا همواره در راستای سرعت بگیریم چون چرخش بردار سرعت همواره در راستای عمود بر سطح مولفه ای خواهد داشت. در واقع با حرکت جزیی ماشین مجبوریم اندکی روی ماشین میله را بچرخانیم تا چرخش ماشین را خنثی کنیم. پس انتظار داریم برای انتقال موازی روی یک مدار دلخواه زاویه ی انهلونومی مخالف صفر باشد.

## فاز بری

فرض کنید که هامیلتونی یک سیستم تابعی از متغیر خارجی وابسته به زمان  $B(t)$  به صورت  $\mathcal{H}(B(t))$  باشد [۲]. اگر تغییرات زمانی پارامتر خارجی خیلی آهسته باشد، سیستم مورد نظر همواره در ویژه حالت‌های هامیلتونی که به صورت  $|n(B)\rangle$  هستند قرار می‌گیرد. اگر در یک فرایند دوره‌ای، پارامتر وابسته به زمان هامیلتونی این سیستم به وضعیت اولیه‌اش بازگردد، حالت سیستم هم صرف‌نظر از یک فاز اضافی  $\gamma$  به وضعیت اولش باز می‌گردد. چون این فاز وابسته به شکل و نوع مسیر بسته‌ای است که در فضای پارامتری طی می‌شود، پس قابل اندازه‌گیری خواهد بود. برای استخراج رابطه‌ای برای این فاز به صورت زیر عمل می‌کنیم. تحول زمانی تابع موج و ویژه حالت‌های لحظه‌ای هامیلتونی با فرض آدیاباتیکی بودن تغییرات به صورت زیرند:

$$\begin{aligned} i\hbar|\dot{\Psi}\rangle &= \mathcal{H}|\Psi\rangle, \\ \mathcal{H}|n(B(t))\rangle &= E_n(B(t))|n(B(t))\rangle \end{aligned} \quad (۲)$$

می‌خواهیم شکل تابع موج در لحظه‌ای دلخواه را با شرط  $|\Psi(t=0)\rangle = |n(B(0))\rangle$  به دست آوریم. به سهولت دیده می‌شود که:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \int E_n(B(t')) dt' - i\gamma(t)} |n(B(t))\rangle$$

با جایگزاری مستقیم، فاز هندسی و غیردینامیکی در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{i} \dot{X} \cdot \langle n(B) | \nabla n(B) \rangle$$

برای یک مسیر بسته در فضای پارامتری که سامانه را به وضعیت اولیه بر می‌گرداند، فاز هندسی بری به صورت زیر داده می‌شود:

$$\gamma(C) = \frac{1}{i} \oint \langle n(B) | \nabla n(B) \rangle \cdot dB$$

از مقایسه با زاویه‌ی انولونومی می‌بینیم که فاز بری، زاویه‌ی انولونومی است. مشابه حالت قبل، انتگرال فاز بری روی کل سطح، به اعداد گسسته‌ای (عدد چرن) می‌انجامد که مشخص کننده‌ی توپولوژی سطح مورد نظر هستند.

ساده‌تری مثال، تحول اسپین در میدان مغناطیسی خارجی است. در این مورد هامیلتونی به صورت  $-JS \cdot B$  است که اسپین ذره می‌تواند صحیح یا نیمه صحیح باشد. در این مثال، راستای میدان مغناطیسی نقش پارامتر خارجی را دارد که روی یک کره تغییر می‌کند. نشان داده می‌شود که با تغییر راستای میدان از یک جهت اولیه به صورتی که به همان راستا بازگردد، تابع موج یک فاز اضافی کسب می‌کند. تغییرات جهت میدان به یک مسیر بسته روی دایره‌ی واحد هم‌ارز است. فاز اضافی کسب شده برابر با  $s\Omega$  است که در آن  $\Omega$  زاویه‌ی فضایی است که آن مسیر بسته را روی کره مشخص می‌کند.

یک مثال از اثرات هولونومی در فیزیک، تغییر قطبش لیزر درون فیبر نوری است که دور یک استوانه چرخیده است. فیبر تک مد مورد نظر یکبار دور یک استوانه چرخیده به طوری که راستای ابتدا و انتهای فیبر با هم موازی شده است. راستای قطبش خطی نور ورودی با راستای قطبش خطی نور خروجی از فیبر مورد بحث یکسان نیستند. تعبیر این موضوع بر مبنای مکانیک کوانتومی و اسپین فوتون‌ها قابل بیان است. قطبش خطی از ترکیب دو قطبش دایروی راستگرد و چپگرد به دست می‌آید. نور دایروی راستگرد متناظر با فوتون اسپین ۱ و چپگرد متناظر با اسپین -۱ است. مطابق توضیح چپا، قطبش راستگرد و چپگرد در گذر از فیبر نوری بالا فازهای بری متفاوتی می‌گیرند. در نتیجه‌ی ترکیب اولیه‌ی دو موج راستگرد و چپگرد که یک قطبش خطی خاصی را می‌دهند، پس از گذر از فیبر به ترکیب جدیدی تبدیل می‌شوند که قطبشی است خطی ولی در راستای متفاوت با راستای اولیه [۳]. معلوم شده است که توصیف آزمایش بالا بر مبنای فاز بری کوانتومی مخالفانی دارد [۴]. آنها با کوانتومی بودن موضوع موافق نیستند ولی این موضوع که پدیده‌ی مورد بحث یک اثر هندسی و قابل بیان بر حسب انتقال موازی بردارهای میدان الکتریکی و مغناطیسی در راستای فیبر نوری است را قبول دارند.

## ۳ حالت کوانتومی هال

حالت فیزیکی گاز الکترونی دو بعدی در میدان مغناطیسی خارجی قوی عمود بر سطح، مهم‌ترین و بصورت تاریخی جز اولین مثال‌ها از یک فاز توپولوژیک است. این سیستم در قالب رسانا و عایق نمی‌گنجد و یک فاز توپولوژیک است. در

مورد سیستم مورد بحث نشان داده شده است که رسانندگی غیر قطری (رسانندگی در راستای عمود بر جریان خارجی) بر حسب شدت میدان، بصورت پله‌ای رفتار می‌کند. از آن فراتر و مهم‌تر، اندازه‌ی پله‌های موجود در رسانندگی بسیار دقیق و غیر وابسته به جزئیات هندسی مرزها و ناخالصی‌ها است. حالت‌های الکترونی در این سیستم، ترازهای لانداو است که دارای تبه‌گنی هستند و فاصله‌ی بین ترازها به اندازه‌ی میدان وابسته است. در یک تصویر نیمه‌کلاسیک، الکترونها حول راستای میدان و در جهت راستگرد می‌چرخند. مدارهای دایره‌ای نزدیک مرزها را در نظر بگیرید. حرکت الکترونها مرزی روی نیم‌دایره‌های سیکلوترونی که به هم متصل شده‌اند انجام می‌شود. در واقع مدهای حرکتی مرزی که به آنها حالت‌های لبه‌ای می‌گوییم رسانا هستند و رسانش هم تنها در یک سوی خاص (راستگرد نسبت به جهت میدان) انجام می‌شود. چون حرکت‌های مجاز جهت مشخصی دارند پس وجود ناخالصی‌ها نمی‌تواند باعث پس‌راکنندگی شده و خواص تراپردی الکترون‌ها را تغییر دهد. پس پراکنندگی حالت‌های لبه‌ای وجود ندارد.

هرچند برخی از جنبه‌های اثر کوانتومی هال را با ترازهای لانداو می‌توان فهمید ولی پیشرفت اساسی در سال ۱۹۸۲ و توسط تالس، کوموتو، نایتینگل و دن‌نیس (TKNN) برداشته شد. آنها نشان دادند که رسانندگی بصورت زیر قابل بیان است:

$$\sigma_{xy} \sim \frac{e^2}{h} \sum_{\epsilon_{\mu k} < \epsilon_F} \frac{i}{2\pi} \int d^3k \langle \nabla_k u_{\mu k} | \times | \nabla_k u_{\mu k} \rangle \cdot \hat{z}$$

که در آن جمع روی تمام باندهای انرژی و انتگرال روی بردار موج‌های مجاز منطقه‌ی اول بریلون انجام می‌شود. کلید مساله عبارت انتگرالی است که شبیه انتگرال زاویه‌ی انهولونومی است. بردار موج  $k$  در نمایش بلاخ نقش پارامتر خارجی را دارد که در محدوده‌ی ناحیه‌ی اول بریلون تغییر می‌کند. رسانندگی به انتگرال فاز بری در تمام ناحیه‌ی اول بریلون ربط دارد. از تناظر با بحث‌های قبلی، جواب انتگرال فوق، یعنی انتگرال کل زاویه‌ی انهولونومی، یک عدد گسسته است که به توپولوژی نوارهای انرژی بستگی دارد. در نتیجه، رسانندگی غیر قطری در آزمایش هال حتماً یک عدد گسسته است که در کوانتوم رسانندگی  $e^2/h$  ضرب شده است. میدان مغناطیسی در رابطه‌ی بالا کجاست؟ به صورت مستقیم در رابطه‌ی بالا میدان مغناطیسی دیده نمی‌شود. در محدوده‌ی یک پله‌ی رسانشی خاص با تغییر میدان مغناطیسی، ترازهای انرژی جوری تغییر می‌کنند که توپولوژی ترازها تغییر نکرده و عدد چرن ثابت می‌ماند. در گذار بین پله‌ها، با تغییر میدان ترازهای انرژی همدیگر را طوری قطع می‌کنند که توپولوژی ترازها و در نتیجه عدد چرن تغییر کند. سیستم گاز الکترونی دو بعدی در حضور میدان مغناطیسی در فازهای توپولوژیکی متفاوتی قرار می‌گیرد، پله‌های رسانندگی معرف این فازهای توپولوژیکی هستند.

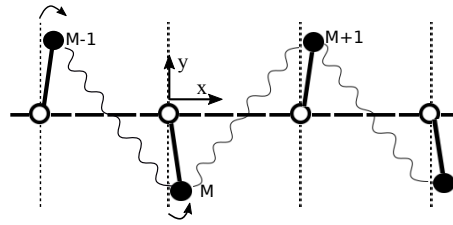
دو نکته‌ی مهم که شایان توجه‌اند: وجود حالت‌های لبه‌ای و شکسته شدن تقارن وارونی زمانی (به علت وجود میدان مغناطیسی) در این سامانه. در واقع هر دوی این موضوعات با توپولوژیکی بودن فاز سیستم مورد بحث ارتباط مستقیم دارند. حالت‌های لبه‌ای کایرال هستند، یعنی راستای انتشار مشخصی دارند که با میدان مغناطیسی ارتباط دارد. میدان مغناطیسی هم با شکسته شدن تقارن وارونی زمانی همراه می‌شود. ارتباط حالت‌های لبه با تقارن‌های موجود در سیستم‌های توپولوژیکی کوانتومی به صورت مفصلی بررسی شده است.

در مورد فاز توپولوژیکی هال، میدان مغناطیسی خارجی نقش اساسی دارد. ایده‌ای که بلافاصله مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان فازهای توپولوژیکی پیدا کرد که وجود آنها از دخالت عوامل خارجی نشأت نگرفته باشد؟ پاسخ این سوال به صورت تجربی معلوم شده است. کشف عایق‌های توپولوژیکی پاسخ مثبتی به این سوال است. این مواد و برهمکنش‌های بین ذره‌ای آنها (برهمکنش اسپین مدار) به گونه‌ای است که در حجم عایق هستند ولی روی مرزها حالت‌هایی دارند که بدون گپ و رسانا هستند. دینامیک این حالت‌های لبه‌ای در فازهای توپولوژیکی بدون گپ توسط تقارن‌هایی حمایت می‌شوند.

## ۴ مواد کلاسیکی با فاز توپولوژیکی

مطابق شکل، مجموعه‌ای از ذرات نقطه‌ای را در نظر بگیرید که از طریق میله‌ها و فنرهای بدون جرمی به هم وصل شده‌اند [۵، ۶]. میله‌های کوچک به طول  $r$  ذرات را به یک میله‌ی بزرگ اصلی وصل کرده‌اند و آنها آزادند تا حول نقاط اتصال و در صفحه‌ی ۲ بعدی بچرخند. نقاطی که میله‌ها به آن لولا شده‌اند، روی یک شبکه‌ی یک بعدی و با فواصل  $R$  قرار دارند. ذرات مجاور از طریق فنرهای کششی به هم جفت شده‌اند. در این حالت  $N$  ذره و  $N - 1$  فنر داریم. طول تعادلی فنرها (که یکسان است) طوری انتخاب شده است که سیستم مطابق شکل با میله‌هایی که یک‌درمیان بالا و پایین هستند، در وضعیتی تعادلی قرار دارد. در این صورت میله‌ها حول وضعیتی تعادلی شان نوسان‌های کوچک دارند. آیا فنرهای این سامانه در حد طول موج بلند دارای گپ هستند؟ در ادامه می‌بینیم که با انتخاب یک طول خاص برای میله‌ها، این سامانه‌ی کلاسیکی می‌تواند در یک فاز توپولوژیکی قرار بگیرد که در آن برانگیختگی‌های طول موج بلند سامانه دارای شکاف فرکانسی هستند. در این فاز

توپولوژیکی سامانه دارای مدهای لبه‌ای خواهد بود.



شکل ۱: مجموعه‌ای از چرخنده‌های جفت شده.

### طیف نوسانات شبکه

پیش از پرداختن به جزئیات سیستم ساده‌ی بالا، فرمول‌بندی کلی‌تری را برای محاسبه‌ی طیف نوسانات بررسی می‌کنیم. مجموعه‌ای از  $N$  ذره به جرم  $m$  را در نظر بگیرید که در فضای  $d$  بعدی توسط فنرهای کششی به قدرت  $k$  از طریق همسایه‌های نزدیک به هم وصل شده‌اند. تعداد فنرها برابر با  $N_b$  است و فرض می‌کنیم فنرها در نقطه‌ی اتصال به جرم‌ها لولا شده و آزادند تا بچرخند. می‌خواهیم نوسان‌های کوچک حول حالت تعادل را در این سامانه مطالعه کنیم. برای این منظور بردار نیروها متشکل از مولفه‌های دکارتی تمامی نیروهای وارد بر ذرات  $\vec{f}$ ، بردار تنش تمامی فنرها  $\vec{T}$ ، بردار کشش فنرها  $\vec{e}$  و بردار جابجایی ذرات  $\vec{u}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۷]:

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N_d} \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N_d} \end{bmatrix}, \quad \vec{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{N_b} \end{bmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{N_b} \end{bmatrix} \quad (۳)$$

که در آن بردار نیروها، برداری  $N_d = d \times N$  بعدی است. توجه شود که فنرها خطی فرض می‌شوند و یک رابطه‌ی خطی ساده بین تنش و کشش فنرها به صورت  $\vec{T} = -k\vec{e}$  وجود دارد. ساختار شبکه یک رابطه‌ی خطی بین جابجایی ذرات و کشش فنرها به صورت زیر به دست می‌دهد که از طریق ماتریس غیر مربعی  $Q$  داده می‌شود:

$$\vec{e} = Q^T \vec{u}, \quad (۴)$$

انرژی کشسانی این سامانه به صورت زیر می‌شود:

$$U = \frac{1}{2} k \vec{e}^T \vec{e} = \frac{1}{2} k \vec{u}^T Q Q^T \vec{u}.$$

پس نیروی وارد بر هر ذره به صورت زیر می‌شود:

$$\vec{f} = \frac{\delta U}{\delta \vec{u}} = -k Q \vec{e} = Q \vec{T}.$$

عناصر ماتریس  $Q$  را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \dots & Q_{1N_b} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \dots & Q_{2N_b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{N_d 1} & Q_{N_d 2} & Q_{N_d 3} & \dots & Q_{N_d N_b} \end{bmatrix}. \quad (۵)$$

اکنون معادله‌ی حرکت جرم‌ها به صورت زیر می‌شود:

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = \vec{f} = -k Q Q^T \vec{u}, \quad (6)$$

پس برای یافتن فرکانس‌های نوسانی سامانه باید معادله‌ی ویژه مقدراری زیر حل شود:

$$(-\omega^2 \mathcal{I} + Q Q^T) \vec{u} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

برای سهولت قرار داده‌ایم:  $k/m = 1$ .

دقت کنید که زیرفضای پوچ ماتریس  $Q^T$ ، جابجایی‌هایی را نشان می‌دهند که باعث فشردگی هیچ فنری نمی‌شوند:

$$Q^T \vec{u} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

به این حالت‌ها، مدهای حرکتی صفر می‌گوییم. دقت کنید که مطابق رابطه‌ی ۷، مدهای صفر، انرژی یا فرکانس صفر دارند. زیرفضای پوچ ماتریس  $Q$ ، متناظر با فشردگی‌هایی هستند که به ذرات نیرو وارد نمی‌کنند:

$$Q \vec{T} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

به این حالت‌ها، حالت‌های خود-فشرده می‌گوییم. حالت‌های خود-فشرده به ذرات نیرویی وارد نمی‌کنند.

## یادآوری ماتریس‌ها

ماتریس دلخواه  $A$  را در نظر بگیرید. رتبه‌ی ماتریس را با  $\text{rank} A$  نشان می‌دهیم و آن برابر ماکزیمم تعداد سطرهای (ستون‌های) مستقل خطی آن است. زیرفضای پوچ این ماتریس مجموعه‌ای از بردارهاست به صورتی که:  $Av = \mathbf{0}$  و آن را با  $\ker A$  نشان می‌دهیم. بعد فضای پوچ ماتریس را با  $\dim \ker A$  نشان می‌دهیم. داریم:

$$\dim \ker A + \text{rank} A = \text{number-of-columns}.$$

چون رتبه‌ی ماتریس‌های ترانهاده برابر است، پس برای ماتریس‌هایی که در بالا تعریف شده‌اند داریم:

$$\dim \ker Q^T - \dim \ker Q = N_d - N_b. \quad (10)$$

## چرخنده‌های جفت شده

اکنون بازگردیم به مثال ساده‌ی خودمان. کشیدگی طول فنرها نسبت به حالت تعادل را با  $\delta \ell_i$  و جابجایی جرم‌ها را با  $\delta \theta_i$  نشان می‌دهیم:

$$\vec{e} = \begin{bmatrix} \delta \ell_1 \\ \delta \ell_2 \\ \vdots \\ \delta \ell_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} \delta \theta_1 \\ \delta \theta_2 \\ \vdots \\ \delta \theta_N \end{bmatrix}, \quad (11)$$

حالت تعادل مطابق شکل طوری است که میله‌ها یک در میان بالا و پایین قرار گرفته‌اند و زاویه‌ای با راستای  $\hat{y}$  نمی‌سازند. البته با تغییر طول فنر حالت تعادل را طوری می‌توان ساخت که در آن میله‌ها هم‌چنان یک در میان بالا و پایین ولی زاویه‌ی مخالف صفر  $\bar{\theta}$  را با راستای  $\hat{y}$  بسازند. اجازه دهید نوسانات حول حالت تعادل  $\bar{\theta} \neq 0$  را بررسی کنیم. برای اینکه ماتریس

ساختاری  $Q$  را بیابیم، جابجایی‌های سه ذره‌ی خاص را در نظر بگیرید:

$$\vec{r}_m = \begin{bmatrix} r \sin \theta_m \\ -r \cos \theta_m \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{m+1} = \begin{bmatrix} R + r \sin \theta_{m+1} \\ r \cos \theta_{m+1} \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{m-1} = \begin{bmatrix} -R + r \sin \theta_{m-1} \\ r \cos \theta_{m-1} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

برای نوسان‌های کوچک داریم:

$$\theta_m = \bar{\theta} + \delta\theta_m$$

با خطی‌سازی داریم:

$$\vec{r}_m = \begin{bmatrix} r \sin \bar{\theta} \\ -r \cos \bar{\theta} \end{bmatrix} + r\delta\theta_m \begin{bmatrix} \cos \bar{\theta} \\ \sin \bar{\theta} \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{m+1} = \begin{bmatrix} R + r \sin \bar{\theta} \\ r \cos \bar{\theta} \end{bmatrix} + r\delta\theta_{m+1} \begin{bmatrix} \cos \bar{\theta} \\ -\sin \bar{\theta} \end{bmatrix}, \quad \vec{r}_{m-1} = \begin{bmatrix} -R + r \sin \bar{\theta} \\ r \cos \bar{\theta} \end{bmatrix} + r\delta\theta_{m-1} \begin{bmatrix} \cos \bar{\theta} \\ -\sin \bar{\theta} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

برای کشیدگی طول فنرها داریم:

$$\ell_m = |\vec{r}_{m+1} - \vec{r}_m| = \ell_0 + \delta\ell_m, \quad (14)$$

$$\delta\ell_m \sim \lambda_1 \delta\theta_{m+1} + \lambda_2 \delta\theta_m \quad (15)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = \frac{r \cos \bar{\theta} (R - \Upsilon r \sin \bar{\theta})}{\sqrt{R^2 + \Upsilon r^2 \cos^2 \bar{\theta}}}, \quad \lambda_2 = \frac{r \cos \bar{\theta} (-R - \Upsilon r \sin \bar{\theta})}{\sqrt{R^2 + \Upsilon r^2 \cos^2 \bar{\theta}}} \quad (16)$$

در نتیجه ماتریس  $Q^T$  به صورت زیر می‌شود:

$$Q_{(N-1) \times N}^T = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \lambda_2 & \lambda_1 & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \lambda_2 & \lambda_1 & \cdot & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

و برای ماتریس مربعی  $D = QQ^T$  داریم:

$$D = QQ^T = \begin{bmatrix} \lambda_2^2 & \lambda_1 \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & \lambda_1 \lambda_2 & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1^2 + \lambda_2^2 & \lambda_1 \lambda_2 & \cdot & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

برای یافتن طیف فرکانسی سامانه، معادله‌ی ویژه مقدراری زیر را حل می‌کنیم:

$$\sum_{\beta} (D_{\alpha\beta} - \omega^2 \delta_{\alpha\beta}) \delta\theta_{\beta} = \sum_{\beta} N_{\alpha\beta} \delta\theta_{\beta} = 0, \quad (19)$$

که در آن:

$$N_{\alpha\beta} = N_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} + N_{\cdot} (\delta_{\alpha, \beta+1} + \delta_{\alpha, \beta-1}), \quad (20)$$



که ضرایب برای مقادیر غیر مرزی برابرند با:

$$N_\alpha = N_B = \lambda_1^\gamma + \lambda_2^\gamma - \omega^\gamma, \quad N_\bullet = \lambda_1 \lambda_2, \quad (21)$$

و  $N_\alpha$  برای  $\alpha = 1, N$  برابر است با:

$$N_1 = \lambda_2^\gamma - \omega^\gamma, \quad N_N = \lambda_1^\gamma - \omega^\gamma. \quad (22)$$

برای یافتن طیف یک سیستم نامتناهی و حل معادله‌ی بالا به فضای فوریه می‌رویم. برای این منظور ابتدا توجه کنید که به جای متغیرهای  $\delta\theta_\beta$  که روی نقاط گسسته شبکه تعریف شده‌اند از متغیرهایی که در تمام نقاط به صورت  $\delta\theta(x_\beta)$  تعریف شده‌اند استفاده می‌کنیم.

تبدیل فوریه و عکس آن به صورت زیر می‌شود:

$$\delta\theta_\alpha = \delta\theta(x_\alpha) = \int \frac{dk}{\gamma\pi} \delta\tilde{\theta}(k) e^{ikx_\alpha}, \quad \delta\tilde{\theta}(k) = \int dx_\alpha \delta\theta(x_\alpha) e^{-ikx_\alpha}. \quad (23)$$

به سهولت می‌توان نشان داده که تقارنی به شکل  $\delta\tilde{\theta}(k) = \delta\tilde{\theta}(k + \frac{\gamma\pi}{R})$  وجود دارد. کفایت که توجه کنیم که در فضای مکان، بردارهای مکان تنها روی یک شبکه‌ی منظم با بردارهایی که مضرب صحیحی از  $R$  هستند تعریف شده است. این تقارن کارمان را راحت می‌کند. درواقع بنا به این تقارن، کفایت عدد موج در ناحیه‌ی اول بریلون  $-\pi/R \leq k \leq \pi/R$ ، مطالعه شود. با استفاده از تبدیل فوریه، معادله‌ی ویژه‌ی مقداردار سیستم نامتناهی به صورت زیر می‌شود:

$$\sum_\beta N_{\alpha\beta} \delta\theta_\beta = \int dx_\beta N(x_\alpha - x_\beta) \delta\theta(x_\beta) = \int_{-\pi/R}^{\pi/R} \frac{dk}{\gamma\pi} (N_B + N_\bullet (e^{ikR} + e^{-ikR})) \delta\tilde{\theta}(k) e^{ikx_\alpha} = 0, \quad (24)$$

که در آن از رابطه‌ی زیر استفاده کرده‌ایم:

$$N(x_\alpha - x_\beta) = \int_{-\pi/R}^{\pi/R} \frac{dk}{\gamma\pi} (N_B + N_\bullet (e^{ikR} + e^{-ikR})) e^{ik(x_\alpha - x_\beta)}.$$

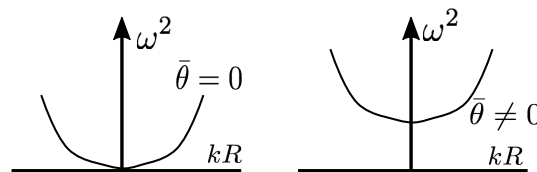
پس رابطه‌ی پاشندگی برای سیستم نامتناهی بصورت زیر می‌شود:

$$\omega^\gamma = \gamma \lambda_1 \lambda_2 \cos kR + (\lambda_1^\gamma + \lambda_2^\gamma), \quad (25)$$

$$\omega^\gamma = \frac{\gamma r^\gamma \cos^\gamma \bar{\theta}}{R^\gamma + \gamma r^\gamma \cos^\gamma \bar{\theta}} \left( (R^\gamma + \gamma r^\gamma \sin^\gamma \bar{\theta}) - (R^\gamma - \gamma r^\gamma \sin^\gamma \bar{\theta}) \cos(kR) \right), \quad (26)$$

$$\omega^\gamma = \frac{\gamma r^\gamma \cos^\gamma \bar{\theta}}{R^\gamma + \gamma r^\gamma \cos^\gamma \bar{\theta}} \left( \lambda \sin^\gamma \bar{\theta} + \left( \frac{\gamma}{\gamma} R^\gamma + \gamma r^\gamma \sin^\gamma \bar{\theta} \right) \times (kR)^\gamma + \dots \right), \quad (27)$$

رابطه‌ی پاشندگی به دست آمده برای مدهای درونی سامانه، رفتار جالبی برای حالت‌های  $\bar{\theta} = 0$  و  $\bar{\theta} \neq 0$  و در نزدیکی مرکز منطقه‌ی بریلون ( $k = 0$ ) دارد: در حالت  $\bar{\theta} \neq 0$  طیف فرکانسی شکافی نزدیکی  $k \sim 0$  دارد ولی برای  $\bar{\theta} = 0$  سامانه شکاف فرکانسی ندارد. این دو حالت، تفاوت‌های توپولوژیکی با هم دارند.



شکل ۲: طیف فونونی سیستم یک بعدی برای دو حالت متفاوت.

## حالت‌های لبه‌ای

وجود شکاف فرکانسی در طیف نوسانهای کوچک سیستم در ارتباط مستقیم با وجود حالت‌های لبه‌ای است. در سیستم کشبستی معرفی شده، حالت‌های لبه‌ای، حالت‌های نوسان-صفر (zero-mode) هستند. با استدلال‌های کلی و توجه به رابطه‌ی ۱۰، به راحتی می‌بینیم که تعداد در مورد مثال خاص مورد نظر ما که در بالا بررسی شد داریم  $d = 1$  و از آنجا دیده می‌شود که  $N = 1$  تا مد صفر یا مد لبه‌ای داریم. رابطه‌ی ۱۰ پیغام مهمی دارد، مطابق این رابطه‌ی تعداد مدهای صفر سامانه کمیتی است که ناوردای توپولوژیک است.

برای بررسی دقیق‌تر مدهای صفر سامانه، معادله‌ی زیر را حل می‌کنیم:

$$Q^T \delta \vec{\theta} = 0, \quad \delta \vec{\theta} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix},$$

با تعریف:

$$\epsilon = -\lambda_2 / \lambda_1 = \frac{R + 2r \sin \bar{\theta}}{R - 2r \sin \bar{\theta}}$$

داریم:

$$\alpha_n = \epsilon^{n-1} \alpha_1.$$

ابتدا جوابها را برای  $\bar{\theta} = 0$  بررسی می‌کنیم. در این صورت  $\epsilon = 1$  و داریم:

$$\delta \vec{\theta} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

یک حالت صفر داریم و آن حالتی است که کل میله‌ها را به یک اندازه بچرخانیم. این حالت صفر باعث فشردگی فنرها نمی‌شود، در نتیجه انرژی متناظر با آن صفر است. در واقع در این حالت سیستم متقارن است و این مد صفر همان مد گلدستون سامانه است.

برای حالتی که  $\bar{\theta} < 0$  است، دیده می‌شود که:  $\epsilon < 1$  و برای مقادیر خیلی کوچک  $\epsilon$  حالت صفر به صورت تقریبی زیر می‌شود:

$$\delta \vec{\theta} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \epsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

این حالت صفر، یک حالت لبه‌ای است که در سمت چپ سیستم جایگزیده است. این حالت لبه‌ای، حرکت آزاد میله‌ی سمت چپ را نشان می‌دهد که فنی را فشرده نمی‌کند در نتیجه انرژی سیستم را هم تغییر نمی‌دهد.

برای حالت  $\bar{\theta} > 0$  داریم  $\epsilon > 1$  و از آنجا برای  $\epsilon$  خیلی بزرگ داریم:

$$\delta\bar{\theta} = \alpha_N \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \epsilon^{-1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

در این صورت، حالت لبه‌ای در سمت راست سیستم جایگزیده است. اشاره شد، که حالت‌های  $\theta > 0$  و  $\theta < 0$  حالت‌هایی توپولوژیک هستند. وجود حالت‌های لبه‌ای در این فازهای توپولوژیکی از خواص بالک سیستم قابل فهم‌اند. در بالا اشاره شد که تعداد حالت‌های لبه‌ای یک سیستم محدود ارتباط مستقیمی با خواص بالک همان سیستم زمانی که نامتناهی است، دارد. علاوه بر این موضوع دامین وال (مرز بین حوزه‌ها) هم در مورد سیستم ۱ بعدی بالا بسیار مهم است. فرض کنید دو زیر سیستم با توپولوژی متفاوت ( $\theta > 0$  و  $\theta < 0$ ) به هم پیوند داده شده‌اند. در نقطه‌ای اتصال که توپولوژی عوض می‌شود چاره‌ای جز این نیست که گپ فرکانسی هم بسته شود. در سمت راست و چپ گپ داریم ولی در نقطه‌ای اتصال گپ نداریم. در نتیجه در این نقطه، مدهای صفری داریم که به آزادی حرکت می‌کنند. حرکت این مرز در راستای سیستم انرژی به همراه ندارد. در واقع رسانندگی فونونی (گرمایی) این سامانه از طریق تشکیل دیواره‌های بین حوزه‌ای و حرکت آنها صورت می‌گیرد. تناظر با سیستم‌های کوانتومی جالب توجه است. به راحتی می‌توانید ببینید که طیف فونونی این سامانه (وقتی نامتناهی است) با قطری کردن هامیلتونی زیر نیز قابل استحصال است:

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \cdot & \mathcal{Q} \\ \mathcal{Q}^T & \cdot \end{bmatrix} \quad (28)$$

این هامیلتونی چون حقیقی است پس تقارن وارونی زمان را دارد و چون رابطه‌ای پادجابجایی بصورت  $\{\mathcal{H}, \tau\} = 0$  با ماتریس زیر دارد:

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

پس، ویژه مقادیرش حتما بصورت مثبت و منفی ظاهر می‌شوند. می‌توان نشان داد که طیف انرژی این هامیلتونی ۳ تقارن مهم در فضای بردار موج دارد: نسبت به محورهای  $\omega = 0$  و  $k = 0$  تقارن آینه‌ای و نسبت به نقطه‌ی  $\omega = k = 0$  تقارن مرکزی دارد. این تقارن‌ها در مدل کوانتومی SSH هم وجود دارد که در دسته‌ی تقارنی BDI قرار می‌گیرد. این مدل کوانتومی یکی از مهم‌ترین مدل‌هایی است که جزییات اتفاقات توپولوژیکی در آن به دقت مطالعه شده است. مدل SSH مدلی است که رسانندگی الکتریکی پلی‌مرهای رسانا را توضیح می‌دهد. افت و خیزهای موجود در سیستم باعث تولید دیواره‌های بین حوزه‌ای می‌شود و حرکت این دیواره‌ها اساس رسانندگی الکتریکی این پلی‌مرها است.

## مراجع

- [1] J. H. Hannay, Journal of Physics A: Mathematical and General 18.2, 221 (1985).
- [2] Michael V. Berry, Scientific American 259 (6), 26-34 (1988).
- [3] A. Tomita and R. Y. Chiao, Phys. Rev. Lett. 57, 937 (1986).
- [4] F. D. M. Haldane, comment on "observation of Berry's topological phase.", Phys. Rev. Lett. 59, 1788 (1987)
- [5] K. Sun, A. Souslov, X. Mao, T. C. Lubensky, PNAS 109, 12369 (2012).

- 
- [6] C. L. Kane, T. C. Lubensky, *Nature Physics* **10**, 39 (2013).
- [7] C. R. Calladine, *Int. J. Solids Structures* **14**, 161-172 (1978).