خطا، میانگین خطا و خطای میانگین

علی نجفی
najafi@iasbs.ac.ir

۲۳ مرداد ۱۴۰۳

۱ صورت سوال

یک کلاس شامل N دانش آموز را در نظر بگیرید که در یک آزمون شرکت کرده‌اند و N نمره‌ی کسب شده توسط دانش‌آموزان در دسترس ما است. دو سوال زیر را در نظر بگیرید: خطای نمره‌ی هر دانش‌آموز چقدر است؟ خطای نمره‌ی میانگین کلاس چقدر است؟

واضح است که با اطلاعات در دسترس به هیچ کدام از سوالات مطرح شده نمی‌توان پاسخ داد. در واقع نمره‌ی کسب شده توسط هر دانش‌آموز یک متغیر تصادفی است به این معنی که اگر آزمون برای آن دانش‌آموز تکرار شود، البته به شرطی که تکرارهای متوالی روی هم اثر نگذارند، باز هم ایشان هر دفعه نمره‌ی متفاوتی کسب می‌کند. تغیر شرایط محیطی یا روحی حاکم بر دانش‌آموز دلیل این موضوع است. اگر بتوانیم با شرایط یاد شده آزمون را برای هر دانش‌آموز تکرار کنیم، می‌توانیم خطای نمره‌ی آن دانش آموز را محاسبه کنیم. مثلا برای دانش آموز شماره‌ی i، خطای نمره را با σ_{X_i} نشان می‌دهیم و از محاسبه‌ای بصورت $\sigma_{X_i}=\sqrt{\langle X_i^2\rangle-\langle X_i\rangle^2}$ بدست می‌آید. توجه کنید که متوسط‌گیری‌ها روی تعداد دفعاتی که آزمون برای دانش‌آموز شماره‌ی i تکرار می‌شود، گرفته می‌شود. به σ_{X_i} خطا یا انحراف از معیار و به توان دوم آن واریانس گفته می‌شود. مثلا اگر یک دانش‌آموز در آزمون نمره‌ی ۱۷ گرفته باشد می‌گوییم نمره‌ی ایشان $17\pm\frac{\sigma_{X_i}}{2}$ است. آنطور که معلوم است، دلیلی نداریم که خطای نمره‌ی یک دانش‌آموز با دیگری برابر باشد.

حال به میانگین نمره‌ی کلاس توجه کنیم. میانگین نمره طبق تعریف از مجموع نمرات تقسیم بر تعداد بدست می‌آید. در حقیقت نمره‌ی میانگین نیز یک متغیر تصادفی است و خطای آن را با $\sigma_{\bar{X}}$ نشان می‌دهیم. برای محاسبه‌ی خطای نمره‌ی میانگین، اگر امکانش باشد آزمون را برای کلاس بارها تکرار می‌کنیم (البته با شرایطی شبیه آنچه در بالا گفته شد) و برای هر تکرار، نمره‌ی میانگین را بدست می‌آوریم و از آنجا خطا یا انحراف از معیار برای نمره‌ی میانگین بدست خواهد آمد. مثلا اگر در یک آزمون نمره‌ی میانگین کلاس ۱۳ شود می‌گوییم نمره‌ی میانگین کلاس $13\pm\frac{\sigma_{\bar{X}}}{2}$ است.

پاسخ مشروط

با دو فرض بسیار مهم می‌توانیم خطای هر نمره و خطای نمره‌ی میانگین را از نتایج تنها یک آزمون تخمین بزنیم. فرض کنید N بسیار بزرگ باشد و نمره‌ی هر دانش آموز از دیگری مستقل و میزان تصادفی بودن همگی مشابه هم باشد. توجه کنید که در عمل معلوم نیست این مفروضات لزوما صحت داشته باشند. با در نظر گرفتن این فرضیات، انتظار داریم خطای نمره‌ی همه‌ی دانش آموزان با هم برابر باشد که همگی را با $\sigma_{X_1}=\sigma_{X_2}=\cdots=\sigma_X$ نشان می‌دهیم. در این شرایط می‌توانیم در نظر بگیریم که نمرات کسب شده توسط دانش‌آموزان در یک آزمون، مشابه این است که آزمون را برای یک دانش‌آموز N بار تکرار کرده‌ایم و ایشان هر بار یک نمره‌ی متفاوت کسب کرده است. پس خطای نمره از محاسبه‌ای بصورت:

$$\sigma_X^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i^2-\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i\right)^2,$$

بدست می‌آید. با درنظر گرفتن شرایط یاد شده، می‌توان نشان داد که خطای نمره‌ی میانگین بصورت زیر می‌شود:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}.$$

این مثال را در نظر بگیرید: در یک کلاس شش نفره نمراتی بصورت {۱۷ , ۱۵ , ۱۴ , ۱۳/۵ , ۱۳ , ۱۲/۵} بدست آمده است. خطای هر نمره از محاسبه‌ی انحراف معیار نمرات بالا بصورت $\sigma_X = ۱/۵$ بدست می‌آید و خطای نمره‌ی میانگین برابر می‌شود با: $\sigma_{\bar{X}} = ۱/۵/\sqrt{۶} = ۰/۶$.

کاربرد دیگر

فرض کنید یک سیستم N ذره‌ای داریم. بعد از به تعادل رسیدن سیستم، همچنان انرژی ذرات کمیتی تصادفی و افت‌وخیز کننده است یعنی در لحظات متوالی یک مقدار ثابت نیست. می‌خواهیم خطا یا در واقع میزان افت‌وخیز انرژی هر ذره و میزان خطا یا افت‌وخیز انرژی میانگین (انرژی کل بر واحد ذره) را بدست آوریم. یک راه این است که بعد از اینکه سیستم به تعادل رسید، بصورت آزمایشگاهی یا شبیه‌سازی کامپیوتری، در لحظات مختلف تعداد زیادی مثلا M بار اندازه‌گیری روی انرژی تک‌تک ذرات انجام شود. از اندازه‌گیری‌های انجام شده در لحظات مختلف روی انرژی هر ذره، می‌توانیم انحراف معیار و در واقع شدت افت‌وخیز انرژی آن ذره را بدست آوریم. از طرف دیگر در این M اندازه‌گیری، هر بار یک مقدار برای انرژی میانگین داریم. در نتیجه می‌توانیم خطا یا افت‌وخیز انرژی میانگین را نیز بدست آوریم.

اگر تعداد ذرات بسیار زیاد باشد، ادعا می‌کنیم که با یک بار اندازه‌گیری روی انرژی ذرات می‌توانیم افت‌وخیز انرژی هر ذره و افت‌وخیز انرژی میانگین را بدست آوریم. در یکبار اندازه‌گیری روی انرژی ذرات، مجموعا N انرژی $e_۱$ تا e_N را در دست داریم. انحراف از معیار N عدد بدست آمده، افت‌وخیز انرژی هر ذره است و با σ_e نشان می‌دهیم. افت‌وخیز انرژی میانگین برابر می‌شود با: $\sigma_{\bar{e}} = \sigma_e/\sqrt{N}$.

۲ چرا اینطور است؟

موضوع به قضیه‌ی حد مرکزی در آمار مربوط می‌شود. فرض کنید N متغیر تصادفی $X_۱$، $X_۲$ تا X_N با توابع توزیع مستقل از هم $P_۱(x_۱)$، $P_۲(x_۲)$ تا $P_N(x_N)$ داریم. از N متغیر تصادفی معرفی شده، متغیر تصادفی جدیدی بصورت $Y = X_۱+\cdots+X_N$ می‌سازیم. سوال این است که تابع توزیع این متغیر تصادفی جدید که با $P(y)$ نشان داده می‌شود چه ارتباطی با تابع توزیع متغیرهای اولیه دارد؟

در حد $N \to \infty$ پاسخ بسیار ساده است. اگر واریانس متغیرهای تصادفی اولیه را با $\sigma_X^۲ = \langle X^۲\rangle - \langle X\rangle^۲$ (برای سهولت همگی با هم برابر فرض شده‌اند) و میانگین‌شان که آنها هم برابر فرض می‌شوند را با $\bar{X} = \langle X\rangle$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$P(y) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi N\sigma_X^۲}} e^{-\frac{(y-N\bar{X})^۲}{۲N\sigma_X^۲}}.$$

پیغام ساده است. تابع توزیع یک متغیر تصادفی که از جمع تعداد زیادی متغیر تصادفی اولیه ساخته می‌شود، به تابع توزیع گاوسی میل می‌کند. اثبات این موضوع را می‌توانید در کتاب مکانیک آماری کاردر پیدا کنید. نتیجه‌ی دیگر اینکه میانگین و انحراف از معیار متغیر مجموع به صورت زیراند:

$$\bar{Y} = N\bar{X}, \quad \sigma_Y = \sqrt{N}\sigma_X.$$

در نهایت اگر متغیر تصادفی دیگری بصورت $Z = (X_۱ + \cdots + X_N)/N$ تعریف کنیم، بسهولت می‌توانید تابع توزیع مربوطه یعنی $P(z)$ را بدست آورید. دیده می‌شود که:

$$\bar{Z} = \bar{X}, \quad \sigma_Z = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}.$$