حرکت براونی و پخش

علی نجفی
najafi@iasbs.ac.ir

۲۹ آبان ۱۴۰۲

۱ حرکت براونی

مشاهدات تجربی رابرت براون، گیاه‌شناس اسکاتلندی در سال‌های ۱۸۲۷ میلادی نشان می‌داد که ذرات بسیار ریزی شبیه گرده‌های گیاهان وقتی روی آب غوطه‌ور می‌شوند، حرکات تصادفی دارند. براون برای مشاهده‌ی این حرکت‌ها از میکروسکوپ استفاده می‌کرد. این حرکات که بصورت جست‌وخیزهای تصادفی در راستاهای مختلف صورت می‌گیرد، آن چنان است که باعث پخش شدن ذرات روی آب می‌شد. منظور از پخش این است که اگر در ابتدا مقداری از این دانه‌ها را در مرکز میدان دید میکروسکوپ قرار دهیم، به مرور و با گذشت زمان ذرات در راستاهای مختلف از مرکز دور می‌شوند. منشا این حرکات برای سالهای متمادی مورد مناقشه بود. ابتدا تصور می‌شد این ذرات ممکن است زنده باشند و حرکات مشاهده شده ناشی از فعالیت حیاتی آنها باشد. یا تصور می‌شد حرکت‌های همرفتی آب باعث این جست‌وخیزها می‌شوند. نمونه‌هایی درون شیشه‌هایی برای یک سال نگهداری شد ولی گذر زمان تغییری ایجاد نکرد. نمونه‌های مختلفی استفاده شد، معلوم شد که ذرات کوچک از هرجنسی این حرکات تصادفی را نشان می‌دهند. در نتیجه فرضیه‌ی زنده بودن رد شد. با مشاهدات بیشتر معلوم شد که حرکت جست‌وخیزی دو ذره‌ی نزدیک به هم از یکدیگر مستقل است. در نتیجه فرضیه‌ی حرکت همرفتی نیز رد شد. الان می‌دانیم که اتفاقی مشابه برای مولکول‌های عطر می‌افتد وقتی که بوی عطر در فضا پخش می‌شود.

در سال‌های حدود ۱۸۷۰ میلادی، نظریه‌ی جنبشی گازها توسط ماکسول، بولتزمن و کلاسیوس توسعه داده می‌شد. فرض ایشان این بود که گازها ساختار دانه‌ای (مولکولی) دارند و این مولکول‌ها در حرکت‌های پیوسته و برخورد با یکدیگرند. البته هنوز این مولکول‌ها بصورت مستقیم مشاهده نشده بودند. به مرور این ایده که مایعات هم ساختار دانه‌ای دارند شکل می‌گرفت. ایده این بود که ممکن است ضربات تصادفی ناشی از دانه‌های تشکیل دهنده‌ی آب، باعث جست‌وخیز گرده غوطه‌ور شود.

در واقع انیشتین اولین فردی بود که در سال ۱۹۰۵ با فرض ساختار دانه‌ای برای مایعات، توانست موضوع حرکت براونی را توصیف کند. در همان سالها و کم‌وبیش مصادف با انیشتین، اسمولکوفسکی هم بصورت مستقل حرکت براونی را توصیف کرد. موفقیت اصلی حرف انیشتین در این است که برای اولین بار در قالب یک محاسبه‌ی نظری و با کمک یک آزمایش، ساختار دانه‌ای (مولکولی) مایعات البته به صورت غیر مستقیم مورد تایید قرار می‌گیرد.

آنچه اندازه‌گیری می‌شود

در آزمایش براون، مسافت و زمان پخش شدن قابل مشاهده و اندازه‌گیری است. زمان متوسط لازم برای اینکه ذره‌ی براونی برای اولین بار در نقطه‌ای با فاصله‌ی Δx از مکان اولیه دیده شود را با T نشان می‌دهیم. این زمان را زمان اولین گذر به فاصله‌ی Δx می‌نامیم. این سوال را طور دیگری هم می‌توانیم بپرسیم. بعد از گذشت زمان T، ذره‌ی براونی به دورترین نقطه‌ای که می‌تواند سر بزند بطور متوسط چقدر از نقطه‌ی شروع فاصله دارد؟ توجه کنید که برای اندازه‌گیری متوسط زمان یا متوسط فاصله‌ی پخش شده از مشاهده‌ی تعداد زیادی ذره استفاده می‌کنیم. آزمایش نشان می‌دهد که رابطه‌ی خطی ساده‌ای بین توان دوم مسافت و زمان پخش شدن بصورت $(\Delta x)^۲ = ۲DT$ برقرار است. به ثابت تناسب D در رابطه‌ی بالا، ثابت پخش گفته می‌شود. توجه کنید که در بحث بالا تنها در مورد مولفه‌ی x مکان بحث کرده‌ایم. همین بحث در مورد مولفه‌ی y هم قابل

بررسی است. در این صورت و برای سامانه‌ی همسانگرد دلیلی نداریم که ثابت پخش در راستاهای مختلف با هم فرق داشته باشند.

روشی که در بالا برای محاسبه‌ی زمان اولین گذر و استخراج ثابت پخش از آن مطرح شد را بصورت دیگری نیز می‌توان مطرح کرد. فرض کنید مشخصات مسیر حرکت ذره‌ی براونی را در تابع $x(t)$ برای $۰ < t < t_{\max}$ ذخیره کرده‌ایم. در اینجا برای سهولت تنها یک مولفه از مکان را در نظر می‌گیریم. این کار را می‌توانیم برای تعداد زیادی ذره‌ی براونی انجام دهیم. اکنون می‌توانیم از رابطه‌ی زیر

$$\Delta x(T) = \sqrt{< (x(T) - x(۰))^۲ >}$$

را برای هر $۰ < T < t_{\max}$ بدست آوریم. در رابطه‌ی بالا متوسط‌گیری روی ذرات براونی انجام می‌شود. ضریب پخش، شیب تابع $(\Delta x(T))^۲$ برحسب T بصورت $(\Delta x(T))^۲ = ۲DT$ است.

انیشتین در سال ۱۹۰۵ نشان داد که ضریب پخش بصورت

$$D = \frac{k_B T}{\zeta}$$

به دمای مایع T و ضریب اصطکاک ذره‌ی براونی $\zeta = ۶\pi\eta a$، بستگی دارد. در اینجا η ویسکوزیته‌ی مایع و a شعاع ذره‌ی براونی است. بلافاصله پس از انیشتین، ژان پرن در ادامه‌ی کار انیشتین و با مطالعه‌ی تجربی پخش، عدد آوگادرو را اندازه گرفت. توجه کنید که با اندازه گیری ضریب پخش و دانستن ضریب اصطکاک، عملا ثابت بولتزمان بدست می‌آید. از طرف دیگر با دانستن ثابت عمومی گازها که از مطالعه‌ی معادله‌ی حالت گازها بدست می‌آید، می‌توانیم طبق رابطه‌ی $N_۰ = R/k_B$ عدد آوگادرو را بدست آوریم.

۲ تفسیر ماکروسکوپیک پخش

مجموعه‌ای از ذرات براونی با تابع چگالی $c(x,t)$ را در نظر بگیرید. این تابع چگالی در معادله‌ی پیوستگی زیر صدق می‌کند:

$$\partial_t c(x,t) + \partial_x j(x,t) = ۰$$

که در آن چگالی جریان ذرات براونی با $j(x,t)$ نشان داده شده است. به ۲ دلیل ذرات می‌توانند جریان خالص داشته باشند. اولا به دلیل حرکت براونی و پخش، ذرات تمایل دارند از ناحیه‌ی چگال به ناحیه‌ی کم‌چگال حرکت کنند. این موضوع بصورت مستقیم از مشاهده‌ی حرکت تصادفی ذرات نتیجه می‌شود. از طرف دیگر اگر نیروی خارجی باشد، باعث سوق ذرات می‌شود. با در نظر گرفتن این دو عامل، چگالی جریان بصورت زیر می‌شود:

$$j(x,t) = -D\partial_x c(x,t) + vc(x,t)$$

که در آن D ضریب پدیده‌شناختی پخش و v سرعت سوق به دلیل نیروی خارجی است. برای سرعت سوق رابطه‌ای به شکل $v = \zeta^{-۱} f = -\zeta^{-۱}\partial_x U$ در نظر بگیرید که در آن U پتانسیل خارجی است. در نهایت معادله‌ی تحول چگالی بصورت زیر می‌شود:

$$\partial_t c = D\partial_x^۲ c + \zeta^{-۱}\partial_x(c\partial_x U).$$

به این رابطه، معادله‌ی پخش گفته می‌شود.

موضوع جالب، بررسی حالت تعادل است. در حالت تعادل انتظار داریم $\partial_t c = ۰$ و ا آنجا برای یک سیستم نامتناهی باید $j_{\text{eq.}} = ۰$. از طرف دیگر انتظار داریم در حالت تعادل چگالی با پتانسیل بصورت $c_{\text{eq.}}(x) \sim c_۰ \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right)$ مربوط باشد. با در نظر گرفتن این ملاحظات، می‌بینیم که باید رابطه‌ای به شکل زیر بین ضریب پخش، دما و ضریب اصطکاک برقرار شود:

$$D = \frac{k_B T}{\zeta}.$$

موضوعی که در نهایت باید به آن توجه کرد این است که ضریب پخشی که در مدل پدیده شناختی این قسمت تعریف شد،

همان ضریب پخش قسمت قبل است که با اندازه‌گیری حرکت براونی یک ذره تعریف شده بود. برای این منظور فرض کنید تنها یک ذره داریم و در لحظه‌ی $t = ۰$ آنرا در $x = ۰$ قرار داده‌ایم. در این صورت تابع $c(x,t)$ تعبیر چگالی احتمال حضور ذره است. با توجه به شرط گفته شده داریم: $c(x,۰) = \delta(x)$، همانطور که انتظار داریم نرمالیزه هم هست. نشان دهید معادله‌ی دیفرانسیل پخش با شرط اولیه‌ی $c(x,۰) = \delta(x)$ جوابی بصورت زیر خواهد داشت:

$$c(x,t) = \frac{۱}{\sqrt{۴\pi Dt}} \exp^{-\frac{x^۲}{۴Dt}},$$

که فرض کرده‌ایم هیچ نیروی خارجی نداریم. با توجه به تعریفی که برای Δx داشتیم، بصورت زیر عمل می‌کنیم:

$$[\Delta x]^۲ = \int dx x^۲ c(x,T) = ۲DT.$$

رابطه‌ی اخیر تناظر ضریب پدیده‌شناختی پخش در توصیف ماکروسکوپیک و ضریب تناسب آزمایش براون را نشان می‌دهد.

۳ توصیف میکروسکوپیک: معادله‌ی لانژون

می‌خواهیم معادله‌ی حرکت ذره‌ی براونی را بنویسیم. سوال این است که چه نیروها و بصورت دقیق‌تر، چه اطلاعاتی برای نوشتن این معادله نیاز داریم؟ ذره‌ی براونی جرم m دارد و تحت تاثیر ضربات تصادفی مولکولهای آب است. در این صورت قاعدتا در معادله‌ی حرکتش جمله‌ی اینرسی و یک نیروی تصادفی وجود دارد. برای نوشتن معادله‌ی حرکت و برای سهولت تنها به یک مولفه‌ی مکان ذره توجه می‌کنیم و آن را با $x(t)$ نشان می‌دهیم. معادله‌ای به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$m\ddot{x}(t) + \zeta \dot{x}(t) = f(t), \qquad (۱)$$

چه اطلاعاتی از نیروی تصادفی $f(t)$ داریم؟ چرا نیروی اصطکاک مایع را نیز جداگانه آورده‌ایم، مگر نیروی اصطکاک از جانب مولکولهای مایع ناشی نمی‌شود و در نیروی تصادفی گنجانده نشده است؟ نیروی تصادفی مجموعه‌ای از ضربات است که بصورت آنی و بصورت کاملا تصادفی وارد می‌شود. متوسطش صفر و فارغ از هرگونه همبستگی زمانی است. قدرت این ضربات تصادفی با دمای مایع متناسب است. در واقع نیروی تصادفی تنها به مشخصه‌های فیزیکی مایع بستگی دارد. در نتیجه اطلاعاتی از پدیده‌های اتلافی و مثلا ضریب اصطکاک ذره در آن وجود ندارد. به همین دلیل مجبوریم نیروی اصطکاک را بصورت جمله‌ی جداگانه‌ای وارد کنیم. توجه کنید در صورت نبودن جمله‌ی اصطکاک، ضربات متوالی از جانب مولکولهای مایع باعث شتاب و افزایش لحظه به لحظه‌ی سرعت ذره می‌شوند. وجود همزمان نیروی تصادفی و جمله‌ی اتلافی باعث می‌شود، ذره‌ی براونی بتواند بعد از مدتی با مایع به تعادل گرمایی برسد. با در نظر گرفتن ضریب اصطکاک و جرم می‌توانیم یک زمان مشخصه بصورت $\tau = m/\zeta$ بسازیم. فرض کنید که یک ذره براونی را با شرایط اولیه‌ی خاصی روی مایع رها می‌کنیم. بعد از گذشت زمانی به اندازه‌ی τ، حافظه‌ی جهت یا سرعت اولیه‌ی حرکت به سبب نیروهای تصادفی از بین می‌رود. این مشاهده‌ی اخیر نیز لزوم وجود اتلاف برای برقراری تعادل را به اثبات می‌رساند. نکته‌ی مهم دیگر به اهمیت جمله‌ی اینرسی در معادله‌ی حرکت مربوط می‌شود. در شرایطی که جرم ذره کم باشد، در حقیقت اتلاف در برابر اینرسی غالب باشد، می‌توانیم از جمله‌ی جرم صرفنظر کنیم. در این صورت $\tau \to ۰$، و هرگونه حرکتی در ذره بصورت آنی با مایع به تعادل می‌رسد.

به معادله‌ی حرکت بالا که در آن نیروهای تصادفی و اصطکاک تواما باعث به تعادل رسیدن ذره‌ی براونی و مایع می‌شوند، معادله‌ی لانژون گفته می‌شود.

یک ذره‌ی برانی به شعاع $a = ۱\mu\mathrm{m}$ را در نظر بگیرید که در دمای اتاق با $k_BT = ۰/۰۲\mathrm{eV} \sim ۴ \times ۱۰^{-۲۱}\mathrm{J}$ روی مایعی مثل آب با ویسکوزیته‌ی $\eta = ۱۰^{-۳}\mathrm{Pa.s}$ قرار دارد. جرم این ذره چون تقریبا هم چگالی آب است برابر می‌شود با $m = (۴/۳)\pi a^۳ \rho \sim ۱۰^{-۲۱}\mathrm{Kg}$. ضریب اصکاک برابر می‌شود با $\zeta \sim ۱۰^{-۸}\mathrm{Kgs}^{-۱}$ و سرعت میانگین گرمایی از مرتبه‌ی $v_{\mathrm{rms}} \sim \sqrt{k_BT/m} \sim ۱\mathrm{ms}^{-۱}$ است. ضریب دیفیوژن برابر است با $D \sim ۱۰^{-۱۳}\mathrm{m}^۲\mathrm{s}^{-۱}$. زمان پخش برای مسافتی حدود $۱۰\mu\mathrm{m}$ یعنی ۱۰ برابر اندازه‌ی ذره، از مرتبه‌ی $۱۰^۳\mathrm{s}$ می‌شود. زمان همبستگی سرعت برابر می‌شود با $\tau \sim ۱۰^{-۱۳}\mathrm{s}$. مسافتی که ذره در زمان همبستگی با سرعت متوسط گرماییش می‌تواند طی کند از مرتبه‌ی $v_{\mathrm{rms}} \times \tau \sim ۱۰^{-۱۳}\mathrm{m}$ است که مسافت بسیار

کوتاهی است. معنی این موضوع این است که ذره براونی، اگر سرعت اولیه‌ای به بزرگی $v_{\rm rms}$ داشته باشد، به سرعت و پس از مسافت بسیار کوتاهی به تعادل با مایع اطرافش می‌رسد.

۴ حل معادله‌ی لانژون

معادله‌ی لانژون را بصورت $\dot{v}+v/\tau=f(t)/m$ با شرط اولیه‌ی $v(-\infty)=۰$ در نظر بگیرید. البته توجه کنید در ادامه و برای بدست آوردن اطلاعات مکان باید یکبار دیگر از معادله‌ی $\dot{x}=v(t)$ انتگرال بگیریم. در آن صورت شرط اولیه‌ی دوم را بصورت $x(۰)=۰$ در نظر خواهیم گرفت. نیروی $f(t)$ بصورت ضربات آنی تصادفی است. هم قدرت ضربات و هم توزیع فاصله‌ی بین ضربات تصادفی است. اگر بخواهیم آن‌را با یک تابع جایگزین کنیم، در این صورت برای آن تابع داریم:

$$\langle f(t)\rangle=۰,\quad \langle f(t)f(t+t')\rangle=A\delta(t'),\quad \langle\ldots\rangle=\frac{۱}{T}\int_{۰}^{T}\ldots dt.$$

متوسط‌هایی که در بالا تعریف شده‌اند، متوسط‌گیری زمانی هستند. اینجا با یک ذره‌ی براونی کار می‌کنیم، نیرویی که این ذره تجربه می‌کند و مکان و سرعتش تابعی از زمان هستند و می‌توانیم در مورد متوسط زمانی آنها صحبت کنیم. روش معادل دیگری نیز برای تحلیل حرکت براونی می‌توان تصور کرد که بر پایه‌ی مشاهده حرکت تعداد زیادی ذره است. در این دیدگاه، متوسط گیری از کمیات دینامیکی مثل مکان و سرعت با متوسط‌گیری روی ذرات بدست می‌آید. این روش دوم در مطالعه‌ی آزمایشگاهی پدیده‌ی پخش کارآیی دارد. روش سومی هم برای محاسبه‌ی متوسط‌ها وجود دارد. تعداد زیادی ذره‌ی فرضی را در نظر بگیرید که پخش می‌شوند. هر ذره در طول حرکتش یک تابع خاصی از نیروی تصادفی را تجربه می‌کند. تمام تحقق‌های ممکنه برای تابع نیرو را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع توزیع احتمال برای تحقق هر شکل خاص تابع نیرو را بصورت $\mathcal{P}[f(t)]$ داشته باشیم. در این‌صورت متوسط یک کمیت دینامیکی مانند $x(t)$ را بصورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$\langle x(t)\rangle=\int\mathcal{D}[f(t)]\mathcal{P}[f(t)]x(t).$$

می‌توان نشان داد که با انتخاب یک تابع توزیع مناسب برای تحقق‌های مختلف نیرو، متوسط‌گیری با این روش اخیر نتایج متوسط گیری زمانی را خواهد داد.

در ادامه با روش متوسط‌گیری زمانی می‌بینیم که چطور می‌توان ضریب نامشخص A را با شرط تعادل بدست آورد. با تغییر متغیر $v=e^{-t/\tau}w$ معادله‌ی لانژون بصورت

$$\dot{w}=\frac{۱}{m}e^{\frac{t}{\tau}}f(t),$$

می‌شود. با انتگرالگیری مجدد، در نهایت برای سرعت خواهیم داشت:

$$v(t)=\frac{۱}{m}\int_{-\infty}^{t}dt'e^{\frac{t'-t}{\tau}}f(t').$$

اکنون با استفاده از این جواب می‌توانیم $(۱/۲)m<v^۲>$ را حساب کرده و آن را برابر با $(۱/۲)k_BT$ قرار دهیم. با انجام این محاسبه، می‌بینیم که $A=۲\zeta k_BT$. اکنون با دانستن سرعت می‌توان یکبار دیگر از آن انتگرال گرفت تا مکان بدست آید. با شرط اولیه‌ی $x(۰)=۰$ خواهیم داشت:

$$x(t)=\frac{۱}{m}\int_{۰}^{t}dt_۱\int_{-\infty}^{t_۱}dt_۲e^{\frac{t_۲-t_۱}{\tau}}f(t_۲).$$

اکنون $<[x(t)-x(۰)]^۲>$ را محاسبه می‌کنیم:

$$<[x(t)-x(۰)]^۲>=\frac{۱}{m^۲}\int_{۰}^{t}dt_۱\int_{-\infty}^{t_۱}dt_۲\int_{۰}^{t}dt_۳\int_{-\infty}^{t_۳}dt_۴e^{\frac{t_۲+t_۴-t_۱-t_۳}{\tau}}<f(t_۲)f(t_۴)>,$$

داریم:

$$< [x(t)-x(0)]^2 >= \frac{2\zeta k_B T}{m^2}\int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_0^t dt_3 \int_{-\infty}^{t_3} dt_4 e^{\frac{t_2+t_4-t_1-t_3}{\tau}}\delta(t_2-t_4),$$

نمی‌توان بسهولت انتگرال روی t_4 را با کمک تابع دلتا دیرک گرفت. علت این است که مطمئن نیستیم لزوما t_2 از t_3 کوچکتر باشد یا درواقع t_2 در محدوده‌ی انتگرالگیری t_4 باشد. تغییر حدود انتگرالگیری بصورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_3 = 2\int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_1,$$

با این تغییر متغیر مشکل بالا حل می‌شود چون اولا $t_1 > t_2$ و طبق تغییر حدود بالا $t_3 > t_1$ در این صورت انتگرال‌گیری روی t_4 بسهولت انجام می‌شود.

$$< [x(t)-x(0)]^2 >= \frac{4\zeta k_B T}{m^2}\int_0^t dt_3 \int_0^{t_3} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{\frac{2t_2-t_1-t_3}{\tau}},$$

با ادامه‌ی محاسبه می‌بینیم که:

$$< [x(t)-x(0)]^2 >= 2\frac{k_B T}{\zeta}[t+\tau(e^{-t/\tau}-1)],$$

در حد $t \gg \tau$ به رابطه‌ی آشنای $< [x(t)-x(0)]^2 >= 2Dt$ می‌رسیم.

تابع همبستگی سرعت، کمیت مهم دیگری است که می‌توان بررسی کرد. تعریف می‌کنیم $R(t_1) =< v(t)v(t+t_1) >$ و می‌توان دید که این تابع همبستگی در معادله‌ی لانژون بصورت زیر صدق می‌کند:

$$\dot{R} + \frac{R}{\tau} = 0, \quad R(0) =< v^2 >= \frac{k_B T}{m}.$$

نتیجه‌ی حل این معادله جوابی بصورت $R(t) = (k_B T/m)e^{-t/\tau}$ می‌دهد. از اینجا معلوم می‌شود که زمان مشخصه‌ی τ، زمانی است که همبستگی سرعت با خودش در آن زمان حفظ می‌شود. برای زمان‌های بزرگتر از این زمان مشخصه، همبستگی سرعت از بین می‌رود.

۵ حل معادله‌ی لانژون - تبدیل فوریه

گاهی تمایل داریم معادله‌ی لانژون را در فضای فوریه مطالعه کنیم. در صورتی که به دو موضوع مهم توجه کنیم، این کار امکان پذیر است. اول اینکه باید ساختار علّی در انتشار زمانی اثرهای فیزیکی به درستی لحاظ شود. دوم اینکه به جای متوسط گیری‌های زمانی از متوسطگیری روی تمام تحققهای ممکنه برای نیروی تصادفی استفاده شود. بحث بیشتر در مورد حفظ ساختار علّی بعدا انجام می‌شود. تبدیل فوریه‌ی هر تابع وابسته به زمان $x(t)$ را با $\tilde{x}(\omega)$ نشان می‌دهیم. داریم:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\tilde{x}(\omega)e^{-i\omega t}, \quad \tilde{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t)e^{i\omega t}, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t} = \delta(t),$$

که رابطه‌ی آخر، نمایش انتگرالی تابع دلتای دیرک است. با توجه به اینکه متغیر مورد نظرما $x(t)$ حقیقی است، می‌توان دید که تبدیل فوریه‌اش باید خاصیت $\tilde{x}^*(\omega) = \tilde{x}(-\omega)$ را داشته باشد.

واضح است که معادله‌ی لانژون بر حسب تبدیل فوریه‌ی سرعت ذره بصورت $(-im\omega+\zeta)\tilde{v}(\omega) = \tilde{f}(\omega)$ است. البته مکان ذره با دانستن سرعت بصورت $\tilde{x}(\omega) = (-i\omega)^{-1}\tilde{v}(\omega)$ بدست می‌آید. همبستگی نیروی تصادفی در فضای فوریه به شکل زیر می‌شود:

$$\langle \tilde{f}(\omega)\tilde{f}(\omega')\rangle = 2\pi A\delta(\omega+\omega').$$

برای بدست آوردن ثابت A مطابق قبل از شرط تعادل $\langle v^2(t)\rangle = k_BT/m$ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned}\langle v^2(t)\rangle &= \int\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d\omega'}{2\pi}e^{-i(\omega+\omega')t}\frac{\langle\tilde f(\omega)\tilde f(\omega')\rangle}{(-im\omega+\zeta)(-im\omega'+\zeta)}\\ &= \frac{A}{m^2}\frac{\tau}{2i}\int\frac{d\omega}{2\pi}\left(\frac{1}{\omega-\frac{i}{\tau}}-\frac{1}{\omega+\frac{i}{\tau}}\right)\\ &= \frac{A}{2m\zeta},\end{aligned} \tag{2}$$

در نتیجه داریم: $A = 2\zeta k_BT$. میانگین مربع جابجایی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\langle(x(t)-x(t'))^2\rangle &= \int\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d\omega'}{2\pi}\left(e^{-i(\omega+\omega')t}+e^{-i(\omega+\omega')t}-2e^{-i\omega t-i\omega't'}\right)\langle\tilde x(\omega)\tilde x(\omega')\rangle\\ &= \frac{4\zeta k_BT}{m^2}\int\frac{d\omega}{2\pi}\left(1-e^{-i\omega(t-t')}\right)\frac{1}{\omega^2(\omega^2+1/\tau^2)}\\ &= \frac{4\zeta k_BT}{m^2}\tau^2\int\frac{d\omega}{2\pi}\left(1-e^{-i\omega(t-t')}\right)\left(\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{(\omega^2+1/\tau^2)}\right)\\ &= -4\zeta k_BT\frac{\tau^2}{m^2}\left(\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{1-e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2+1/\tau^2}-(\tau\to\infty)\right)\\ &= \frac{2k_BT}{\zeta}\left(|t-t'|-\tau(1-e^{-|t-t'|/\tau})\right).\end{aligned} \tag{3}$$

۶ حرکت براونی در شاره‌ی ویسکوالاستیک

در بحث پیشین، شاره‌ای ساده‌ای که ضریب اتلاف در آن با عدد ثابت $\zeta = 6\pi\eta a$ داده می‌شود، بررسی شد. در یک شاره‌ی ویسکوالاستیک خطی، ضریب اتلاف با فرآیندهای حافظه‌داری که در شاره‌های ویسکوالاستیک رخ می‌دهد داده می‌شود. در این صورت و بصورت خیلی کلی نیروی اصطکاک با رابطه‌ای شبیه $\int_{-\infty}^{\infty}dt'\zeta(t-t')v(t')$ داده می‌شود، که در آن $\zeta(t-t')$ تابعی است با ساختار علّی که جزییات بیشتر آن به رفتار شاره بستگی دارد. در این صورت معادله‌ی لانژون صورت زیر می‌شود:

$$m\dot v(t)+\int_{-\infty}^{\infty}dt'\zeta(t-t')v(t') = f(t). \tag{4}$$

اگر ملاحظات مربوط به علی بودن تابع $\zeta(t)$ در نظر گرفته شود، می‌توانیم تبدیل فوریه‌ی آن را بصورت $\tilde\chi(\omega)$ استفاده کنیم. بصورت خلاصه، ملاحظات علّی بودن به این صورت است که ابتدا تبدیل فوریه‌ی $\zeta(t)$ را برای فرکانس موهومی $z=\omega+iy$ $(y>0)$ حساب می‌کنیم. تابع بدست آمده در نیم‌صفحه‌ی بالایی کاملا تحلیلی است. حال می‌توانیم قسمت موهومی فرکانس را به صفر برسانیم تا تبدیل فوریه‌ی معمول تابع پاسخ بصورت $\tilde\chi(\omega)=\lim_{y\to 0^+}\tilde\chi(z=\omega+iy)$ بدست آید.

اکنون بسهولت می‌توانیم از تبدیل فوریه برای حل معادله‌ی بالا استفاده کنیم:

$$\tilde v(\omega) = \frac{\tilde f(\omega)}{-im\omega+\tilde\zeta(\omega)}.$$

سوال این است که برای برقراری تعادل گرمایی، تابع همبستگی نیروی تصادفی چگونه باید باشد؟ در تعادل گرمایی باید $\langle v^2(t)\rangle = k_BT/m$ پس:

$$\langle v^2(t)\rangle = \int\frac{d\omega}{2\pi}\int\frac{d\omega'}{2\pi}e^{-i(\omega+\omega')t}\frac{\langle\tilde f(\omega)\tilde f(\omega')\rangle}{(-im\omega+\tilde\zeta)(-im\omega'+\tilde\zeta)}, \tag{5}$$

حدس می‌زنیم تابع همبستگی به شکل زیر

$$\langle \tilde{f}(\omega)\tilde{f}(\omega')\rangle = 2\pi A(\omega)\delta(\omega+\omega'),$$

بتواند تعادل را برقرار کند و سعی می‌کنیم تابع $A(\omega)$ را بدست آوریم.

$$\frac{k_BT}{m} = \langle v^2(t)\rangle \quad = \quad \int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{A(\omega)}{(-im\omega+\tilde{\zeta})(im\omega+\tilde{\zeta}^*)}, \tag{۶}$$

توجه شود که در رابطه‌ی بالا از این استفاده کرده‌ایم که چون تابع پاسخ در فضای زمان یک تابع حقیقی است باید تبدیل فوریه‌اش دارای خاصیت $\tilde{\zeta}^*(\omega) = \tilde{\zeta}(-\omega)$ باشد. برای گرفتن انتگرال بالا ابتدا متغیر انتگرالگیری را به صفحه‌ی موهومی با $\omega \to z$ گسترش می‌دهیم. اکنون توجه کنید که انتگرال‌ده در روی نیمدایره‌ی بینهایت به صفر همگراست پس می‌توانیم مسیر انتگرالگیری را به مسیر بسته‌ای که از محور حقیقی و نیمدایره‌ی بی‌نهایت (یعنی کل نیم‌صفحه‌ی بالایی) تشکیل شده است گسترش دهیم:

$$\frac{k_BT}{m} \quad = \quad \oint \frac{dz}{2\pi}\frac{A(z)}{(-imz+\tilde{\zeta})(imz+\tilde{\zeta}^*)}, \tag{۷}$$

اگر تابع حدسی A تحلیلی باشد و از آنجا که می‌دانیم تابع $\tilde{\chi}$ نیز در نیم‌صفحه‌ی بالایی حتما تحلیلی است، پس انتگرالده تنها در دو نقطه‌ی $imz_1 = \tilde{\zeta}(z_1)$ و $imz_2 = -\tilde{\zeta}^*(z_2)$ دارای قطب است. با بررسی قسمت‌های موهومی قطب‌ها معلوم می‌شود که در هر صورت یکی از قطب‌های در نیم‌صفحه‌ی بالا و دیگری در نیم‌صفحه‌ی پایینی است. اگر قرار دهیم $\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}' + i\tilde{\zeta}''$ و مثلا فرض کنیم $\tilde{\zeta}' > 0$، دیده می‌شود که قطب z_2 در نیم‌صفحه‌ی بالایی و دیگری در نیم‌صفحه‌ی پایینی است. در نتیجه کافیست مانده در روی قطب z_2 حساب شود:

$$\begin{aligned}\frac{k_BT}{m} \quad &= \quad \frac{1}{m^2}\oint \frac{dz}{2\pi}\frac{A(z)}{(z-\frac{\tilde{\zeta}}{im})(z+\frac{\tilde{\zeta}^*}{im})} \\ &= \quad \frac{1}{m^2}\frac{2\pi i}{2\pi}\frac{A(z_2)}{2i\frac{\tilde{\zeta}'}{m}},\end{aligned} \tag{۸}$$

واضح است که جانشانی $A = 2k_BT\tilde{\zeta}'$ ما را به نتیجه‌ی مطلوب می‌رساند. توجه شود که برای حالت $\tilde{\zeta}' < 0$ با استدلالهایی مشابه نتیجه‌ی نهایی حفظ خواهد شد. خلاصه:

$$\langle \tilde{f}(\omega)\tilde{f}(\omega')\rangle = 2k_BT\tilde{\zeta}'(\omega)(2\pi)\delta(\omega+\omega').$$

با بازگشت به فضای زمان داریم:

$$\begin{aligned}\langle f(t)f(t')\rangle \quad &= \quad 2k_BT\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{\tilde{\zeta}(\omega)+\tilde{\zeta}(-\omega)}{2}e^{-i\omega(t-t')} \\ &= \quad 2k_BT\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{1}{2}\tilde{\zeta}(\omega)\left(e^{-i\omega(t-t')}+e^{i\omega(t-t')}\right) \\ &= \quad 2k_BT\frac{1}{2}\left(\zeta(t-t')+\zeta(t'-t)\right) \\ &= \quad 2k_BT\zeta_{\rm e}(t-t'),\end{aligned} \tag{۹}$$

که در آن $\zeta_{\rm e}(\tau) = (1/2)(\zeta(\tau)+\zeta(-\tau))$ قسمت زوج تابع $\zeta(\tau)$ است.

با دانستن تابع همبستگی نیرو، می‌توانیم تابع همبستگی مکان در فضای فوریه را بصورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\langle \tilde{x}(\omega)\tilde{x}(\omega')\rangle = 2k_BT\frac{\tilde{\zeta}'(\omega)}{\omega^2(-im\omega+\tilde{\zeta}(\omega))(im\omega+\tilde{\zeta}^*(\omega))}(2\pi)\delta(\omega+\omega'). \tag{۱۰}$$

با ملاحظه‌ی سمت راست عبارت بالا، واضح می‌شود که در سمت چپ تنها جمله‌ی $\langle|\tilde{x}(\omega)|^{۲}\rangle = \langle\tilde{x}(\omega)\tilde{x}(-\omega)\rangle$ سهم غیر صفر دارد. معمولا تمایل داریم رابطه‌ی بالا را بصورت زیر برحسب طیف قدرت افت‌وخیزها که با $\mathcal{C}(\omega)$ نشان داده می‌شود، بنویسیم:

$$\langle\tilde{x}(\omega)\tilde{x}(\omega')\rangle = \mathcal{C}(\omega)(۲\pi)\delta(\omega+\omega'),$$

که در آن طیف افت‌خیزها بصورت زیر داده می‌شود:

$$\mathcal{C}(\omega) = ۲k_BT\frac{\tilde{\zeta}'(\omega)}{\omega^{۲}|-im\omega+\tilde{\zeta}(\omega)|^{۲}}.$$

در عمل معمولا با سری‌های زمانی گسسته سروکار داریم. در این صورت و در فضای فوریه با مجموعه‌ای از فرکانس‌های گسسته مواجهیم. اگر اختلاف فرکانس بین دو فرکانس مجاز متوالی را با $\Delta\omega$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\langle|\tilde{x}(\omega)|^{۲}\rangle = \frac{۲\pi}{\Delta\omega}\mathcal{C}(\omega).$$

۷ رئولوژی شاره‌های ویسکوالاستیک

از افت‌وخیزهای یک ذره‌ی آزمون می‌توان برای بررسی خواص رئولوژیک شاره‌ای که ذره در آن غوطه‌ور است استفاده کرد. برای اینکه ببینیم چطور اینکار امکان پذیر است، ابتدا بصورت مختصر در مورد خواص رئولوژیکی شاره‌ها صحبت می‌کنیم. خواص رئولوژیکی یک شاره با تابع پاسخ آن شاره داده می‌شود. در واقع با اعمال یک تنش برشی وابسته به زمان به شاره، می‌توانیم جریان ایجاد شده رابررسی کنیم. تابع پاسخ خطی شاره، ضریب خطی است که جریان تولید شده را به تنش وابسته می‌کند. معمولا جریان ایجاد شده در شاره را با میزان نرخ کرنش حاصل شده نشان می‌دهیم. کرنش و نرخ کرنش اعمال شده را به ترتیب با γ و $\dot{\gamma}$ نشان می‌دهیم. تنش برشی را با σ نشان می‌دهیم. در حالت کلی تابع پاسخ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t-t')\gamma(t'),$$

که در آن $G(t-t')$ تابع پاسخ با ساختار علّی است. در فضای فوریه داریم:

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{G}(\omega)\tilde{\gamma}(\omega).$$

بررسی ۲ حالت ساده و بدیهی، آموزنده است. در یک شاره‌ی نیوتنی ساده که رابطه‌ی تنش‐ نرخ کرنش در آن به شکل $\sigma = \eta\dot{\gamma}$ است، تابع پاسخ فقط قسمت موهومی دارد و آن هم ویسکوزیته‌ی شاره را بصورت $\tilde{G} = ۰ + i\tilde{G}'' = -i\omega\eta$ می‌دهد. از طرف دیگر در یک سیستم کشسان ساده که مدول برشی آن $G_۰$ است، رابطه‌ی تنش ‐ کرنش بصورت $\sigma = G_۰\gamma$ است. در این صورت تابع پاسخ فقط قسمت حقیقی دارد که مدول برشی سیستم را بصورت $\tilde{G} = \tilde{G}' + ۰ \times i = G_۰$ می‌دهد.

بازگردیم به شاره‌ی ویسکوالاستیک که با تابع پاسخ $\tilde{G}$ مشخص می‌شود. اگر بخواهیم حرکت یک ذره‌ی آزمون در آن را بررسی کنیم، باید توجه کنیم که ضریب ثابت استوکس $\zeta = ۶\pi\eta a$ باید با چیزی جایگزین شود که در آن وشکسانی یک تابع پیچیده‌ی وابسته به فرکانس است. از تناظر با شاره‌ی نیوتنی، معلوم می‌شود که جایگزینی باید بصورت $\eta \to \tilde{\eta}(\omega) = \tilde{G}(\omega)/(-i\omega)$ انجام شود. این جایگزینی بصورتی انجام می‌شود که در معادله‌ی حرکت ۴، قرار می‌دهیم:

$$\tilde{\zeta}(\omega) = ۶\pi a\frac{\tilde{G}(\omega)}{-i\omega}.$$

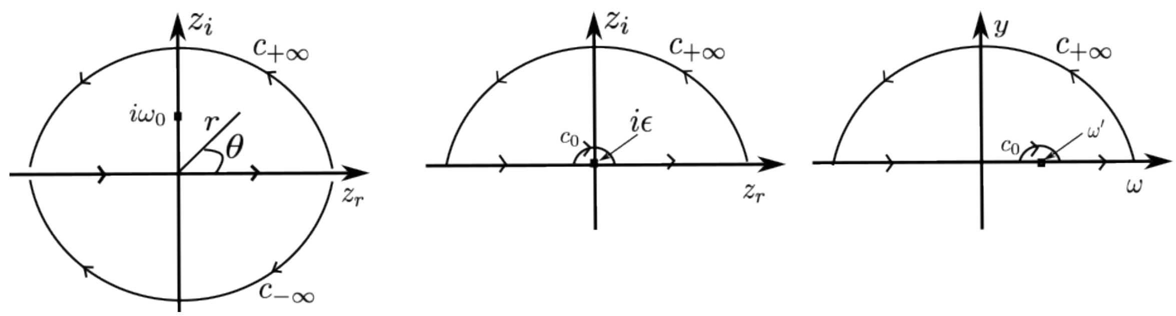
از رابطه‌ی ۱۰ دیده می‌شود که طیف قدرت افت‌وخیزهای ذره‌ی براونی به $\tilde{\zeta}$ بستگی دارد. درواقع با مطالعه‌ی دقیق طیف قدرت افت‌وخیزها می‌توانیم تابع پاسخ مختلط شاره‌ی ویسکوالاستیک، $\tilde{G}(\omega) = \tilde{G}'(\omega) + i\tilde{G}''(\omega)$ را بدست آوریم.

محاسبه‌ی برخی انتگرال‌ها

انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega - i\omega_0}$$

برای محاسبه‌ی انتگرال از توابع مختلط کمک می‌گیریم. فرض کنید متغیر $z = \omega$ یک متغیر مختلط در صفحه‌ی مختلط است که در شکل (قسمت چپ) هم نشان داده شده است. انتگرال قرار است روی محور حقیقی گرفته شود. انتگرالده در نقطه‌ی $z = i\omega_0$ یک قطب دارد. مسیر بسته‌ی متشکل از محور حقیقی و نیمدایره‌ی $c_{-\infty}$ را در نظر بگیرید. با توجه به اینکه



شکل ۱: مسیرهای مورد استفاده برای انتگرالگیری در صفحه‌ی مختلط نشان داده شده است.

انتگرالده درون این مسیر قطبی ندارد، پس انتگرالش روی آن مسیر بسته صفر است. در نتیجه انتگرال روی محور حقیقی با منفی انتگرال روی $c_{-\infty}$ داده می‌شود. روی این نیمدایره‌ی بی‌نهایت داریم $z = re^{i\theta}$ و $dz = id\theta z$ که $r \to \infty$. در نتیجه:

$$I_1 = -\int_{c_{-\infty}} \frac{dz}{z - i\omega_0} = -\int_{2\pi}^{\pi} (id\theta) = \pi i.$$

به روش مشابه:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega + i\omega_0} = -\pi i.$$

اکنون انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - i\omega_0}$$

ابتدا فرض کنید $t > 0$. در این صورت روی نیمدایره‌ی $c_{-\infty}$ انتگرالده بصورت $e^{-\infty \times t}$ به صفر همگرا می‌شود. اکنون انتگرال فوق را به مسیر بسته‌ای متشکل از محور حقیقی و نیمدایره‌ی $c_{-\infty}$ گسترش می‌دهیم. با توجه به اینکه هیچ قطبی درون این مسیر نداریم، جوابش صفر می‌شود. توجه کنید که با توجه به صفر شدن انتگرالده روی $c_{-\infty}$، پس انتگرال هم روی آن مسیر صفر می‌شود. در نهایت

$$I_3 = 0, \qquad t > 0.$$

حال فرض کنید $t < 0$. در این صورت انتگرال‌ده روی مسیر $c_{+\infty}$ بصورت $e^{-\infty \times |t|}$ صفر می‌شود. حال مسیر بسته‌ای متشکل از محور حقیقی و نیمدایره‌ی $c_{+\infty}$ را در نظر بگیرید. چون انتگرالده روی نیمدایره سهمی ندارد، پس مقدار انتگرال مورد نظر ما با انتگرال روی مسیر بسته برابر است:

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{c_{+\infty}} = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=i\omega_0} = ie^{-\omega_0 |t|}, \quad t < 0.$$

در نتیجه

$$I_3 = \begin{cases} ie^{-\omega_0 |t|}, & t < 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

اکنون با استفاده از نتیجه‌ی اخیر می‌توانیم قرار دهیم $\omega_0 = \epsilon$ و حد $\epsilon \to 0$ را بگیریم. در این صورت به نمایش انتگرالی تابع پله بصورت زیر می‌رسیم:

$$\Theta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega t}}{\omega - i\epsilon} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

اتحاد زیر هم معمولا مفید است:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\omega - i\epsilon} = \mathcal{PV}\frac{1}{\omega} + i\pi\delta(\omega),$$

که در آن

$$\mathcal{PV}\int d\omega \frac{1}{\omega} := \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) d\omega \frac{1}{\omega}.$$

برای تحقیق اتحاد بالا تابع مختلط $f(z)$ که در نیم‌صفحه‌ی بالایی قطبی ندارد را در نظر بگیرید. اکنون انتگرال روی مسیر بسته‌ی مشخص شده در شکل (قسمت وسط) را در نظر بگیرید. جواب این انتگرال باید صفر شود چون درون مسیر بسته هیچ قطبی نداریم.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \oint \frac{f(z)}{z - i\epsilon} = 0$$

از طرف دیگر

$$\lim_{\epsilon \to 0} \oint \frac{f(z)}{z - i\epsilon} = \int_{c_\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}.$$

اگر تابع $f(z)$ در بی‌نهایت واگرا نشود، انتگرال روی مسیر c_∞ به صفر می‌رسد. پس می‌ماند انتگرال روی محور حقیقی که آن را بصورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega} = \mathcal{PV}\int d\omega \frac{f(\omega)}{\omega} + \int_{c_0} dz \frac{f(z)}{z}.$$

انتگرال روی نیمدایره‌ی بی‌نهایت کوچک c_0 به سهولت گرفته می‌شود تا بدست آید:

$$\mathcal{PV}\int d\omega \frac{f(\omega)}{\omega} = -\int_{c_0} dz \frac{f(z)}{z} = \pi i f(0).$$

تبدیل فوریه‌ی تابع علّی

تابع حقیقی $\chi(t)$ را علّی می‌گوییم هرگاه مقدارش برای $t < \circ$ صفر باشد. هر تابعی که از حاصلضرب یک تابع دلخواه و تابع پله درست شده باشد، علّی است. اگر علّی بودن را فراموش کنیم، تبدیل فوریه با تعریف متداول زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{\chi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \chi(t) e^{i\omega t}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

اعمال شرط علّیت انتگرال را محدود به زمان‌های مثبت می‌کند. در این صورت به‌نظر می‌رسد مشکلی در همگرایی انتگرال $\tilde{\chi}(\omega) = \int_\circ^\infty dt\chi(t)e^{i\omega t}$ وجود داشته باشد. بررسی می‌کنیم که چطور این مشکل را می‌توان دور زد و از تبدیل فوریه استفاده کرد. از آن فراتر نشان می‌دهیم که با اعمال اصل علّیت قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $\tilde{\chi}(\omega)$ بصورت انتگرالی به هم مربوط می‌شوند.

صفحه‌ی مختلط رادر نظر بگیرید که محور حقیقی آن همان فرکانس حقیقی ω باشد. در نیم‌صفحه‌ی بالایی داریم $z = \omega + iy$ که در آن $y > \circ$. تابع $\tilde{\chi}(\omega)$ را به این صفحه‌ی مختلط گسترش می‌دهیم و تابع $\tilde{\chi}(z)$ را می‌سازیم. اگر فرض کنیم $\chi(t)$ در $t \to \infty$ واگرانباشد، آنگاه $\tilde{\chi}(z)$ در نیم‌صفحه‌ی بالایی تحلیلی است. مشاهده‌ی این موضوع ساده است کافیست توجه کنیم که در این گسترش به صفحه‌ی مختلط، عامل e^{-yt} برای $y > \circ$ عملا انتگرال را راحت‌تر همگرا می‌کند. موضوع واگرایی تبدیل فوریه نیز با همین ترفند حل می‌شود. در واقع ابتدا می‌توانیم تبدیل فوریه را برای متغیر مختلط $z = \omega + iy$ بسازیم و $\tilde{\chi}(z)$ را بدست آوریم. در ادامه قسمت موهومی متغیر مختلط را به صفر می‌بریم تا بصورت یک فرآیند حدی تابع $\tilde{\chi}(\omega) = \lim_{y\to\circ^+} \tilde{\chi}(z = \omega + iy)$ ساخته شود. بصورت خلاصه داریم:

$$\tilde{\chi}(\omega) = \lim_{y \to o^+} \int_\circ^\infty dt \chi(t) e^{i\omega t} e^{-yt}.$$

اکنون مسیر بسته‌ی مشخص شده در شکل (قسمت راست) را در نظر بگیرید و از تابع $\frac{\tilde{\chi}(\omega)}{\omega - \omega'}$ روی آن انتگرال میگیریم. چون قطبی درون آن نیست جوابش صفر می‌شود پس:

$$\oint dz \frac{\tilde{\chi}(z)}{z - \omega'} = \left(\int_{c_\infty} + \mathcal{PV} \int + \int_{c_\circ} \right) (\cdots) = \circ,$$

پس

$$\mathcal{PV} \int d\omega \frac{\tilde{\chi}(\omega)}{\omega - \omega'} = -\int_{c_\circ} dz \frac{\tilde{\chi}(z)}{z - \omega'} = \pi i \tilde{\chi}(\omega')$$

معمولا رابطه‌ی نهایی را بصورت زیر می‌نویسند:

$$\tilde{\chi}(\omega') = \frac{1}{\pi i} \mathcal{PV} \int d\omega \frac{\tilde{\chi}(\omega)}{\omega - \omega'}.$$

اگر قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع $\tilde{\chi}$ را بصورت $\tilde{\chi} = \tilde{\chi}' + i\tilde{\chi}''$ تفکیک کرده و در رابطه‌ی اخیر قرار دهیم، به روابط کرامرز کرونیگ می‌رسیم:

$$\tilde{\chi}'(\omega) = \mathcal{PV} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\tilde{\chi}''(\omega')}{\omega' - \omega}, \qquad \tilde{\chi}''(\omega) = -\mathcal{PV} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\tilde{\chi}'(\omega')}{\omega' - \omega}.$$

اکنون نشان می‌دهیم که تابع پاسخ را می‌توانیم برحسب قسمت موهومی آن بنویسیم:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\omega) &= \tilde{\chi}'(\omega) + i\tilde{\chi}''(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{PV} \int d\omega' \frac{\tilde{\chi}''(\omega')}{\omega' - \omega} + i \int d\omega' \delta(\omega' - \omega) \tilde{\chi}''(\omega') \\ &= \frac{1}{\pi} \int d\omega' \left(\mathcal{PV} \frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi\delta(\omega' - \omega) \right) \tilde{\chi}''(\omega') = \lim_{\epsilon \to \circ} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\tilde{\chi}''(\omega')}{\omega' - \omega - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (۱۱)$$

در نهایت داریم:

$$\tilde{\chi}(\omega) = \lim_{\epsilon \to \circ} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\tilde{\chi}''(\omega')}{\omega' - \omega - i\epsilon}.$$

به روش مشابه می‌توانیم رفتار کامل تابع پاسخ را با دانستن قسمت حقیقی آن بازسازی کنیم.