



مبانی مکانیک شاره‌ها

نیوتنی و نانیوتنی
علی نجفی





مکانیک شاره‌ها

نیوتنی و نانیوتنی

علی نجفی

عضو هیأت علمی دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، زنجان

انتشار الکترونیکی

۱۴۰۱

هرگونه تکثیر و انتشار مطالب کتاب، بصورت جزئی یا کلی، الکترونیکی یا غیر آن، بدون اجازه‌ی مولف مجاز نیست.

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

سرشناسه	؟؟ :
عنوان	؟؟ :
مشخصات نشر	؟؟ :
مشخصات ظاهری	؟؟ :
فروست	؟؟ :
شابک	؟؟ :
یادداشت	یادداشت به انگلیسی: ؟؟ :
یادداشت	یادداشت کتاب نامه :
یادداشت	یادداشت نمایه :
موضوع	؟؟ :
شناسه افزوده	؟؟ :
رده بندی کنگره	؟؟ :
رده بندی دیویی	؟؟ :



دانشگاه تحصیلات تکمیلی
علوم پایه، زنجان



دانشگاه زنجان

عنوان کتاب: مکانیک شاره‌ها، نیوتنی و نانیوتنی

تألیف: علی نجفی

ویراستار: کیوان آقابابایی سامانی

نشر: الکترونیکی

تاریخ و نوبت انتشار: تابستان ۱۴۰۱، اول

قیمت: تا یک روز رایگان، در صورت تمایل برای نگهداری و استفاده‌ی بیشتر از کتاب، به میزان

مورد نظر به انجمن فیزیک یا هر موسسه‌ی خیریه‌ای کمک شود.

قطع: وزیری

هرگونه تکثیر و انتشار مطالب کتاب، بصورت جزئی یا کلی، الکترونیکی یا غیر آن، بدون اجازه‌ی مولف مجاز نیست.

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

تقدیم به همسر

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

پیش‌گفتار

مکانیک محیط‌های پیوسته و مکانیک شاره‌ها، قسمت مهمی از فیزیک کلاسیک هستند و درک سازوکارهای فیزیکی در بسیاری از پدیده‌های روزمره، احتیاج به دانش مکانیک شاره‌ها دارد. شاید بتوان پیدایش و شروع توجه به پدیده‌های شارشی را به اندازه‌ی قدمت بشر دانست. انسان نخستین، همواره به حرکت آب و پرواز پرندگان در هوا می‌اندیشیده است. ارشمیدس و لئوناردو داوینچی از قدیمی‌ترین افراد مؤثر در علم شاره‌ها هستند. ارشمیدس، ریاضی‌دان نامی یونان، حدود ۲۵۰ سال پیش از میلاد، توجه زیادی به شاره‌ها داشت. او قوانین مربوط به شناور بودن را کشف کرد. داوینچی نیز ۵۰۰ سال قبل، در کتاب خود سعی زیادی در ایجاد شهود واقعی برای خطوط جریانی شاره‌ها کرده است. وی قوانین پایستگی جرم را برای شاره‌های تراکم‌ناپذیر به درستی به دست آورده است [۲۷، ۴۷]. برنولی، توریچلی، تیلور و رینولدز از دیگر افرادی هستند که تأثیر به‌سزایی در گسترش و توسعه‌ی مبانی مکانیک شاره‌ها داشته‌اند.

باوجود قدیمی بودن دانش شاره‌ها، هنوز جنبه‌های مختلفی از آن به‌روز و فیزیکدانان زیادی درگیر مسائل آن هستند. دانش شاره‌ها در علم و به‌طور شاخص در فیزیکِ روز، جایگاه برجسته‌ای دارد. جدا از سابقه‌ی تاریخی و کاربردی که مکانیک شاره‌ها در مسائل روزمره‌ی صنعتی مثل جریانهای درون لوله‌ها، حرکت شناسی اجسام پرنده و شناور (هواپیما و کشتی و ...)، حرکت

شناسی شاره‌های پشت سد، توربین‌ها و موتورهای گرمایی و دیگر مسائل از این نوع دارد، بسیاری از مسائل دیگر نیز هستند که توجه بنیادی به مکانیک شاره‌ها را لازم دارند. مثال‌های روشنگر زیر را در نظر بگیرید.

هواشناسی و اقلیم‌شناسی از مهم‌ترین شاخه‌هایی هستند که کاربرد وسیعی از مکانیک شاره‌ها را نیاز دارند. برای پیش‌بینی‌های کوتاه مدت، میان مدت و بلند مدت شرایط هوایی، لازم است تا دینامیک جفت شده‌ی جو و اقیانوس‌ها بررسی شود. غیرخطی بودن معادلات تحولی شاره‌ها (معادله‌ی ناویه-استوکس) و البته بزرگ بودن سیستم اقلیم، دلایل اساسی برای پیچیده بودن این مسائل هستند. مسأله‌ی تلاطم به عنوان یکی از سخت‌ترین مسائل فیزیک کلاسیک، از بین چند مسأله‌ی انگشت شماری که هنوز حل نشده‌اند، در پدیده‌های جوی نمود اساسی دارد. سعی در یافتن جوابهای دقیق یا روش‌های عددی با کارائی بیشتر، از چالش‌های اساسی در مطالعه‌ی مسأله‌ی تحول اقلیم است.

از طرف دیگر، در دو دهه‌ی اخیر و به‌همراه توجه بیشتری که به شاخه‌ی ماده‌ی چگال نرم صورت گرفته، احتیاج به دانش شاره‌ها بیشتر احساس می‌شود. شاره‌های پلیمری صنعتی و زیستی، بلورهای مایع، شاره‌ی درون سلولی و خون از مهم‌ترین مثال‌های مسائل ماده‌ی چگال نرم هستند. کشف بلورهای مایع و خواص منحصر به فرد اپتیکی و شارشی که آنها دارند، باعث شده تا استقبال زیادی از آنها در صنعت شود. خواص شارشی بیشتر این شاره‌ها با رفتارهای نیوتنی سازگار نیست. در شاره‌های نیوتنی ارتباط خطی بین تنش و نرخ برش وجود دارد، در صورتی که در شاره‌های پلیمری، ارتباط خطی ساده‌ای بین تنش و نرخ برش وجود ندارد. به این سبب، به این نوع شاره‌های پیچیده، شاره‌های نانیوتنی نیز گفته می‌شود. مطالعه‌ی رفتارهای نانیوتنی به دو صورت ریزمقیاس و بزرگ مقیاس صورت می‌گیرد. در این کتاب مختصری از مبانی پدیده‌شناختی و برخی از ساده‌ترین مدل‌های ریزمقیاس برای شاره‌های نانیوتنی را بررسی می‌کنیم.

فیزیک زمین و شناخت حرکت لایه‌های آن، مثال دیگری برای کاربرد مکانیک شاره‌ها است. اتفاقات مربوط به این سامانه‌ها در مقیاسهای زمانی میلیون سال انجام می‌گیرد. زمین‌شناسان با مطالعه‌ی مدل‌های نظری مبتنی بر مکانیک شاره‌ها که برای تحول زمین ارائه کرده‌اند، سعی می‌کنند تا تصویر درستی از پدیده‌هایی مثل زلزله و آتش‌فشان ارائه کنند. کشف مخازن نفتی و

ارائه راهکارهای استخراجی با کارایی بیشتر، حوزه‌ای دیگر از علم زمین است که در آن سعی می‌شود تا حرکت‌شناسی شاره‌ها در محیط‌های متخلخل صورت گیرد. در کیهان‌شناسی و فیزیک سماوی از مکانیک شاره‌ها برای بررسی تحول کهکشانها استفاده می‌شود. در آنجا مجموعه‌ی کهکشانها به عنوان شاره‌ای تراکم پذیر در نظر گرفته می‌شود. علاوه بر این، در مقیاس‌هایی کوچکتر از کهکشان، درون ستاره‌ها نیز از مکانیک شاره‌ها استفاده‌ی فراوانی می‌شود. به عنوان مثال فیزیک خورشید را در نظر بگیرید. شاره‌ای پیچیده که خواص مغناطیسی نیز دارد، پیوسته و در طی میلیون‌ها سال متحول می‌شود. هنوز تصویر واضحی از فیزیک لکه‌های خورشیدی، ساختار شراره‌های تاج خورشید و بسیاری دیگر از پدیده‌های مرتبط با خورشید در اختیار نداریم. این ادعای مهم که بسیاری از پدیده‌های خورشیدی از نوع ناپایداری‌های شارشی هستند، احتیاج به بررسی‌های بیشتری دارد.

باوجود اهمیت مکانیک شاره‌ها، عموماً دانشجویان رشته‌ی فیزیک، دانش مناسبی از این شاخه کسب نمی‌کنند. این ادعا که بی‌توجهی به مکانیک شاره‌ها، یکی از ضعف‌های اساسی در دوره‌های آموزشی دانشجویان فیزیک است، خیلی دور از حقیقت نیست. البته در برنامه‌ی آموزشی دوره‌ی کارشناسی، علاوه بر مطالب پراکنده‌ای که در دروس پایه در مورد برخی جنبه‌های شاره‌ها وجود دارد، درس اختیاری مکانیک شاره‌ها نیز گنجانده شده است، ولی به دلایل مختلفی، توجه مناسبی به این درس نمی‌شود. اختیاری بودن درس و نبود منبع مناسبی به زبان فارسی، از دلایل این بی‌توجهی، از طرف دانشجویان و هم از جانب مدرسين است. کتابهای بسیاری با عنوان مکانیک شاره‌ها یا موارد مرتبط به آن به زبان فارسی ترجمه یا تألیف شده است که برای دانشجویان رشته‌های مهندسی کاربرد دارند. این نوع کتابها برای دانشجویان فیزیک مناسب نیستند. از طرفی این کتابها طوری طراحی شده‌اند که در یک دوره‌ی آموزشی ۲ تا ۳ نیم‌سال، اصول اساسی دانش شاره‌ها را به دانشجو می‌آموزند. برای دانشجوی فیزیک، حتی اگر درس شاره‌ها الزامی نیز شود، منطقی نیست که زمان آموزش آن را تا ۳ نیم‌سال گسترش داد. علاوه بر این، در کتاب‌های مهندسی جنبه‌های کاربردی و مثالهای عددی مربوط به مسائل خاصی از پدیده‌های صنعتی، بسیار پررنگ تر از مبانی فیزیکی دینامیک شاره‌ها ارائه می‌شوند.

دلایل برشمرده در بالا، بخشی از انگیزه‌های تألیف این کتاب را نشان می‌دهند. هدف این کتاب پرداختن به تمامی موضوعات مکانیک شاره نیست. ارائه‌ی مبانی فیزیکی دانش شاره‌ها

اولیت اصلی این کتاب است. ساختار این کتاب به این صورت است که ابتدا به برخی مطالب استاندارد که لازمه‌ی هر کتاب مکانیک شاره‌ها است، اشاره می‌شود. تعاریف مربوط به شاره، تنش، و شکسانی، شارش‌های پایستار و معادلات حرکتی شاره‌های اتلافی (معادلات ناویه-استوکس) و بحث مربوط به ناپایداری‌ها در این دسته قرار می‌گیرند. سپس به برخی مطالب خاص تر مثل پدیده‌های مرتبط با فصل مشترک دو شاره، شارش‌ها در مقیاس طولی میکرونی و شارش‌های نانیوتنی پرداخته می‌شود. در هر بخش سعی می‌شود مبانی اصلی بیان شود. از برخی مثالها نیز برای توسعه‌ی مبانی استفاده می‌شود. در تعدادی از مثالها، تأکیدی روی ارائه‌ی جوابهای دقیق ریاضی نیست و ممکن است از جنبه‌های تقریبی نیز استفاده شود. برای یک دوره‌ی آموزشی مقدماتی می‌توان از فصل‌های ۷ به بعد صرف‌نظر کرد. مباحث این فصول برای دوره‌های آموزشی پیشرفته‌تر در مقاطع تحصیلات تکمیلی توصیه می‌شود. به خواننده‌ی علاقه‌مند توصیه می‌کنم حتماً برای مطالعه‌ی بیشتر به کتاب مکانیک شاره‌ها تالیف لاند/او و لیفشیتز، مراجعه کند [۱]. مبانی فیزیکی شاره‌های نیوتنی، در این کتاب با دقت و وسواس ریاضی بررسی شده است. دو کتاب بسیار زیبا تالیف گویون و فییر، علاوه بر ارائه‌ی مبانی شاره‌ها، بسیاری از موضوعات روزمره را با دیدگاه شهودی‌تر بررسی کرده‌اند [۴، ۵].

این کتاب بصورت مستمر تصحیح می‌شود و از هرگونه پیشنهاد سازنده از طرف خوانندگان استقبال می‌شود. برای اطلاع از آخرین تغییرات کتاب می‌توانید به صفحه‌ی الکترونیکی زیر مراجعه کنید:

<https://iasbs.ac.ir/najafi/fm.html>

علی نجفی

دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه، زنجان، زمستان ۱۴۰۰

فهرست مطالب

پیش‌گفتار	ث
۱. مقدمات ریاضی	۳
۱.۱. دستگاه مختصات	۳
۲.۱. دوران	۴
۳.۱. اسکالر، بردار و تانسور	۶
۴.۱. عملگرهای دیفرانسیلی	۸
پرسش‌ها	۱۲
۲. مقدمات فیزیکی	۱۵
۱.۲. میدان سرعت شاره	۱۵
۲.۲. خطوط میدان	۱۸
۳.۲. نیرو در محیط‌های پیوسته	۲۳
۴.۲. شاره	۲۸

۳۵	۵.۲ تنش: دیدگاه ریزمقیاس
۴۱	پرسش‌ها
۴۳	۳ شارش پایستار
۴۴	۱.۳ قانون پایستگی جرم
۴۸	۲.۳ معادله‌ی اوپلر
۵۲	۳.۳ فشار با شیب عرضی
۵۸	۴.۳ شارش تکانه
۵۹	۵.۳ معادله‌ی برنولی
۶۲	۶.۳ شارش پتانسیل
۷۱	۷.۳ شارش اطراف کره
۷۶	۸.۳ استوانه‌ی چرخان و نیروی مگنوس
۸۱	۹.۳ شارش دوبعدی، تکنیک مختلط
۸۵	پرسش‌ها
۸۹	۴ شارش تراکم پذیر
۸۹	۱.۴ تراکم پذیری
۹۱	۲.۴ دینامیک بی‌دررو
۹۲	۳.۴ انتشار صوت
۹۴	۴.۴ ناظر متحرک
۹۵	۵.۴ اثر دوپلر
۹۷	۶.۴ دیوار صوتی
۹۹	۷.۴ سطح ماخ
۱۰۰	۸.۴ بال نازک
۱۰۴	۹.۴ موج شوک
۱۰۹	۵ شارش اتلافی

فهرست مطالب ذ

۱۰۹	۱.۵	وشکسانی
۱۱۶	۲.۵	جریان لایه‌ای
۱۲۲	۳.۵	شارش کنار صفحه‌ی لرزان
۱۲۴	۴.۵	معادله‌ی استوکس
۱۳۱	۵.۵	دینامیک چرخش
۱۳۶	۶.۵	لایه‌ی مرزی
۱۳۹	۷.۵	انواع شرایط مرزی
۱۴۶		پرسش‌ها

۶ شارش ناآخت ۱۵۱

۱۵۲	۱.۶	معادله‌ی استوکس
۱۵۷	۲.۶	کره‌ی صلب در شارش برشی
۱۵۸	۳.۶	ویسکوزیته‌ی موثر سوسپانسیون رقیق
۱۶۱	۴.۶	برهمکنش هیدرودینامیکی
۱۶۳	۵.۶	شناگرهای ریز مقیاس
۱۷۰		پرسش‌ها

۷ مرز مشترک شارها ۱۷۵

۱۷۵	۱.۷	کشش سطحی
۱۸۱	۲.۷	قانون یانگ-لاپلاس
۱۸۶	۳.۷	ترکندگی
۱۹۰	۴.۷	قطره روی سطح جامد
۱۹۵	۵.۷	امواج مرزی
۲۰۳	۶.۷	انتشار آشفته‌گی‌های مرزی با شکل عام
۲۰۸	۷.۷	طرح پشت کشتی‌ها
۲۱۰	۸.۷	کانال کم عمق، معادله‌ی KdV و سالیتون

۲۱۳	۹.۷	اثر مارانگونی
۲۱۷		پرسش‌ها
۲۱۹	۸	تحلیل ابعادی
۲۱۹	۱.۸	کره‌ی افتان
۲۲۲	۲.۸	پخش
۲۲۷	۳.۸	اعداد بدون بعد
۲۳۰	۴.۸	آزمایش سرنگ
۲۳۳	۵.۸	سرعت انقباض باریکه‌ی عسل
۲۳۵	۶.۸	دینامیک قطره
۲۳۸	۷.۸	رشد قطره‌ها: اسوالد رایپنینگ
۲۴۰		پرسش‌ها
۲۴۱	۹	ناپایداری‌ها
۲۴۱	۱.۹	مقدمه
۲۴۵	۲.۹	ناپایداری ریلی-پلاتو
۲۴۸	۳.۹	ناپایداری ریلی-تیلور
۲۵۰	۴.۹	ناپایداری کلوین-هلمهولتز
۲۵۳	۵.۹	ناپایداری سفمن-تیلور
۲۵۷		پرسش‌ها
۲۵۹	۱۰	شارش نانیوتنی
۲۶۰	۱.۱۰	ناهمسانگردی ریزمقیاس
۲۶۲	۲.۱۰	تنش و کرنش
۲۶۳	۳.۱۰	شارش وشکسان-کشسان
۲۶۵	۱.۳.۱۰	مدل‌های خطی
۲۶۸	۲.۳.۱۰	مدل‌های غیرخطی

فهرست مطالب ز

۲۷۰	۴.۱۰ مدل ریزمقیاس
۲۷۷	۵.۱۰ رئولوژی شاره‌ی پلیمری
۲۷۹	۶.۱۰ اثر وایزبرگ
۲۸۴	پرسش‌ها

۱۱ شارش متلاطم ۲۸۵

۲۸۵	۱.۱۱ مقدمه
۲۸۷	۲.۱۱ شارش لایه‌ای و غیر لایه‌ای
۲۸۸	۳.۱۱ تقارن مقیاس در معادله‌ی ناویه-استوکس
۲۹۰	۴.۱۱ شارش اطراف استوانه‌ی بسیار بلند
۲۹۳	۵.۱۱ پایداری شارش پایا
۲۹۵	۶.۱۱ آشوب در سامانه‌های غیرخطی
۲۹۸	۷.۱۱ ایده‌ی آبشار انرژی
۳۰۲	۸.۱۱ رهیافت پدیده‌شناختی
۳۰۴	۹.۱۱ تخمین اندازه‌ی افت و خیز سرعت
۳۰۷	۱۰.۱۱ قانون ریچاردسون
۳۰۷	۱۱.۱۱ توزیع فضایی و زمانی انرژی
۳۰۸	۱۲.۱۱ خواص آماری شارش متلاطم
۳۱۱	پرسش‌ها

۱۲ شارش در محیط‌های الکتریکی، الکتروکینتیک ۳۱۳

۳۱۴	۱.۱۲ سطوح باردار و دولایه‌ی الکتریکی
۳۱۶	۲.۱۲ معادلات حرکت
۳۱۹	۳.۱۲ استریمینگ پتنشال
۳۲۰	۴.۱۲ الکترواسموسیس
۳۲۱	۵.۱۲ الکتروفورسیس

۳۲۳	۶.۱۲ حالت ۱ $\gg \delta$
۳۲۴	۷.۱۲ حالت ۱ $\ll \delta$
۳۳۱	۱۳ هیدرودینامیک: ترمودینامیک غیرتعادلی
۳۳۱	۱.۱۳ قوانین پایستگی
۳۳۳	۲.۱۳ قانون آنتروپی و شرط تعادل موضعی
۳۳۶	۳.۱۳ روابط پدیده‌شناختی خطی
۳۴۰	۴.۱۳ روابط انزاگر
۳۴۶	۵.۱۳ سامانه‌ی ۲ بعدی، اثر هال
۳۴۸	۶.۱۳ معادلات حرکت سامانه‌ی تک مولفه‌ای متعارف
۳۴۹	۷.۱۳ شارش و شکسان-کشسان
۳۵۰	۸.۱۳ دینامیک کریستال مایع نماتیک
۳۵۶	۹.۱۳ ویسکوزیته‌ی پادمقارن
۳۶۳	آ مقدمه‌ای بر نرم‌افزار COMSOL
۳۸۱	منابع
۳۸۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۳۸۷	نمایه
۳۸۷	نمایه



آلبرت انیشتین (۱۸۷۹-۱۹۵۵) فیزیک‌دان زاده‌ی آلمان، اثر گذارترین دانشمند قرن بیستم است. ۴ مقاله‌ی مهم منتشر شده توسط انیشتین در سال ۱۹۰۵ که به سال اعجاز انیشتین معروف شد، پایه‌های علمی فیزیک نوین را متحول کرد. توصیف اثر فوتوالکتریک که به خاطر آن جایزه‌ی نوبل فیزیک سال ۱۹۲۰ را برد، توسعه‌ی ریاضیات نظریه‌ی نسبیت خاص و اثبات ارتباط اینرسی با محتوای انرژی اجرام، موضوع سه تا از این مقالات بود. مقاله‌ی چهارم توصیف ریزمقیاس حرکت براونی است. در این مقاله، انیشتین با بررسی حرکت اجسام ریز معلق در شاره‌ها، اولین تأیید تجربی برای وجود اتم‌ها را ارائه کرد و عدد آووگادرو را نیز محاسبه کرد. شرکت در توسعه‌ی نظریه‌ی مکانیک کوانتومی، پایه‌گذاری نظریه‌های نسبیت عام و کیهان‌شناسی به نام انیشتین ثبت شده‌اند. آرزوی انیشتین ارائه‌ی **نظریه‌ی همه‌چیز** بود.

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان



مقدمات ریاضی

در این فصل و پیش از پرداختن به فیزیک شاره‌ها، برخی از مقدمات ریاضی مورد نیاز را مرور می‌کنیم. دستگاه مختصات، مفاهیم اسکالر، بردار، تانسور و عملگرهای دیفرانسیلی از جمله ابزارهای مورد نیاز در مطالعه‌ی سیستم‌های فیزیکی هستند. خواننده لازم است آشنایی کاملی با این ابزار داشته باشد.

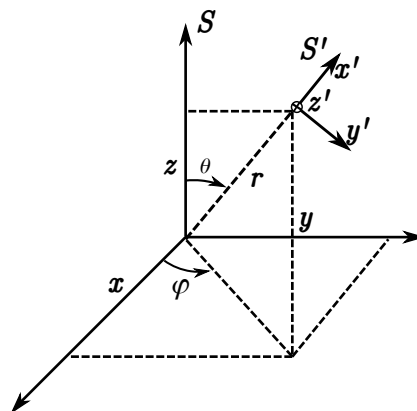
۱.۱ دستگاه مختصات

دستگاه مختصات، ابزار ریاضی لازم برای نشان دادن مکان نقاط مختلف فضا است. دستگاه‌های مختصات را به صورت‌های مختلفی می‌توان ساخت. دستگاه‌های مختصات دکارتی و قطبی-کروی مهم‌ترین و متداول‌ترین دستگاه‌های مورد استفاده در فیزیک هستند. در شکل ۱.۱، مکان نقطه‌ی دلخواه M در دو دستگاه مختصات دکارتی و قطبی کروی نشان داده شده است. سه عدد x ، y و z در دستگاه دکارتی و سه عدد r ، θ و ϕ در دستگاه قطبی-کروی، به صورت یک‌تا مکان نقطه‌ی M در فضا را مشخص می‌کنند. دستگاه‌های مختلف معمولاً با توجه به تقارنهای موجود در مسأله انتخاب شده و استفاده می‌شوند. این انتخاب طوری صورت می‌گیرد که روابط

ریاضی مربوط به هر مسأله شکل ساده‌تری داشته باشند. بین دستگاه‌های دکارتی و قطبی-کروی روابط تبدیلی زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi, \\y &= r \sin \theta \sin \phi, \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}\quad (۱.۱)$$

دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای، دوقطبی و بیضوی از دیگر مثالهای مهم هستند که در شرایطی ممکن است استفاده از آنها لازم شود. به خواننده‌ی علاقه‌مند توصیه می‌شود برای بدست آوردن توصیف کاملی از دستگاه‌های مختصات به مراجع ریاضی مراجعه کند [۵۲].



شکل ۱.۱ دستگاه مختصات دکارتی و دستگاه مختصات قطبی-کروی.

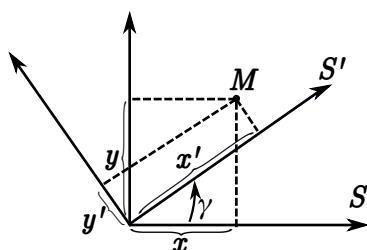
۲.۱ دوران

دوران مهم‌ترین تبدیل دستگاه مختصات است. اجازه دهید بحث را با یک مثال ساده شروع کنیم. مطابق شکل ۲.۱ دوران دستگاه مختصات دو بعدی را در نظر بگیرید. دستگاه مختصات دکارتی S با یک دوران به اندازه‌ی زاویه‌ی γ به دستگاه مختصات S' تبدیل می‌شود. با روابط هندسی ساده، مختصات یک نقطه‌ی دلخواه ثابت فضا (M) ، در دو دستگاه به صورت زیر به

هم مربوط می‌شوند:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \gamma + y \sin \gamma, \\y' &= -x \sin \gamma + y \cos \gamma.\end{aligned}\quad (2.1)$$

مثال ساده‌ی بالا را به راحتی می‌توانیم به حالت کلی‌تر تعمیم دهیم. فرض کنید یک دوران دلخواه



شکل ۲.۱ دستگاه مختصات $x' - y'$ نسبت به دستگاه اولیه به اندازه‌ی زاویه‌ی γ چرخیده است.

سه‌بعدی، دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی S را به دستگاه S' تبدیل می‌کند. در این صورت، سؤال این است که چه رابطه‌ای بین مختصات یک نقطه‌ی دلخواه در دو دستگاه برقرار است؟ با تصور یک دوران عمومی و استفاده از روابط هندسی، به سهولت می‌بینیم که باید یک رابطه‌ی خطی بین مختصات یک نقطه‌ی خاص در دو دستگاه برقرار باشد. برای اینکه این موضوع را بهتر بیان کنیم، از یک نماد گذاری فشرده استفاده می‌کنیم. مختصات نقطه‌ی دلخواه در دستگاه S را با x_i نشان می‌دهیم که $i = 1, 2, 3$ و $x_1 = x$ و $x_2 = y$ و $x_3 = z$ است. به روش یکسان، مختصات آن نقطه در دستگاه S' را با x'_i نشان می‌دهیم. کلی‌ترین رابطه‌ی تبدیل خطی بین دو دستگاه مختصات بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

در این رابطه، R_{ij} ها درآیه‌های ماتریس دوران هستند. عناصر ماتریس دوران به زوایای دوران مربوط هستند. دقت کنید که ماتریس دوران برای حالت خاصی که در شکل ۲.۱ نشان داده شده

بصورت زیر است:

$$R_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

$R_z(\gamma)$ ، ماتریس دوران حول محور z و به اندازه‌ی زاویه‌ی γ است.

فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواه M از مبدأ مختصات، در هر دو دستگاه S و S' برابر است. به این سبب و به سادگی می‌توان نشان داد که ماتریس دوران دارای خاصیت زیر است:

$$\sum_{j=1}^3 R_{ij} R_{kj} = \delta_{ik}, \quad (5.1)$$

که در آن δ_{ij} نماد کرونکر است. δ_{ij} برای تمامی مقادیر $j = i$ ، برابر با یک است و برای دیگر موارد صفر است. بنابراین ترانهاد و وارون ماتریس دوران با هم برابرند: $R^{-1} = R^T$.

۳.۱ اسکالر، بردار و تانسور

علاوه بر اعداد و ماتریس‌ها، ابزارهای ریاضی دیگری را می‌توان ساخت که در فیزیک کارایی داشته باشند. این موجودات جدید را با توجه به قوانین تبدیلی که تحت تبدیلی‌های مختصات دارند، تعریف می‌کنیم. اجازه دهید بحث را با اسکالر (کمیت نرده‌ای) آغاز کنیم. دمای نقاط مختلف اتاق را با تابع $T(x, y, z)$ نشان می‌دهیم. حالا دستگاه مختصات S را می‌چرخانیم و به دستگاه S' می‌رویم. واضح است که مختصات یک نقطه‌ی دلخواه که قبلاً با (x, y, z) داده می‌شد حالا در دستگاه چرخیده با (x', y', z') داده می‌شود. دمای نقطه‌ی مورد نظر در دستگاه چرخیده را با $T'(x', y', z')$ نشان می‌دهیم. انتظار نداریم دمای نقطه‌ی مورد نظر از دید ناظرهای واقع در دو دستگاه، دو عدد متفاوت اندازه‌گیری شود. پس

$$T'(x', y', z') = T(x, y, z).$$

در اینجا تعریف می‌کنیم که دمای هر نقطه یک کمیت نرده‌ای است چون مقدار آن در هر دستگاهی یکسان است. در واقع کمیتی عددی که مقدار آنها مستقل از دستگاه باشد، کمیات نرده‌ای هستند.

اجازه دهید بحث را با مثال دیگری که کمی متفاوت است ادامه دهیم. یک ذره را تصور کنید که در حال حرکت است. اگر بخواهیم سرعت این ذره را بیان کنیم، ناچاریم از سه عدد (v_x, v_y, v_z) استفاده کنیم که به آنها مؤلفه‌های سرعت در راستاهای مختلف می‌گوییم. در این مورد، علاوه بر اندازه‌ی سرعت، اطلاعات مربوط به جهت حرکت نیز در این سه عدد گنجانده شده است. اگر از دستگاه مختصات چرخیده به همان ذره نگاه کنیم، ناچاریم از سه عدد دیگر استفاده کنیم که مؤلفه‌های سرعت در دستگاه جدید هستند. اگر مؤلفه‌های سرعت همان ذره در دستگاه چرخیده را با (v'_x, v'_y, v'_z) نشان دهیم، سؤال این است که چه ارتباطی بین سرعت‌ها در دو دستگاه وجود دارد. به سادگی و با استفاده از روابط هندسی، می‌بینیم که رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$v'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} v_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.1)$$

در اینجا نیز R_{ij} ، مؤلفه‌های ماتریس دوران هستند. اکنون می‌گوییم سه عدد (v_x, v_y, v_z) بردار سرعت را می‌سازند. بصورت کلی‌تر، هر کمیت فیزیکی در فضای ۳ بعدی که با قانون بالا (رابطه‌ی ۶.۱) تبدیل شود را به عنوان بردار تعریف می‌کنیم. بردار مکان، بردار شتاب و بردار میدان الکتریکی مثالهای مهمی از بردارها هستند. رابطه‌ی ۳.۱، قانون تبدیل بردار مکان است. ممکن است برخی از خصوصیات فیزیکی با تعداد بیشتری از اعداد بیان شوند. به عنوان مثال لختی دورانی یک جسم صلب را در نظر بگیرید. برای اینکه توصیف کاملی از لختی دورانی داشته باشیم، لازم است تعداد ۳ عدد را مشخص کنیم. اگر این ۳ عدد را به صورت فشرده با اعداد T_{ij} با $i, j = 1, 2, 3$ نشان دهیم، از مکانیک اجسام صلب می‌دانیم که این ۳ عدد با تبدیل مختصات بصورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$T'_{ij} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 R_{im} R_{jn} T_{mn}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (7.1)$$

در این صورت به کمیت T یک تانسور رتبه‌ی ۲ می‌گوییم. در مورد برخی کمیات فیزیکی ممکن است با تعداد بیشتری از اعداد سروکار داشته باشیم که به سراغ تانسورهای مراتب بالاتر، مثل T_{ijk} می‌رویم. تعمیم تعریف قانون تبدیل برای تانسورهای

مراتب بالاتر به عهده‌ی خواننده واگذار می‌شود. درواقع اسکالر، تانسور رتبه‌ی صفر و بردار، تانسور رتبه‌ی یک است. انحنا ی فضا و نیروهای داخلی وارد بر هر نقطه‌ی درون یک محیط پیوسته، مثالهای مهمی از تانسورها هستند که در فصل‌های بعدی از آنها استفاده می‌کنیم.

۴.۱ عملگرهای دیفرانسیلی

کمیات نرده‌ای، برداری یا تانسوری که در بالا تعریف شدند در حالت کلی ممکن است تابعی از نقاط فضا باشند. در این صورت یک میدان نرده‌ای، برداری یا تانسوری داریم. سؤال مهمی که می‌خواهیم به آن پردازیم به نحوه‌ی اندازه‌گیری تغییرات فضایی این میدانها مربوط می‌شود. با توجه به اینکه در حالت کلی، تغییرات در راستاهای مختلف امکان پذیر است، می‌خواهیم روش دقیقی برای بیان تغییرات داشته باشیم.

عملگر گرادیان (شیب)، عهده‌دار اندازه‌گیری تغییرات است. برای تعریف این عملگر و مطالعه‌ی خواص آن، تغییرات نسبت به مؤلفه‌های مختلف بردار مکان در دستگاه دکارتی را با مشتقات پاره‌ای $\frac{\partial}{\partial x_1}$ ، $\frac{\partial}{\partial x_2}$ و $\frac{\partial}{\partial x_3}$ می‌سنجیم. دقت کنید که برای سادگی از پانویس‌های عددی برای مشخص کردن راستاهای مختلف استفاده کرده‌ایم. عملگر سه مؤلفه‌ای شیب را بصورت:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad (۸.۱)$$

و یا بصورت فشرده‌تر $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ، تعریف می‌کنیم. می‌خواهیم ببینیم که آیا عملگر گرادیان خاصیت برداری دارد؟ پاسخ این سؤال مثبت است. برای بررسی این موضوع از قانون تبدیل بردار مکان $x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j$ ، و تعریف مشتق گیری زنجیره‌ای بصورت $\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x_k}$ استفاده کنید تا به رابطه‌ی زیر برسید:

$$\nabla'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \nabla_j, \quad (۹.۱)$$

که اثباتی است بر این مدعا که عملگر شیب خاصیت برداری دارد. در واقع قانون تبدیل این عملگر دقیقاً مشابه قانون تبدیل بردارها شده است.

حالا یک میدان اسکالر $T(x_1, x_2, x_3)$ ، مثلاً دمای اطاق را در نظر بگیرید. به سادگی

می‌توانید ببینید که با اعمال عملگر گرادیان روی میدان اسکالر به میدان جدیدی می‌رسیم که لزوماً خاصیت برداری دارد:

$$\nabla T(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\partial T}{\partial x_1}, \frac{\partial T}{\partial x_2}, \frac{\partial T}{\partial x_3} \right). \quad (10.1)$$

از نظر شهودی، گرادیان جهت بیشترین تغییرات را نشان می‌دهد. یعنی اگر در یک نقطه‌ی دلخواه، جهت بردار ∇T را بدست آوریم، جهتی را یافته‌ایم که اگر در آن راستا حرکت کنیم بیشترین تغییرات دمایی را داریم. دیگر خاصیت عملگر گرادیان این است که می‌توانیم مقدار تغییرات دما را در راستای دلخواهی که با بردار یکه‌ی $\hat{n}$ مشخص می‌شود، بدست آوریم. تغییرات میدان دمایی در این راستا بصورت $\hat{n} \cdot \nabla T$ ، محاسبه می‌شود.

در مورد میدان‌های برداری، وضعیت کمی پیچیده‌تر و انتخاب‌های متفاوتی برای اعمال عملگر گرادیان داریم. میدان برداری دلخواه $\mathbf{E} = (E_1(\mathbf{r}), E_2(\mathbf{r}), E_3(\mathbf{r}))$ را در نظر بگیرید. که در آن بردار مکان بصورت $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ است. ضرب داخلی یا ضرب خارجی بردار شیب روی میدان برداری، نتایج و تعابیر مختلفی دارد. ضرب داخلی عملگر گرادیان و میدان برداری به عملگر دیورژانش (واگرایی) معروف است و بصورت زیر از هر میدان برداری $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ ، یک میدان اسکالر می‌سازد:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}. \quad (11.1)$$

به ضرب خارجی عملگر گرادیان با میدان برداری، عملگر کرل (تاو) گفته می‌شود و بصورت زیر با اعمال عملگر تاو روی هر میدان برداری، یک میدان برداری جدید ساخته می‌شود:

$$\nabla \times \mathbf{E}(x_1, x_2, x_3), \quad (12.1)$$

که مؤلفه‌های آن بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{E})_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2} E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} E_2, \\ (\nabla \times \mathbf{E})_2 &= \frac{\partial}{\partial x_3} E_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} E_3, \end{aligned}$$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} E_1, \quad (13.1)$$

و یا بصورت فشرده تر $(\nabla \times \mathbf{E})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} E_k$ ^۱.

برای اینکه تعبیر شهودی مناسبی از دو عملگر واگرایی و تاو به دست آوریم، ابتدا دو قضیه‌ی مهم گاوس و استوکس را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

مطابق شکل ۳.۱ - قسمت چپ، حجم دلخواه V را در نظر بگیرید که توسط سطح بسته‌ی S محصور شده است. مطابق قضیه‌ی گاوس، انتگرال از واگرایی هر میدان برداری دلخواه درون حجم مورد نظر برابر است با انتگرال میدان برداری روی سطح محصور کننده‌ی آن حجم:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS, \quad (14.1)$$

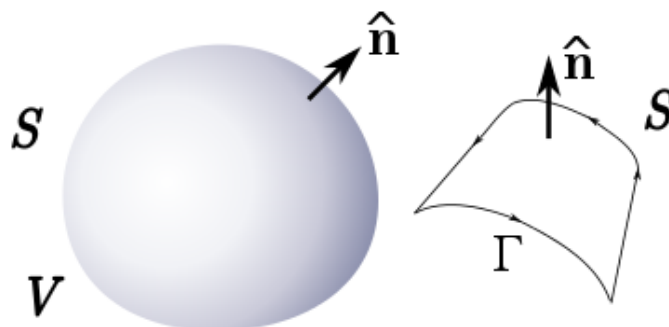
که در اینجا $\hat{n}$ ، بردار یکه‌ی است که بصورت موضعی به سطح عمود و به سمت خارج سطح است.

قضیه‌ی استوکس مربوط می‌شود به انتگرال گیری روی سطوح باز. مطابق شکل ۳.۱ - قسمت راست، سطح باز و دلخواه S را در نظر بگیرید که توسط مسیر بسته‌ی Γ محدود شده است. مطابق قضیه‌ی استوکس، انتگرال از تاو هر میدان برداری دلخواه روی سطح مورد نظر برابر است با انتگرال میدان برداری روی مسیر بسته‌ی محدود کننده‌ی آن سطح:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot \hat{n} dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\Gamma. \quad (15.1)$$

با توجه به این قضایای انتگرالی می‌توانیم تعبیر شهودی مناسبی برای واگرایی و تاو یک میدان برداری ارائه کنیم. فرض کنید در یک نقطه‌ی دلخواه فضا، واگرایی یک میدان برداری غیر صفر باشد. در این صورت قضیه‌ی گاوس را برای یک حجم بی‌نهایت کوچک کروی حول این نقطه به کار می‌بریم. چون سمت چپ رابطه‌ی ۱۴.۱ غیر صفر است پس سمت راست هم غیر صفر می‌شود. برای غیر صفر شدن سمت راست باید راستای میدان برداری در هر نقطه روی سطح کره‌ی خیلی کوچک، با راستای بردار عمود بر کره (راستای شعاعی) همواره موازی یا پاد موازی باشد. یعنی اگر در نقطه‌ای واگرایی میدان برداری غیر صفر باشد چیزی شبیه چشمه یا

^۱ برای خواننده‌ی ناآشنا، نماد ϵ_{ijk} در مسائل انتهای این فصل معرفی شده است.



شکل ۴.۱ راست: یک سطح باز و دلخواه S توسط مسیر بسته Γ احاطه شده است. چپ: حجم دلخواه V توسط سطح بسته S محصور است. در هر دو مورد بردار یکه $\hat{n}$ بصورت موضعی عمود بر سطح رسم شده است.

چاهک داریم. البته دقت کنید که اگر در یک نقطه چشمه و یا چاهک داشته باشیم نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که در همه‌ی نقاط فضا واگرایی میدان غیر صفر است و باید استدلال بالا را در مورد همه‌ی نقاط دنبال کنیم.

با روش مشابه بالا و استفاده از قضیه‌ی استوکس، نشان دهید که اگر خطوط میدان حول نقطه‌ای از فضا بصورت گردابه و گردشی باشند، آنگاه در آن نقطه تاو میدان برداری غیر صفر است. برای این منظور قضیه‌ی استوکس را برای یک سطح دایره‌ای بی‌نهایت کوچک حول نقطه‌ای که تاو میدان غیر صفر است، بکار بگیرید. در فصل بعدی ارتباط دقیقی بین حرکت چرخشی قطعات شاره و ارتباط آن با تاو میدان برداری سرعت به‌دست می‌آوریم. قطعه‌ی شاره‌ی واقع شده در نقطه‌ای که تاو میدان برداری سرعت در آن غیر صفر است، حول محوری که از همان نقطه رد می‌شود، حرکت چرخشی دارد.

پرسش‌ها

۱.۱ نشان دهید ماتریس دوران حول محور z را می‌توان بصورت $R_z(\gamma) = e^{\gamma J_z}$ نوشت که در آن ماتریس J_z بصورت زیر است:

$$J_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (۱۶.۱)$$

۲.۱ کلی‌ترین دوران سه بعدی در فضا با چند زاویه مشخص می‌شود؟ شکل این ماتریس دوران را بدست آورید.

۳.۱ مطابق شکل ۱.۱، در یک نقطه‌ی دلخواه فضا، راستاهای یکه‌ی دستگاه مختصات قطبی S' را می‌سازند. در اینجا بردارهای یکه در راستاهای x' ، y' و z' را منطبق بر بردارهای یکه‌ی دستگاه قطبی S' می‌گیریم. ماتریس دورانی که دستگاه اولیه‌ی دکارتی را به دستگاه قطبی-کروی S' مربوط می‌کند را پیدا کنید. این مساله نباید موجب گمراهی خواننده شود و نتیجه بگیرد که ترکیب (r, θ, ϕ) ، یک بردار است. این ترکیب سه‌تایی، بردار نیست.

۴.۱ تانسور لوی‌چیویتا را با ϵ_{ijk} نشان داده و آن را بصورت زیر تعریف می‌کنیم. ϵ_{ijk} وقتی که (i, j, k) جایگشت زوجی از $(1, 2, 3)$ باشد برابر با ۱ و اگر جایگشتی فرد باشد، برابر با -۱ است. در غیر این صورت، یعنی زمانی که دست‌کم دو اندیس برابر باشند، مقدار تانسور لوی‌چیویتا صفر است. شکل این تانسور مرتبه‌ی ۳ را در یک دستگاه چرخیده‌ی دلخواه بدست آورید و نشان دهید در دستگاه چرخیده نیز مؤلفه‌های تانسور تبدیل شده دقیقاً مثل مؤلفه‌های آن در دستگاه اصلی و از قانونی مشابه آن به دست می‌آیند.

۵.۱ الف: دو بردار دلخواه با مؤلفه‌های u_i و v_i را در نظر بگیرید. سه عدد جدید w_i را بصورت $w_i = \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} u_j v_k$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید w_i ، مؤلفه‌های یک بردار را تشکیل می‌دهند. در واقع بردار w از ضرب خارجی دو بردار u و v بدست

می‌آید. ب: نشان دهید ضرب داخلی این دو بردار یعنی $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u_i v_i$ یک اسکالر است. پ: آیا مؤلفه‌ی x بردار مکان، یک اسکالر است؟
 ۶.۱ برای یک تانسور دلخواه T_{ij} ، نشان دهید که رد یک ماتریس که به صورت زیر تعریف می‌شود، یک کمیت اسکالر است:

$$tr(T) = \sum_{i=1}^3 T_{ii}.$$

۷.۱ یک میدان اسکالر بصورت زیر را در نظر بگیرید:

$$p(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

میدان برداری $\mathbf{A} = \nabla p$ را بدست آورید. از آنجا دیورژانس و کرل $\mathbf{A}$ را محاسبه نمایید.
 ۸.۱ یک کره به شعاع R را در نظر بگیرید و با محاسبه‌ی انتگرالهای زیر، قضیه‌ی دیورژانس را بررسی کنید:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV, \quad \int_S \mathbf{A} \cdot \hat{n} \, dS,$$

که در آن $\mathbf{A}$ میدان برداری مسأله‌ی قبلی است. در اینجا V و S ، به ترتیب حجم و سطح کره‌ای به شعاع R را نشان می‌دهند.
 ۹.۱ یک دایره به شعاع R در صفحه‌ی (x, y) در نظر بگیرید و با محاسبه‌ی انتگرالهای زیر، قضیه‌ی استوکس را بررسی کنید:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot \hat{n} \, dS, \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\Gamma,$$

که در آن $\mathbf{A}$ میدان برداری مسأله‌ی قبلی است. در اینجا S و Γ ، به ترتیب سطح و مرز دایره‌ای به شعاع R را نشان می‌دهند.
 ۱۰.۱ با استفاده از خواص برداری عملگر گرادیان، شکل آنرا در دستگاه قطبی کروی بدست بیاورید. برای این کار مطابق شکل ۱۰.۱، دستگاه قطبی کروی را بصورت دوران یافته‌ی دستگاه دکارتی در نظر بگیرید.



اُسبورن رینولدز، فیزیکدان و مهندس انگلیسی، در سال ۱۸۴۲ زاده شد. او در سال ۱۸۶۷ از دانشکده‌ی کویینز کیمبریج در رشته‌ی ریاضی فارغ‌التحصیل شد و بلافاصله به عنوان اولین پروفیسور مهندسی در دانشکده‌ی اوزمنچستر شروع به کار کرد. وی عضو انجمن سلطنتی انگلیس و دارنده‌ی یک مدال سلطنتی نیز بوده. هر چند مطالعات اولیه‌ی رینولدز با الکتریسیته و مغناطیس شروع شد، ولی به زودی روی مکانیک شاره‌ها متمرکز شد. سهم تحقیقات رینولدز در مسائل مربوط به انتقال حرارت بین جامدات و شاره‌ها و طراحی توربین‌ها بسیار تاثیر گذار بوه است. از دیگر موضوعات بررسی شده توسط رینولدز می‌توان به نظریه‌ی تقریبی روغن‌کاری در مکانیک شاره‌ها، نظریه‌ی ریاضی تلاطم و تعیین معادل مکانیکی گرما اشاره کرد. امروزه برای دسته‌بندی شارش‌ها در شرایط آزمایشی مختلف از عدد بدون بعدی استفاده می‌شود که به نام رینولدز نامگذاری شده است.

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

۲

مقدمات فیزیکی

به ارائه‌ی یک روش ریاضی برای بیان نوع حرکت، سینماتیک گفته می‌شود و این موضوع، پیش نیاز مطالعه‌ی قوانین حرکتی شاره‌هاست. در نگاه پدیده‌شناختی که رهیافت این کتاب است، شاره را بصورت یک محیط پیوسته در نظر می‌گیریم. درجات آزادی یک محیط پیوسته نامتناهی است. به این سبب، لازم است تا از روش‌های خاصی برای بیان سینماتیک شاره‌ها استفاده کنیم. علاوه بر سینماتیک، ملاحظات مربوط به مفهوم نیرو نیز باید با دقت کافی در مورد محیط‌های پیوسته در نظر گرفته شود. اطلاعات مربوط به نیرو در محیط‌های پیوسته، از طریق تانسور تنش داده می‌شود. خواص تقارنی تانسور تنش بصورت کاملاً کلی و برای محیط‌های پیوسته، کشسان یا شاره، از قوانین نیوتن و اصول اولیه‌ی فیزیک به‌دست می‌آیند. در این فصل، تانسور تنش با جزییات ریاضی تعریف و خواص تقارن آن بررسی می‌شود.

۱.۲ میدان سرعت شاره

مشابه هر مسأله‌ی مکانیک، ابتدا باید روشی برای مشخص کردن سینماتیک آن مسأله بیابیم. دو روش لاگرانژ و اویلر پاسخ‌های متفاوتی برای مشخص کردن وضعیت حرکتی شاره‌ها دارند. در

اینجا به کلیات این دو روش اشاره می‌کنیم.

در روش لاگرانژ که تعمیم سینماتیک تک ذره‌ای به سامانه‌ی بس ذره‌ای است، حرکت شاره با تحول زمانی بردار مکان و سرعت تک تک ذرات آن داده می‌شود.^۱ فرض کنید ذرات شاره را با پارامتر پیوسته‌ی $\mathbf{r}$ مشخص کنیم. در این صورت بردار مکان ذره‌ی $\mathbf{r}$ را با $\mathbf{X}_r(t)$ نشان می‌دهیم.^۲ در واقع ارائه‌ی اطلاعات مربوط به بردار مکان تمامی ذرات، سینماتیک حرکت را مشخص می‌کند. در این صورت واضح است که بردارهای سرعت و شتاب ذرات شاره بصورت زیر داده می‌شوند:

$$\mathbf{v}_r(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{X}_r(t), \quad \mathbf{a}_r(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}_r(t). \quad (۱.۲)$$

رهیافت اوایلر، روش جایگزین دیگری برای مشخص کردن سینماتیک شاره است. برای این منظور یک دستگاه مختصات دلخواه را در نظر می‌گیریم و مختصات نقاط مختلف فضا را با بردار مکان $\mathbf{x}$ مشخص می‌کنیم. دقت کنید که اکنون مجموعه‌ای پیوسته از بردارهای مکان داریم که تمام نقاط فضا (نه شاره) را مشخص می‌کنند. در روش اوایلر به جای دنبال کردن مسیر تک تک ذرات، بردار سرعت ذره‌ای از شاره که در زمان t از یک نقطه مشخص $\mathbf{x}$ می‌گذرد را بصورت $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ نشان می‌دهیم. اگر این کار را برای تمامی نقاط فضا انجام دهیم به میدان برداری $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ می‌رسیم که اطلاعات کامل سینماتیک شاره را داراست. توصیف ریاضی مکانیک شارها که در بخش‌های بعدی این کتاب ارائه می‌شود بر پایه‌ی رهیافت اوایلری است. به همین سبب لازم است تا دقت بیشتری در میدان اوایلری سرعت داشته باشیم.

میدان شتاب

می‌خواهیم ببینیم که شتاب ذرات شاره چطور از میدان اوایلری سرعت بدست می‌آیند؟ واضح است که $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ تغییرات زمانی سرعت در نقطه‌ی خاص $\mathbf{x}$ از فضا است. از آنجا که در

^۱ دقت کنید که منظور از ذره در اینجا لزوماً مولکولها و اتمهای تشکیل دهنده‌ی شاره نیست [۱۷]. در نگاه بزرگ مقیاس، ذرات قطعات ریزی از شاره هستند که اندازه‌ی آنها در مقایسه با ابعاد ماکروسکوپی بسیار کوچک است.
^۲ پارامتر $\mathbf{r}$ می‌تواند مکان اولیه‌ی ذرات باشد. در این صورت $\mathbf{X}_r(t)$ بردار مکان ذره‌ای است که در لحظه‌ی $t = 0$ در مکان $\mathbf{r}$ قرار داشته است.

لحظات مختلف، ذرات مختلفی از این نقطه می‌گذرند پس این تغییرات اندازه‌گیری شده، شتاب ذرات را مشخص نمی‌کند. دقت کنید که شتاب یک ذره طبق تعریف، از تغییرات زمانی سرعت همان ذره بدست می‌آید.

به عنوان یک مثال، حالت $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0$ را در نظر بگیرید. در این حالت که به آن جریان پایا گفته می‌شود، سرعت در تمام نقاط با گذشت زمان تغییر نمی‌کند. البته سرعت در نقاط مختلف می‌تواند متفاوت باشد. آیا در حالت پایا ذرات شار می‌توانند شتاب داشته باشند؟ پاسخ مثبت است. در اینجا روش محاسبه‌ی شتاب از میدان اویلری سرعت را شرح می‌دهیم. دستگاه مختصات آزمایشگاه S را در نظر بگیرید. ناظر همراه این دستگاه، میدان سرعت شار را به صورت $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ اندازه می‌گیرد. اکنون دستگاه S' را در نظر بگیرید که با سرعت لحظه‌ای برابر با سرعت شار یعنی $\mathbf{V} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ حرکت می‌کند. در واقع این ناظر همراه شار حرکت می‌کند و اگر تغییرات زمانی از دید این ناظر محاسبه شود، دقیقاً تغییرات زمانی سرعت یک ذره‌ی خاص بررسی شده است. پس برای محاسبه‌ی شتاب کافیت تغییرات زمانی از دید ناظر متحرک اندازه‌گیری شود. تغییرات زمانی از دید ناظر S' را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t'} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (2.2)$$

که در اینجا $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ میدان اویلری شتاب است و شتاب لحظه‌ای ذره‌ای از شار که در لحظه‌ی t از نقطه‌ی $\mathbf{x}$ می‌گذرد را نشان می‌دهد.

اکنون برای محاسبه‌ی تغییرات از دید ناظر متحرک، مطابق شکل ۱.۲ دستگاه مختصات S' را در نظر بگیرید که نسبت به دستگاه مختصات آزمایشگاه S با سرعت $\mathbf{V}$ حرکت می‌کند. تبدیلات گالیله‌ای که این دو دستگاه را به هم مربوط می‌کنند، بصورت زیر است [۴۳]:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{V}t', \quad t = t', \quad (3.2)$$

در این صورت تغییرات زمانی در دستگاه متحرک بصورت زیر اندازه‌گیری خواهد شد:

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \quad (4.2)$$

با ساده‌سازی داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}, \quad (5.2)$$

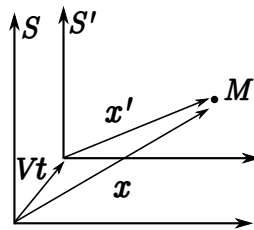
دقت کنید که $\mathbf{V} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. معمولاً تغییرات زمانی در دستگاه همراه شاره را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right). \quad (۶.۲)$$

پس میدان شتاب اویلری به صورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (۷.۲)$$

اکنون به پرسشی که قبلاً در مورد شتاب یک شارش پایا مطرح کردیم بازگردید. برای یک شارش پایا، تغییرات مکانی میدان اویلری سرعت به شتاب واقعی ذرات ارتباط دارد و صفر بودن $\partial \mathbf{u} / \partial t$ به معنای این نیست که ذرات شتاب ندارند. در فصل‌های بعدی که دینامیک شاره‌ها مطالعه می‌شود، از میدان شتاب استفاده خواهیم کرد.



شکل ۱.۲ دستگاه مختصات S' نسبت به دستگاه مختصات S (آزمایشگاه) با سرعت $\mathbf{V}$ حرکت می‌کند.

۲.۲ خطوط میدان

معمولاً برای درک شهودی بهتر از میدانهای برداری از خطوط میدان استفاده می‌شود. از سه مفهوم خط جریان، خط مسیر و خط رنگ برای ایجاد شهود هندسی از خطوط میدان استفاده می‌شود.

خط جریان

خطوط جریان، خطوطی فرضی در فضا هستند که مماس بر آنها در هر نقطه در راستای میدان

سرعت در آن نقطه است. برای اینکه روش بدست آوردن خطوط جریان از میدان اویلری سرعت را شرح دهیم، از یک مثال ۲ بعدی استفاده می‌کنیم. میدان اویلری سرعت بصورت $\mathbf{u}(x, y) = (u_x(x, y), u_y(x, y))$ را در نظر بگیرید که یک شارش دو بعدی دلخواه را در صفحه‌ی (x, y) مشخص می‌کند. می‌خواهیم مطابق شکل ۲.۲، یکی از خطوط میدان که از نقطه‌ی دلخواه M می‌گذرد را رسم کنیم. فرض کنید معادله‌ی خط مورد نظر با تابع $y = y(x)$ داده شده باشد. در یک نقطه‌ی دلخواه روی این خط، مؤلفه‌های یک بردار واحد مماس بصورت زیر است:

$$\hat{\mathbf{t}} = (\cos \theta, \sin \theta),$$

که در آن $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ ، زاویه خط مماس با محور افقی را مشخص می‌کند. در این نقطه باید بردار مماس و میدان برداری با هم موازی باشند. پس:

$$\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{t}} = 0. \quad (8.2)$$

حال با جایگزین کردن رابطه‌ی دیفرانسیلی بردار مماس به معادله‌ی دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

$$u_x(x, y) \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} - u_y(x, y) \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = 0, \quad (9.2)$$

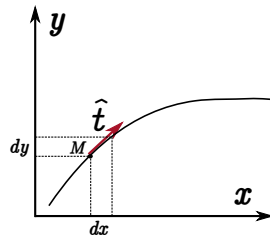
که در آن $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ اکنون داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u_y(x, y)}{u_x(x, y)}.$$

برای هر میدان برداری دلخواه با حل معادله‌ی دیفرانسیل بالا می‌توانیم شکل خطوط میدان را بدست آوریم.

تعمیم روش بالا برای حالت شارش ۳ بعدی، معادلات دیفرانسیل توصیف کننده‌ی خطوط جریان را بدست می‌دهد. فرض کنید بردار بی‌نهایت کوچک مماس بر خم مورد نظر را با $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ نشان دهیم. پس شرط لازم برای این که خط جریان با میدان سرعت هم‌سو باشد بصورت زیر است:

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{u} = 0. \quad (10.2)$$



شکل ۲.۲ یک خط فرضی جریان با بردار مماس بر آن در فضای دوبعدی نشان داده شده است.

به بیان دیگر:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}, \quad (11.2)$$

بنابراین برای یافتن خطوط جریان باید دسته معادلات دیفرانسیل جزئی زیر حل شوند:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u_z}{u_x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u_z}{u_y}. \quad (12.2)$$

به عنوان یک مثال ساده، شارش دو بعدی، یکنواخت و پایایی بصورت $\mathbf{u} = (u_0, 0)$ را در نظر بگیرید که در آن u_0 ثابت است. معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = 0$ ، دارای بی نهایت جواب بصورت $y = y_0$ ، برای تمام مقادیر مختلف y_0 است. در واقع خطوط صاف بدست آمده معرف خطوط جریان هستند. در این مثال بسیار ساده، خطوط جریان بر مسیرهای حرکتی ذرات تشکیل دهنده شارح منطبق هستند. آیا این نتیجه کلی است و مسیر حرکت ذرات با خطوط جریان یکی هستند؟

خط مسیر

مفهوم مهم دیگری که درک شهودی بهتری از نوع شارش می دهد، مسیر واقعی حرکت ذرات تشکیل دهنده شارح است. به این مسیرها، خط مسیر می گوییم. از آنجا که تمامی اطلاعات سینماتیکی شارش در میدان اویلری سرعت گنجانده شده است، روش بدست آوردن خطوط مسیر از میدان سرعت را شرح می دهیم. می خواهیم مسیر حرکت ذره ای را دنبال کنیم که در زمان $t = t_0$ در مکان $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ قرار داشته است. می خواهیم تحول زمانی مکان این

ذره یعنی $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ را بدست آوریم. در این صورت، سرعت این ذره در هر لحظه‌ی t از میدان سرعت بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= u_x(x(t), y(t), z(t); t), \\ \frac{d}{dt}y(t) &= u_y(x(t), y(t), z(t); t), \\ \frac{d}{dt}z(t) &= u_z(x(t), y(t), z(t); t).\end{aligned}\quad (۱۳.۲)$$

با حل همزمان دستگاه معادلات دیفرانسیل بالا به همراه شرط اولیه‌ی توضیح داده شده، معادله‌ی خط مسیر ذره‌ی مورد نظر بر حسب زمان بدست می‌آید. با تکرار این روش برای شرایط اولیه‌ی متفاوت، خطوط مسیر برای تمامی ذرات بدست می‌آیند.

خط رنگ

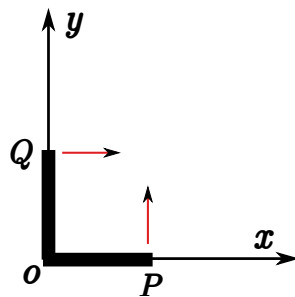
نوع دیگری از خطوط در شارها را می‌توان تصور کرد که به آنها خطوط رنگ گفته می‌شود. در نظر بگیرید که در نقطه‌ای مشخص از یک شارش، مقداری دانه‌های رنگی را به آهستگی به شاره اضافه کنیم. اگر اندازه‌ی رنگ اضافه شده زیاد نباشد، رگه‌ها یا خطوط رنگی تشکیل می‌شوند که به آنها خطوط رنگ می‌گوییم. در واقع یک خط رنگ در لحظه‌ی $t = t_0$ ، مکان هندسی ذراتی است که همگی آنها در لحظات قبل‌تر ($t < t_0$)، از یک نقطه‌ی مشترک x_0 گذشته باشند. برای یافتن شکل خطوط رنگ، عملاً دسته معادلات ۱۳.۲ با شرط مرزی مناسب باید حل شوند.

برای شارش پایا، سرعت در نقاط مختلف شاره به زمان بستگی ندارد. در این صورت خطوط جریان، مسیر و رنگ بر هم منطبق هستند. عدم تطابق خطوط مختلف تعریف شده برای شارش ناپایا، بسیار روشن است. در عمل با مشاهده‌ی تجربی خطوط رنگ می‌توانیم خطوط مسیر را بصورت ریاضی بازسازی کنیم. خطوط رنگ با تزریق رنگ به جریان مایعات و تزریق دود به جریان گازها به دست می‌آیند.

تعبیر شهودی چرخش

آیا هرنوع چرخش یا حرکت دورانی در شاره به معنی غیر صفر شدن تاو میدان سرعت است؟ در

اینجا می‌خواهیم ارتباط تاو یک میدان برداری، مثل میدان سرعت یعنی $\nabla \times \mathbf{u}$ را با چرخش واقعی شاره مطالعه کنیم. برای سهولت مطابق شکل ۳.۲، حالت شارش دوبعدی را در نظر بگیرید. راه عملی تشخیص چرخش شاره در هر نقطه، این است که یک تکه چوب بسیار کوچک و بسیار سبک را روی شاره قرار دهیم. چرخش موجود در چوب ارتباط مستقیم با چرخش شاره دارد. اگر قطعه‌ی چوب، حول مرکزی که از درون خودش می‌گذرد، شروع به چرخش کند، می‌توانیم ادعا کنیم که شاره در آن نقطه چرخشی است. برای دقت بیشتر از دو چوب که در راستاهای عمود بر هم قرار دارند استفاده می‌کنیم. این دوچوب را در راستاهای OP و OQ قرار داده‌ایم. مقدار سرعت نسبی دو انتهای هر چوب را برای حالتی که طول آنها برابر با a ، و بسیار کوچک است، با کمک بسط تیلور بصورت زیر می‌نویسیم:



شکل ۳.۲ دو قطعه چوب کوچک و سبک را در شاره‌ای که چرخشی است قرار می‌دهیم تا چرخش شاره را بسنجیم.

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_O + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} a + \dots, \quad \mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_O + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} a + \dots \quad (۱۴.۲)$$

اکنون به عنوان حالت خاص فرض کنید که میدان سرعت به صورتی باشد که برای آن داشته باشیم:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0,$$

و

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} \neq 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} \neq 0,$$

حالا داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_P - \mathbf{u}_O &= \frac{\partial u_y}{\partial x} a \hat{y} \\ \mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_O &= \frac{\partial u_x}{\partial y} a \hat{x}, \end{aligned} \quad (15.2)$$

یعنی دو جمله‌ی $\frac{\partial}{\partial x} u_y$ و $\frac{\partial}{\partial y} u_x$ عملاً چرخش‌های دو چوب حول نقطه‌ی O را اندازه می‌گیرند. وجود چرخش در هر کدام از دو صورت بالا به چرخش موضعی شاره ارتباط دارد. پس مناسب‌تر است تا چرخش شاره را با ترکیب زیر بیان کنیم:

$$\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_y - \frac{\partial}{\partial y} u_x \right) = \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{u})_z.$$

دقت کنید که چرخش نقطه‌ی Q با علامت منفی در نظر گرفته شده‌است، زیرا هدف ما اندازه‌گیری مقدار خالص چرخش پاد ساعتگرد حول محور z است. پس تاو میدان سرعت در هر نقطه به چرخش ذاتی قطعه‌ی کوچکی از شاره که در آن نقطه وجود دارد بستگی دارد. به عنوان یک مثال، میدان سرعت دوبعدی زیر را که در دستگاه قطبی نوشته شده است در نظر بگیرید:

$$\mathbf{u} = r\omega(r)\hat{\theta}.$$

به سهولت می‌توانید خطوط چرخشی این میدان سرعت را که حول مبدأ مختصات می‌چرخند تصور کنید. آیا تاو این میدان سرعت که ظاهری چرخشی دارد، مخالف صفر است؟ با استفاده از شکل تاو در دستگاه استوانه‌ای می‌توانید تاو این میدان را بدست آورید. یک شکل کلی وابسته به شعاع برای فرکانس چرخش $\omega(r)$ فرض کنید و در مورد نتیجه‌ی بدست آمده بحث کنید.

۳.۲ نیرو در محیط‌های پیوسته

ذرات تشکیل دهنده‌ی یک شاره (در حالت کلی هر محیط پیوسته)، تحت تأثیر نیروهای درونی و برونی هستند. ارائه‌ی توصیف کاملی از نیروهای وارد بر تمام اجزای یک محیط پیوسته پیچیدگی‌هایی دارد. این موضوع به علت نامتناهی بودن درجات آزادی محیط پیوسته است. در این فصل با معرفی مفهوم تانسور تنش، نشان می‌دهیم که مؤلفه‌های مختلف این تانسور،

نیروهای درون محیط‌های پیوسته را مشخص می‌کنند. در ادامه‌ی این فصل، خواص عمومی تانسور تنش را بیشتر مطالعه می‌کنیم.

یک سامانه‌ی فیزیکی مثل شاره‌ی درون لوله یا یک قطعه اسفنج تغییر شکل یافته را در نظر بگیرید. سؤال اساسی که در اینجا می‌خواهیم به آن پردازیم، پیدا کردن راهی برای ارائه‌ی اطلاعات مربوط به نیروهای وارد بر این سامانه است. در نگاه ریزمقیاس، سامانه‌های فیزیکی از اتم‌ها و مولکول‌ها تشکیل شده‌اند. پس کاملاً بدیهی است که برای ارائه‌ی اطلاعات نیروهای وارده، از بردارهای نیروی وارد بر هر ذره کمک بگیریم. در واقع اگر تعداد مولکول‌ها را N بگیریم، باید در هر لحظه، همین تعداد بردار نیروی $\mathbf{f}_i$ (نیروی وارد بر ذره‌ی i ام) را مشخص کنیم. این صورت می‌توانیم ادعا کنیم که در هر لحظه وضعیت کامل نیروها را مشخص کرده‌ایم. نگاه ریزمقیاس، روش مورد بحث در این کتاب نیست. در واقع در مکانیک آماری و نظریه‌ی جنبشی با رهیافت ریزمقیاس به بررسی سامانه‌های فیزیک پرداخته می‌شود. دقت کنید که تعداد اتم‌ها از مرتبه‌ی بزرگی عدد آوگادرو است که باعث پیچیده شدن توصیف ریزمقیاس می‌شود.

در رهیافت بزرگ مقیاس که مورد نظر ما در این کتاب است، فرض می‌کنیم که جزییات دانه‌ای (اتمی یا مولکولی) سامانه وجود ندارد (دید نمی‌شود). در این نگاه، یک محیط کاملاً پیوسته داریم. محیط پیوسته از قطعات بی‌نهایت کوچکی ساخته شده که کنار هم قرار گرفته‌اند. این قطعات را بصورت ریاضی بسیار کوچک فرض می‌کنیم. در عمل البته، اندازه‌ی این قطعات نباید در حد اندازه‌های مولکولی و اتمی کوچک شود. در غیر این صورت توصیف بزرگ مقیاس و شرط پیوسته بودن سامانه برقرار نخواهد بود. در بحث زیر روشی برای توصیف نیروهای وارد بر سامانه پیوسته ارائه می‌کنیم. بحث ارائه شده و نتایج بدست آمده کاملاً کلی بوده و برای هر سامانه پیوسته‌ای، مثل شارش درون لوله یا اسفنج تغییر شکل یافته کاربرد دارد.

تنش

محیط پیوسته‌ی مورد نظر را به قطعات مکعب شکل با ابعاد d که کنار هم قرار دارند، تقسیم می‌کنیم. به صورت ریاضی اندازه‌ی مکعب‌ها را بسیار کوچک ($d \rightarrow 0$) فرض می‌کنیم. برای ارائه‌ی توصیف کاملی از وضعیت نیروهای وارد بر محیط پیوسته لازم است تا نیروهای وارد بر

تمامی این قطعات بی‌نهایت کوچک را داشته باشیم. در شکل ۴.۲، تمامی نیروهای وارد بر این مکعب را نشان داده‌ایم. چون اندازه‌ی مکعب را خیلی کوچک در نظر گرفته‌ایم، برای مشخص کردن نیروهای وارد بر مکعب فرض می‌کنیم که این نیروها فقط از طریق سطوح جانبی مبادله می‌شوند^۱. از آنجا که مکعب ۶ وجه دارد، تعداد ۱۸ مؤلفه‌ی نیروی مختلف در شکل مشخص شده‌اند. برای نامگذاری نیروها به صورت زیر عمل شده است. وضعیت مکعب را نسبت به یک دستگاه دکارتی و راستگرد (x, y, z) در نظر بگیرید. وجوه مختلف مکعب با بردارهای یکه‌ی عمود بر آنها مشخص می‌شود. مثلاً وجه روبه جلو در شکل، وجهی است که بردار یکه‌ی عمود بر آن در راستای بردار یکه‌ی $\hat{x}$ است. وجه مقابل آن در راستای $-\hat{x}$ است. در حالت کلی برای مشخص کردن بردار نیروی وارد بر هر وجه باید مؤلفه‌های آن نیرو در ۳ راستای اصلی مشخص شوند. برای اینکه نتایج، مستقل از اندازه‌ی مکعب شود به جای نیرو با مقدار نیرو بر واحد سطح کار می‌کنیم. مطابق شکل ۴.۲، $d^2 \times \sigma_{ij}$ مؤلفه‌ی $\hat{x}_j$ نیروی وارد بر وجهی است که بردار عمود بر آن وجه در راستای $\hat{x}_i$ است. همچنین $d^2 \times \bar{\sigma}_{ij}$ مؤلفه‌ی $-\hat{x}_j$ نیروی وارد بر سطحی است که بردار عمود بر آن وجه در راستای $-\hat{x}_i$ است.

در اینجا با یک بحث کاملاً کلی، برای حالتی که محیط پیوسته، شاره یا غیر شاره باشد، نشان می‌دهیم که دو شرط بسیار مهم برای مؤلفه‌های نیروی معرفی شده در بحث بالا برقرار است:

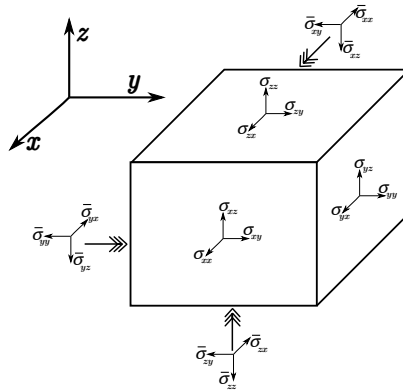
$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

این دو نتیجه تعداد عناصر مستقل را به ۶ عدد کاهش می‌دهد. برای اثبات فرض کنید، مثلاً برای یکی از مؤلفه‌ها داشته باشیم:

$$\sigma_{zz} \neq \bar{\sigma}_{zz}.$$

اجازه دهید ببینیم این فرض چه نتیجه‌ای در پی دارد. در این صورت نیروی خالص وارد شده به

^۱ علاوه بر کوچک بودن اندازه‌ی مکعب، برد کوتاه نیروهای مولکولی هم در این موضوع مهم است. اگر از برهمکنش‌های الکتریکی و مغناطیسی (در موادی که اتم‌ها و مولکولهای سازنده‌ی آن بار خالص ندارند) صرف‌نظر کنیم، دیگر انواع برهمکنش‌های مولکولی مثل واندروالز و هیدروژنی دارای برد کوتاهی هستند. در این موارد فقط مولکولها و اتم‌های مجاور تحت اثر یکدیگر قرار دارند و به هم نیرو وارد می‌کنند.



شکل ۴.۲ در این شکل نیروهای وارد بر یک مکعب کوچک که از طریق وجوه آن مبادله می‌شوند نشان داده شده است. $d^3 \times \sigma_{ij}$ مولفه‌ی $\hat{x}_j$ نیروی وارد بر سطحی است که بردار عمود بر آن وجه در راستای $\hat{x}_i$ است. همچنین $d^3 \times \bar{\sigma}_{ij}$ مولفه‌ی $-\hat{x}_j$ نیروی وارد بر سطحی است که بردار عمود بر آن وجه در راستای $-\hat{x}_i$ است.

مکعب در راستای $\hat{z}$ دارای یک جمله‌ی مخالف صفر بصورت $d^3 \times (\sigma_{zz} - \bar{\sigma}_{zz})$ می‌شود. این نیرو، شتابی به اندازه‌ی:

$$a = \frac{(\sigma_{zz} - \bar{\sigma}_{zz})}{\rho} \times \frac{1}{d^3},$$

به مکعب می‌دهد. در اینجا چگالی محیط پیوسته را با ρ مشخص کرده‌ایم. همانطور که دیده می‌شود، این شتاب برای حالت حدی مورد نظر ما که مکعب خیلی کوچک است، واگرا می‌شود. حتی برای شاره‌ی متحرک هم، اجزای بی‌نهایت کوچک آن دارای شتاب متناهی هستند. تنها راه ممکن برای متناهی شدن شتاب، برابر شدن نیروهای وارد بر وجوه مقابل یعنی $\sigma_{zz} = \bar{\sigma}_{zz}$ است. با ادامه‌ی این استدلال برای مؤلفه‌های دیگر می‌بینیم که باید برای تمام وجوه $\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}$ باشد.

برای اثبات خاصیت اساسی و دوم، فرض کنید که مثلاً: $\sigma_{xy} \neq \sigma_{yx}$ باشد. در این صورت مکعب باید حول محوری که از مرکز آن و در راستای $\hat{z}$ می‌گذرد بچرخد. با این گشتاور مخالف صفر و طبق قانون نیوتن، شتاب زاویه‌ای حول محور چرخش برابر است با:

$$\alpha = \frac{3(\sigma_{xy} - \sigma_{yx})}{\rho} \times \frac{1}{d^3},$$

که در آن لختی دورانی مکعب حول محوری که از وسط یکی از وجوه و عمود بر آن می‌گذرد برابر با $\frac{1}{2}\rho d^5$ است. برای حالت حدی که مکعب خیلی کوچک است، شتاب زاویه‌ای نامتناهی می‌شود. مشابه بحث قبلی، این نتیجه نیز غیر فیزیکی است. برای متناهی شدن شتاب زاویه‌ای، چاره‌ای نداریم جز اینکه: $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ باشد. با تکرار همین استدلال، متقارن بودن تمامی مولفه‌های دیگر σ_{ij} اثبات می‌شود. به مولفه‌های تانسور تنش گفته می‌شود. از آنچه تا اینجا گفته شد نتیجه می‌گیریم که برای مشخص کردن وضعیت نیروها در هر نقطه باید ۶ مولفه مستقل تانسور تنش را داشته باشیم:

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}.$$

البته دقت کنید که ما اثباتی برای اینکه مولفه‌های σ_{ij} ، خاصیت تانسوری دارند ارائه نکرده‌ایم. اثبات این موضوع کمی پر زحمت است. در واقع اگر σ تانسور باشد، باید تحت دوران به شکل زیر تبدیل شود:

$$\sigma'_{mn} = \sum_{i,j} R_{mi} R_{nj} \sigma_{ij}, \quad (۱۶.۲)$$

که در آن R_{mi} مولفه‌ی ماتریس دوران است. در یکی از مسائل انتهای فصل سعی می‌شود تا در یک حالت خاص درستی این رابطه بررسی شود.

دقت کنید که عناصر قطری یا تنش‌های عمودی به فشار هیدروستاتیکی ارتباط دارند. با توجه به اینکه فشار هیدروستاتیکی در هر نقطه کمیتی اسکالر و بدون جهت است، متوسط تنش‌های عمودی در راستاهای اصلی را بصورت زیر به نام فشار تعریف می‌کنیم:

$$P = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -\frac{1}{3}tr(\sigma).$$

دقت کنید که قبلاً ثابت کرده‌ایم که $tr(\sigma)$ اسکالر است. علامت منفی به سبب اختلافی که در تعریف جهت برای عناصر تانسور تنش و فشار داریم وارد شده است. در فصل‌های آینده بیشتر در مورد عناصر قطری و غیر قطری تانسور تنش و منشأ فیزیکی آنها بحث می‌کنیم.

نیروی وارد بر سطح دلخواه

فرض کنید تانسور تنش، درون یک محیط پیوسته کاملاً مشخص است. یعنی تمامی مولفه‌های

آنها در تمامی نقاط درون سامانه داریم. به یک سطح بسته‌ی دلخواه S ، که درون این سامانه قرار دارد چه نیرویی وارد می‌شود؟ به عنوان مثال، با در دست داشتن تانسور تنش چگونه نیروی وارد بر یک توپ صلب غوطه‌ور در آب را محاسبه کنیم؟ اگر نیروی وارد بر یک عنصر بی‌نهایت کوچک سطح (ds) را محاسبه کنیم، انتگرالگیری روی کل سطح، نیروی خالص بدست می‌آید. از آنجا که این سطح کوچک در سه راستای اصلی دکارتی دارای تصویری غیر صفر است، پس نیروی وارد بر هر مولفه‌ی آنها مجزا بدست می‌آوریم. سطح را بصورت $ds = (ds_x, ds_y, ds_z)$ ، در سه راستای دکارتی تصویر می‌کنیم. به عنوان نمونه، اگر بخواهیم مولفه‌ی $\hat{x}$ نیروی وارد بر این سطح را بیابیم، باید مولفه‌ی $\hat{x}$ نیروی وارد بر هر سه مولفه‌ی سطح را بصورت زیر بدست آوریم:

$$df_x = \sigma_{xx}ds_x + \sigma_{xy}ds_y + \sigma_{xz}ds_z,$$

یا بصورت فشرده:

$$df_i = \sum_j \sigma_{ij}ds_j,$$

پس نیروی خالص وارد بر سطح بصورت زیر است:

$$\mathbf{f} = \oint \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{s}^T,$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}$ ، نمایش ماتریسی تانسور تنش و $d\mathbf{s}^T$ ، ترانهاده‌ی بردار سطح و یک بردار ستونی است. در اینجا از ضرب ماتریس‌ها نیز استفاده شده است.

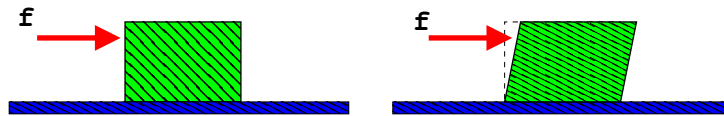
۴.۲. شاره

اعمال تنش خارجی (مماسی یا عمودی) به سطوح مواد، با تغییر شکل آنها همراه است. اگر تنش اعمالی کوچک باشد، تغییر شکل ایجاد شده نیز بسیار کوچک است. با خاموش کردن عامل تولید کننده‌ی تنش، آیا تغییر شکل ایجاد شده نیز از بین می‌رود؟ این سوال برای مواد مختلف، پاسخ‌های متفاوتی دارد. در بیشتر مواد جامد، با خاموش کردن تنش خارجی، شکل اولیه بازیابی می‌شود (شکل ۵.۲). این‌ها دسته‌ای از مواد را تشکیل می‌دهند که به آنها مواد کشسان می‌گوییم. یک خط‌کش فلزی مثالی از یک سامانه کشسان است. در مورد مواد مومسان، با قطع کردن تنش

خارجی، شکل اولیه بازیابی نمی‌شود. موم، مهم‌ترین نماینده‌ی این دسته از مواد بشمار می‌رود. دقت کنید که این نوع دسته‌بندی کردن مواد، کاملاً به شرایط اعمال تنش و اندازه‌ی تنش هم بستگی دارد. بسته به شرایط آزمایش، ممکن است یک ماده خاصیت کشسانی یا مومسانی داشته باشد.

علاوه بر رفتارهایی که در بالا اشاره شد، مورد مهم دیگری هم وجود دارد. برخی از مواد، در پاسخ به کوچکترین تنش مماسی خارجی، جاری می‌شوند. به این مواد شاره می‌گوییم. تمامی مایعات و گازها در این دسته قرار می‌گیرند. این مواد همواره شکل ظرفی را که در آن قرار دارند می‌گیرند. در واقع مایعات در پاسخ به نیروی وزن خودشان، همواره آنقدر جاری می‌شوند تا شکل ظرف را به خود بگیرند. در نهایت و زمانی که مایع به شکل ظرف درآمد، نیروی وزن با نیروهای عکس‌العمل سطح ظرف، به تعادل می‌رسند. گازها هم البته شکل ظرف را به خود می‌گیرند. این موضوع به سبب وجود افت‌وخیزهای گرمایی و غلبه‌ی آنها بر نیروی وزن است. این دسته بندی نیز، به شرایط آزمایش وابسته است. عسلی که تازه از یخچال خارج شده را در نظر بگیرید. با پشت یک قاشق کوچک، ضربه‌ای کوچک ولی سریع به سطح عسل وارد کنید. چه اتفاقی می‌افتد؟ درست است، در این آزمایش عسل ماده‌ای کشسان به نظر می‌رسد. اکنون آزمایش دیگری را انجام دهید. به آرامی ظرف حاوی عسل را اندکی کج کنید و چند ثانیه صبر کنید. در این شرایط شارش عسل را می‌بینید. در واقع پاسخ زمانی و سرعت انجام آزمایش، دو عامل اساسی در تعیین رفتار شاره گونه یا کشسان گونه برای مواد در هر آزمایش هستند.

خواص شارشی شاره‌های مختلف، با هم متفاوت است. چه خصوصیت فیزیکی این تمایز را می‌رساند؟ آب و عسل را با هم مقایسه کنید. همین طور می‌توانید نمونه‌هایی از عسل با دماهای متفاوت را در نظر بگیرید. در پاسخ به یک تنش خارجی ثابت، آب خیلی بیشتر از عسل جاری می‌شود. واضح است که علاوه بر چگالی، مشخصه‌ی دیگری نیز باید باشد تا تمایزی درست بین شاره‌ها را نشان دهد. برای اندازه‌گیری تمایز بین شاره‌ها، به طراحی مفهومی و عملی ابزارهای مرجعی نیاز داریم.



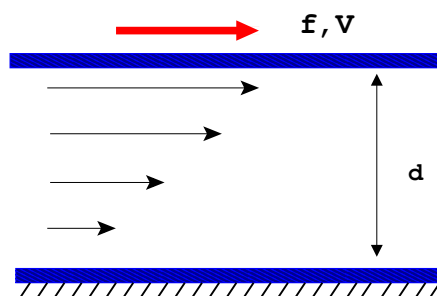
شکل ۵.۲ در این شکل پاسخ یک جسم مکعب شکل به نیروی خارجی اعمال شده نشان داده است.

آزمایش تنش برشی در شاره‌ها

آزمایش تنش برشی، یک روش مرجع برای اندازه‌گیری اندازه‌ی شارش و معرفی تمایز بین شاره‌های مختلف است. مطابق شکل ۶.۲، دو صفحه نامتناهی (ابعاد بسیار بزرگ) و موازی را در نظر بگیرید که بین آنها را با شاره‌ی مورد نظر پر کرده‌ایم. فاصله‌ی بین دو صفحه، در مقایسه با دیگر طول‌های مساله بسیار کوچک است. اعمال کوچکترین نیروی مماسی به صفحه بالایی، باعث حرکت آن می‌شود. صفحه‌ی پایینی را ثابت نگاه می‌داریم. در این صورت جریان شاره بین دو صفحه ایجاد می‌شود. به سبب وجود نیروهای بین مولکولی و چسبندگی مولکولها به یکدیگر و مولکولها به سطح، مولکولهای شاره که در همسایگی صفحه بالایی هستند با سرعتی برابر با سرعت آن صفحه شروع به حرکت می‌کنند. لایه‌های پایین‌تر شاره با سرعت‌های کمتری شروع به حرکت می‌کنند. با دور شدن از صفحه‌ی متحرک، سرعت لایه‌های شاره نیز کم می‌شود. برای به حرکت در آوردن صفحه بالایی، نیروی ثابت F را به آن اعمال می‌کنیم و صفحه با سرعت ثابت V ، حرکت خواهد کرد. ممکن است بصورت آزمایش‌گاهی و برای نیروهای بسیار کوچک، ارتباطی خطی بین سرعت و نیرو مشاهده شود. همچنین نیرو با اندازه سطح یعنی A متناسب و با فاصله‌ی دو صفحه یعنی d نسبت عکس دارد. در این صورت داریم:

$$F = \eta A \frac{V}{d}, \quad (۱۷.۲)$$

که در این رابطه، با وارد کردن η ، تناسب را به تساوی تبدیل کرده‌ایم. به η ، وشکسانی شاره گفته می‌شود و مقدار آن برای شاره‌های مختلف، متفاوت است. وشکسانی شاره، معیاری از مقدار اتلاف انرژی در آن شاره است. در واقع عامل خارجی‌ای که به صفحه‌ی بالایی نیرو وارد می‌کند، با صرف انرژی، سرعت صفحه را ثابت نگاه می‌دارد. نرخ انرژی مصرف شده در واحد زمان



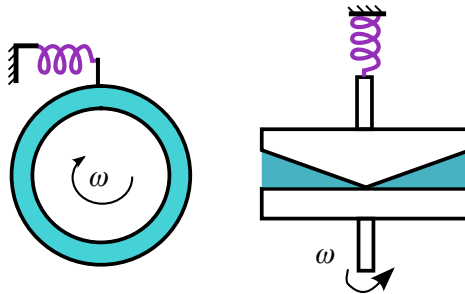
شکل ۴.۲ دو صفحه موازی و شاره‌ی بین آنها. صفحه‌ی پایینی ساکن و صفحه‌ی بالایی با سرعت ثابت کشیده می‌شود تا در شاره‌ی بین دو صفحه حرکت ایجاد می‌شود.

برابر است با:

$$P(t) = FV = \eta A \frac{V^2}{d}.$$

این انرژی به شاره منتقل می‌شود و با سازوکارهای ریزمقیاس درون شاره، به صورت گرما یا تابش تلف می‌شود. وشکسانی عسل از آب بیشتر و وشکسانی آب از هوا بیشتر است. شاره‌هایی با وشکسانی کمتر، اتلاف کمتری دارند و راحت‌تر (بیشتر) جاری می‌شوند.

روش مفهومی دو صفحه موازی که در اینجا معرفی شد، باید اندکی تغییر داده شود تا کارایی عملی پیدا کند. وشکسانی سنج دو استوانه‌ی هم‌محور و مخروط و صفحه، برخی از ابزارهای عملی برای اندازه‌گیری وشکسانی شاره‌ها هستند. در شکل ۷.۲، هندسه و اصول کار این ابزارها نشان داده شده است. در سامانه مخروط و صفحه، شاره بین یک صفحه و یک مخروط صلب ریخته می‌شود. محور مخروط عمود بر صفحه است. با چرخاندن صفحه، تنش برشی از طریق شاره به مخروط منتقل می‌شود. فنر پیچشی متصل به محور مخروط، اندازه‌ی گشتاور وارد بر آن را معین می‌کند. این گشتاور معیاری از وشکسانی سامانه است. با مدرج کردن این دستگاه، می‌توانیم رابطه‌ی یک‌به‌یک بین گشتاور و وشکسانی بدست آوریم. در سامانه دو استوانه‌ی هم‌محور، شاره در شکاف باریک بین دو استوانه ریخته می‌شود. چرخش استوانه‌ی درونی و اندازه‌گیری گشتاور وارد بر استوانه‌ی بیرونی، وشکسانی را تعیین می‌کند.



شکل ۷.۲ راست: طرحی ساده از وشکسانی سنج مخروط و صفحه نشان داده شده است. با چرخاندن صفحه‌ی پایینی، مقداری تنش برشی از طریق شاره، به مخروط بالایی انتقال می‌یابد. فنر چرخشی متصل به مخروط، اندازه‌ی گشتاور که متناسب با وشکسانی است را تعیین می‌کند. چپ: در سامانه دو استوانه‌ی هم محور، استوانه‌ی مرکزی می‌چرخد و فنر متصل به استوانه‌ی خارجی اندازه‌ی گشتاور را تعیین می‌کند.

مرتبه بزرگی وشکسانی

بعد یا دیمانسیون وشکسانی برابر است با کیلوگرم بر متر بر ثانیه. در نگاه ریز مقیاس برهمکنشهای بین مولکولی و سازوکارهای مبادله‌ی انرژی بین مولکولها باعث وشکسان شدن شاره‌ها می‌شوند. اگر تصویر ریزمقیاس درستی از پدیده داشته باشیم، می‌توانیم برآورد عددی مناسبی از مرتبه‌ی بزرگی کمیت مورد نظر به دست آوریم. برای برآورد وشکسانی قرار می‌دهیم $\eta \sim \frac{m}{lT}$ ، که در آن m ، l و T ، جرم، طول و زمان ریزمقیاس مربوط به پدیده‌ی وشکسان شدن هستند. برای برآورد عددی وشکسانی باید دقت کنیم که در مقیاسهای ریز، جرم مورد نظر جرم مولکولها است. طول دخیل در پدیده‌ی وشکسانی برای شاره‌ای مثل آب، فاصله متوسط بین مولکولها و در مورد هوا، پویش میانگین آزاد است. زمان مشخصه نیز به زمانهای مربوط به فرآیندهای مبادله‌ی انرژی بین مولکولها مربوط میشود.

بطور مشخص فاصله متوسط بین مولکولهای آب از مرتبه ابعاد خود مولکولها یعنی $10^{-9}m$ است. برای به دست آوردن جرم مولکولهای آب، از این واقعیت که هر مولکول آب از ۱۸ پروتون و ۱۸ نوترون تشکیل شده است، استفاده می‌کنیم. سهم الکترونها در جرم کل بسیار ناچیز است. با توجه به اینکه جرم پروتونها و نوترونها هم تقریباً برابر و از مرتبه‌ی $10^{-27}kg$ است، مرتبه‌ی بزرگی جرم مولکولهای آب برابر با $10^{-26}kg$ می‌شود. اکنون باید برآوردی از

زمان مشخصه‌ی مسأله داشته باشیم. برای این منظور اجازه دهید پرسیم که: سازوکار انتقال انرژی بین مولکول‌های مجاور چگونه است؟ در برهمکنش بین مولکول‌های مجاور، انرژی با تحریک مدهای ارتعاشی یا چرخشی مولکولهای آب منتقل می‌شود. این همان عملی است که در اجاق‌های ریزموج (میکروویو) هم صورت می‌گیرد. انرژی موج الکترومغناطیسی ریزموج با تحریک مدهای نوسانی یا ارتعاشی مولکول‌های آب، بصورت گرما جذب سامانه می‌شود. نقطه‌ی شروع خوبی است. انرژی مشخصه‌ی ارتعاش‌های مولکول‌های آب از مرتبه‌ی انرژی ریزموج است. با توجه به اینکه طول موج ریزموج از مرتبه‌ی $\lambda \approx 1\mu m$ است، پس می‌توانیم بسامد آنرا به دست آوریم. داریم: $\omega = c/\lambda \approx 10^8/10^{-6} = 10^{14}$ و از آنجا زمان مشخصه برابر می‌شود با: $T \approx 1/\omega = 10^{-14}s$. اکنون با جایگزینی مقادیر عددی برای کمیات مشخصه، مرتبه‌ی بزرگی وشکسانی آب به صورت زیر می‌شود:

$$\eta \approx \frac{m}{lT} \approx 10^{-3} Pa.s,$$

این عدد به مقدار واقعی وشکسانی آب بسیار نزدیک است.

از رابطه‌ی ساده‌ی بالا که بر اساس تحلیل ابعادی بدست آمد می‌توان به سهولت در مورد وابستگی دمایی وشکسانی در شارهای مختلف پیش‌گویی کرد. در مورد شارهای مثل آب سازوکار انتقال انرژی برهمکنش مستقیم بین مولکولهاست. این برهمکنش بسیار به فاصله‌ی بین مولکولها وابسته است. با افزایش دما فاصله متوسط مولکولها زیاد شده و در نتیجه برهمکنش‌ها کم‌شده و وشکسانی هم کم می‌شود. در مورد گازها سازوکار مبادله‌ی انرژی برخورد مولکولها است. با افزایش دما حرکت‌های تصادفی بیشتر شده و فاصله متوسط بین برخوردها کم می‌شود. بنابراین با افزایش دما وشکسانی گازها افزایش می‌یابد.

در جدول زیر مقادیر آزمایشگاهی برخی از شارها گزارش شده است:

$$\eta_{\text{آب}}(T = 300K) = 0.798 mPa.s,$$

$$\eta_{\text{آب}}(T = 370K) = 0.282 mPa.s,$$

$$\eta_{\text{روغن زیتون}}(T = 290K) = 40 mPa.s,$$

$$\eta_{\text{عسل}}(T = 290K) = 8000 \text{ mPa.s},$$

$$\eta_{\text{هوا}}(T = 290K) = 0.018 \text{ mPa.s}.$$

به η ، و شکسانی دینامیکی نیز گفته می‌شود. معمولاً نسبت و شکسانی به چگالی شاره در معادلات حرکت ظاهر می‌شود که به آن و شکسانی سینماتیکی گفته می‌شود و با نماد $\nu = \eta/\rho$ نشان داده می‌شود. واحد سنجش و شکسانی سینماتیکی در دستگاه CGS به نام استوکس است و با نماد St نشان داده می‌شود. یک استوکس برابر با $1 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ است. و شکسانی سینماتیکی آب حدوداً برابر با یک سانتی استوکس (1 cSt) است. آیا می‌توانید توضیح دهید از نظر ریز مقیاس چه تفاوتی بین و شکسانی‌های دینامیکی و سینماتیکی وجود دارد؟ از بحث بالا که با آن مرتبه‌ی بزرگی و شکسانی برآورد شد کمک بگیرید.

شاره‌های نیوتنی

رابطه ۱۷.۲ یک رابطه‌ی پدیده شناختی است که در واقع ضریب و شکسانی η را تعریف می‌کند. با انجام آزمایشهای تجربی می‌توانیم وابستگی تنش برشی یعنی $\frac{F}{A}$ به $\frac{V}{d}$ را بررسی کنیم. در صورتی که منحنی تنش برشی بر حسب سرعت، خطی باشد به شاره‌ی مورد نظر شاره نیوتنی گفته می‌شود. برای برخی از شاره‌ها با تقریب خوبی منحنی مذکور خطی است و می‌توان آنها را شاره‌های نیوتنی در نظر گرفت. برای پاره‌ای از مواد مثل سفیده‌ی تخم مرغ، محلولهای پلیمری، خون و محلول آب و نشاسته رفتار تنش برشی بر حسب سرعت، غیر خطی است. به این مواد شاره‌های غیر نیوتنی گفته می‌شود. برای شاره‌های غیر نیوتنی و شکسانی تابعی از مقدار تنش برشی اعمال شده است.

بیشتر بحث ما در این کتاب، در مورد شاره‌های نیوتنی است. مبانی نظریه‌ی شاره‌ها را برای شاره‌های نیوتنی به تفصیل بحث می‌کنیم. خواص اصلی شاره‌های نیوتنی نیز در فصل آخر کتاب بررسی می‌شود.

۵.۲ تنش: دیدگاه ریزمقیاس

محیط پیوسته از دیدگاه ریزمقیاس، از اتم‌ها و مولکول‌ها تشکیل شده است. با توجه به اینکه تعداد اتم‌ها و مولکول‌ها بسیار زیاد است، ناگزیریم تا برای توصیف ریزمقیاس از نظریه مکانیک آماری استفاده کنیم. نظریه مکانیک آماری و نظریه جنبشی ابزارهای پیشرفته‌ای برای مطالعه ریزمقیاس سامانه‌های فیزیکی فراهم آورده‌اند. اینجا هدفمان توسعه و ارایه جزئیاتی از این نظریه‌ها نیست تنها می‌خواهیم به صورت خیلی فشرده نشان دهیم، تانسور تنش در سامانه‌های فیزیک چگونه به جزییات برهمکنشی ذرات بستگی دارد. خواندن این قسمت برای فهم ادامه‌ی مطالب این کتاب ضروری نیست و خواننده می‌تواند در دید اول از آن صرف‌نظر کند. به صورت خیلی فشرده، معادلات هامیلتون، تحول ذرات در فضای فاز را به دست می‌دهند. با شروع از این معادلات و تعریف چگالی احتمال در فضای فاز توجه می‌کنیم که این چگالی در معادله تحول لیوویل صدق می‌کند. با شروع از تابع توزیع، می‌توانیم تصویر دانه درشت شده‌ی پیوستاری از سامانه‌ی گسسته بسازیم. در این تصویر پیوستار مفهوم توزیع نیرو درون سامانه با تانسور تنش جایگزین می‌شود. از نظر آماری همه‌ی اطلاعات دینامیکی یک سیستم N ذره‌ای در تابع توزیع $f_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ نهفته است. این تابع توزیع احتمال این را می‌دهد که ذره‌ی i ام ($i=1 \dots N$)، در زمان t در مکان $\mathbf{r}_i$ و دارای تکانه‌ی $\mathbf{p}_i$ باشد. تابع توزیع به صورت $\int d\Gamma f_N = 1$ نرمالیزه است که در آن: $d\Gamma = d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{p}_N$. با در دست داشتن تابع توزیع می‌توانیم کمیات و میدان‌های بزرگ مقیاسی مثل چگالی و سرعت را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m \sum_{i=1}^N \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle, \quad (18.2)$$

که در آن متوسط گیری‌های آماری به صورت زیر $\int d\Gamma A f_N = \langle A \rangle$ به دست می‌آیند، جرم همه‌ی ذرات برابر فرض شده است. تابع توزیع در معادله دینامیکی لیوویل به صورت زیر صدق

می‌کند:

$$\frac{d}{dt}f_N = \frac{\partial}{\partial t}f_N + \sum_{i=1}^N [\dot{\mathbf{r}}_i \partial_i f_N + \dot{\mathbf{p}}_i \partial_{\mathbf{p}_i} f_N] = 0; \quad (19.2)$$

که در آن برای سهولت از نمادهای $\partial_i = \partial/\partial \mathbf{r}_i$ و $\partial_{\mathbf{p}_i} = \partial/\partial \mathbf{p}_i$ استفاده شده است. معادله‌ی لیوویل چیزی جز معادله‌ی پیوستگی در فضای فاز برای تابع احتمال نیست. شارش چگالی در فضای فاز، مانند یک شارش تراکم ناپذیر رفتار می‌کند. با استفاده از معادله‌ی تحولی لیوویل، تغییرات زمانی متوسط هر کمیت دلخواه به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle A_\alpha \rangle = \int d\Gamma A_\alpha \partial_t f_N = \sum_{i=1}^N \langle \frac{1}{m} \mathbf{p}_i \cdot \partial_i A_\alpha - \partial_i U \cdot \partial_{\mathbf{p}_i} A_\alpha \rangle. \quad (20.2)$$

دقت کنید که در اینجا $A_\alpha(\{\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i\})$ تابعی از مختصات فضای فاز سامانه‌ی N ذره‌ای است و متوسطش تنها به زمان می‌تواند بستگی داشته باشد. در این مورد تفاوتی بین ∂_t و d/dt نیست. برای اولین مثال تغییرات زمانی چگالی ذرات را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = m \partial_t \langle \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle = \sum_i \langle \mathbf{p}_i \partial_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\rho \mathbf{u}), \quad (21.2)$$

رابطه‌ی بدست آمده، یک معادله‌ی پیوستگی برای جرم است. در این محاسبه $A_\alpha = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ یک اسکالر است. به عنوان مثالی دیگر، تغییرات زمانی چگالی تکانه را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) &= \sum_{\alpha=1}^3 \hat{e}_\alpha \partial_t \langle \sum_i p_{i,\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle \\ &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \sum_i \langle \frac{1}{m} \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle - \sum_i \langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle \end{aligned} \quad (22.2)$$

که در آن فرض کرده‌ایم، هر ذره تحت اثر پتانسیل U قرار دارد. در محاسبه‌ی بالا قرار داده‌ایم: $A_\alpha = \sum_i p_{i,\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ که در آن $p_{i,\alpha}$ مولفه‌ی α ام تکانه‌ی ذره‌ی i ام است. در نتیجه‌ی به دست آمده و در اولین جمله‌ی سمت راست تساوی دیورژانس تانسور مرتبه‌ی دوم به گونه‌ای محاسبه می‌شود که یک بردار تولید شود. سهم نیروهای خارجی و نیروهای بین ذره‌ای را می‌توانیم

به صورت زیر در تابع پتانسیل جدا کنیم:

$$U(\mathbf{r}_i) = U^e(\mathbf{r}_i) + \sum_{j \neq i} U_{ij},$$

که در آن فرض شده است که پتانسیل بین ذره‌ای ناشی از برهمکنش‌های دو ذره‌ای است. در بیشتر موارد پتانسیل بین ذره‌ای را می‌توان به صورت $U_{ij} = U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ در نظر گرفت. بازگردیم به معادله‌ی تغییرات چگالی تکانه، معادله‌ی ۲۲.۲. جمله‌ی اول سمت راست را ببینید. با اندکی محاسبه می‌بینیم:

$$\sum_i \langle \frac{1}{m} \mathbf{p}_i \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle = \sum_i \langle m (\frac{1}{m} \mathbf{p}_i - \mathbf{u}) (\frac{1}{m} \mathbf{p}_i - \mathbf{u}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle + \rho \mathbf{u} \mathbf{u}.$$

اکنون جمله‌ی دوم همان رابطه را ببینید:

$$- \sum_i \langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} (U^e + \sum_j U_{ij}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle,$$

سهم برهمکنش بین ذره‌ای را در این عبارت در نظر بگیرید:

$$- \sum_{i \neq j} \langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle = - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U_{ij} (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)) \rangle$$

با تعریف $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ ، می‌توانیم از بسط تیلور استفاده کنیم تا به دست آید:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = -\mathbf{r}_{ij} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) + \dots,$$

با قرار دادن این بسط در رابطه‌ی قبلی به دست می‌آید:

$$- \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U_{ij} (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \langle \sum_{i \neq j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U_{ij} \mathbf{r}_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \rangle + \dots.$$

اکنون عبارات بالا را در معادله‌ی تحول چگالی تکانه قرا می‌دهیم. بعد از ساده‌سازی روابط می‌بینیم که:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \mathbf{f}^e + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \sigma; \quad (23.2)$$

که در آن چگالی نیروی خارجی به صورت $\mathbf{f}^e = - \sum_i \langle \partial_i U^e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle$ تعریف شده است. با توجه به معادله‌ی پوستگی برای چگالی، سمت چپ رابطه‌ی بالا برابر است با: $\rho(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$. تانسور تنش دارای دو قسمت جنبشی و برهمکنشی به صورت $\sigma = \sigma_K + \sigma_U$ است. برای قسمت جنبشی تانسور تنش داریم:

$$\sigma_K = - \sum_i \langle m \left(\frac{1}{m} \mathbf{p}_i - \mathbf{u} \right) \left(\frac{1}{m} \mathbf{p}_i - \mathbf{u} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle \quad (24.2)$$

قسمت برهمکنشی تانسور تنش برابر است با:

$$\sigma_U = \frac{1}{V} \sum_{i \neq j} \langle \mathbf{r}_{ij} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} U_{ij} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \rangle + \dots \quad (25.2)$$

روابط به دست آمده، تانسور تنش را بر حسب برهمکنش‌ها و جزییات ریزمقیاس سامانه به دست می‌دهند. قسمتی جنبشی تانسور تنش، سهم انرژی جنبش در تانسور تنش است. از دید ناظری که بصورت موضعی همراه شار حرکت می‌کند $\sigma_k \cdot d\mathbf{s}$ ، تکانه‌ای است که به سبب حرکت‌های مولکولی در واحد زمان از سطح منتقل می‌شود. در مورد گاز ایده‌آل که برهمکنشی بین ذرات نیست، قسمت جنبشی تنها اثری است که تانسور تنش را می‌سازد. قسمت برهمکنشی تانسور تنش را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم. توجه کنید که: $\partial_i U_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} U'$ پس:

$$\begin{aligned} \sigma_U &= \frac{1}{V} \sum_{i \neq j} \langle \mathbf{r}_{ij} \mathbf{r}_{ij} \frac{U'}{r_{ij}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \rangle + \dots, \\ &= \frac{1}{V} \int d\mathbf{R} \frac{U'}{R} \mathbf{R} \mathbf{R} \sum_{i \neq j} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}_{ij}) \rangle + \dots, \\ &= \frac{1}{V} \int d\mathbf{R} \frac{U'}{R} \mathbf{R} \mathbf{R} \rho^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{R}) + \dots, \end{aligned} \quad (26.2)$$

که در آن چگالی دو ذره‌ای، احتمال اینکه بصورت همزمان یک ذره در مکان $\mathbf{r}$ و دیگری در مکان $\mathbf{r} + \mathbf{R}$ باشد به صورت زیر تعریف شده است:

$$\rho^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{R}) = \sum_{i \neq j} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{R} - \mathbf{r}_{ij}) \rangle = \sum_{i \neq j} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r} + \mathbf{R} - \mathbf{r}_i) \rangle,$$

این تابع بر حسب $\mathbf{r}$ کند تغییر و به مختصه $\mathbf{R}$ بسیار حساس است. بهتر است از تابع همبستگی دو ذره‌ای به صورت زیر استفاده کنیم:

$$\rho^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{R}) = \frac{1}{m^2} \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r} + \mathbf{R}) g^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{R}).$$

آن چیزی که از بحث بالا روشن می‌شود این است که تحول تابع چگالی تک‌ذره‌ای به تابع چگالی دو ذره‌ای مربوط شده است. می‌توان نشان داد که معادلاتی وجود دارند که به صورت سلسله مراتبی توابع چگالی n ذره‌ای را به توابع چگالی $n - 1$ ذره‌ای مربوط می‌کنند. در نتیجه حل کامل سیستم مستلزم حل همزمان این معادلات جفت شده است. برای کارا کردن این رهیافت لازم است که از تقریب‌هایی استفاده کرد. این گونه تقریب‌ها اساس نظریه‌ی جنبشی را تشکیل می‌دهند که جزییات آن از هدف کنونی ما دور است. در نظریه‌ی جنبشی می‌توان روابطی بدست آورد که کمیات ماکروسکوپیکی مثل ویسکوزیته را بر حسب جزییات ریزمقیاس معین خواهند کرد. در ادامه‌ی بحث، تنها نشان می‌دهیم که چگونه از این روش میکروسکوپی می‌توان معادله‌ی حالت را بدست آورد.

فشار هیدروستاتیک، کمیت اسکالری است که از تانسو تنش به صورت $P = -\frac{1}{3} \text{Tr} \sigma$ بدست می‌آید. داریم:

$$-\frac{1}{3} \text{Tr} \sigma_K = \frac{2}{3} \sum_i \langle \frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{u})^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle = \frac{2}{3} \sum_i \langle K_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \rangle,$$

که در آن و در حالت تعادل گرمایی انرژی جنبشی متوسط هر ذره برابر است با: $\langle K_i \rangle = \frac{3}{2} k_B T$. در نتیجه به دست می‌آید:

$$-\frac{1}{3} \text{Tr} \sigma_K = k_B T \frac{\rho}{m}.$$

برای محاسبه‌ی سهم ناشی از انرژی برهمکنشی داریم:

$$-\frac{1}{3} \text{Tr} \sigma_U = -\frac{2\pi}{3} \left(\frac{\rho}{m} \right)^2 \int_0^\infty dR U' g^{(2)}(R) R^2.$$

$$P_{eq} = \frac{N}{V} k_B T - \frac{2\pi}{3} \left(\frac{N}{V} \right)^2 \int_0^\infty dR U' g^{(2)}(R) R^2. \quad (27.2)$$

که در آن V حجم سامانه و رابطه‌ی به دست آمده معادله‌ی حالت ترمودینامیکی سامانه‌ی تعادلی است.

پرسش‌ها

۱.۲ نشان دهید که دو روش اویلر و لاگرانژ با هم معادلند و هر دو روش بصورت یکتا و تمامی اطلاعات سینماتیکی حرکت شاره را دارند. برای این منظور بررسی کنید که چگونه با در دست داشتن میدان اویلری سرعت می‌توانیم اطلاعات مسیر حرکت ذرات را بدست آوریم و بالعکس.

۲.۲ فرض کنید یک میدان شارشی شبیه میدان برداری الکتریکی برای یک دوقطبی الکتریکی داریم. معادله‌ی توصیف کننده‌ی خطوط جریان را بدست آورده و سعی کنید آنها را حل کنید. برای محاسبه‌ی میدان الکتریکی دوقطبی اندازه‌ی بارهای الکتریکی را واحد فرض کنید و آنها را در نقاطی با مختصات $(\pm 1, 0, 0)$ قرار دهید. همچنین برای سهولت $4\pi\epsilon_0$ را هم برابر با واحد فرض کنید.

۳.۲ بصورت کیفی در مورد ارتباط ناپایا یا غیر یکنواخت بودن جریان با عدم تطابق انواع خطوط معرفی شده در متن این فصل بحث کنید.

۴.۲ میدان سرعت غیر پایای زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{u} = (az, (x - bt), cx),$$

که در آن a ، b و c ثابت هستند. بردار چرخش $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ را محاسبه کنید. با در نظر گرفتن شرایط اولیه زیر:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0.$$

شکل خطوط جریان، رنگ و مسیر را بدست آورید.

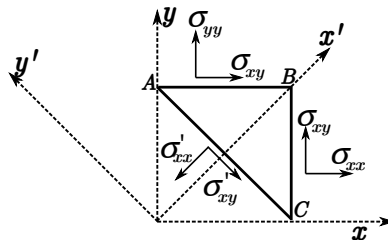
۵.۲ میدان سرعت برشی یکی از مهم‌ترین مثالهای شارشی است. در میدان برشی، مولفه‌های مختلف سرعت بصورت خطی با فاصله از مرکز تغییر می‌کنند. کلی‌ترین شکل یک میدان برشی در فضای دو بعدی $(x - y)$ برحسب دو ثابت γ و α بصورت $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \Gamma \cdot \mathbf{x}$

داده می‌شود. در اینجا ماتریس Γ بصورت زیر است:

$$\Gamma = \frac{1}{4}\gamma \begin{pmatrix} 1+\alpha & 1-\alpha & 0 \\ -1+\alpha & -(1+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

شکل خطوط میدان را برای $\alpha = 0, 0/4, 0/8, 1$ بدست آورید.

۶.۲ می‌خواهیم شکل تانسور تنش در دستگاهی که به اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ حول محور $\hat{x}_3$ چرخیده است را بدست آوریم. مولفه‌های تنش را در دستگاه اصلی با σ_{ij} و در دستگاه چرخیده را با σ'_{ij} نشان دهید. مطابق شکل ۸.۲، یک مکعب از شاره را در نظر بگیرید. مقطع این مکعب بصورت یک مربع در صفحه‌ی دوبعدی دیده می‌شود. حال منشوری که از نصف این مکعب ساخته شده را تصور کنید. مقطع این منشور مثلث ABC است. نیروهای وارد بر وجوه این منشور را برحسب عناصر تانسور تنش بیان کنید. دقت کنید که نیروی وارد بر وجوه AB و BC را در دستگاه اولیه می‌نویسیم و نیروی وارد بر وجه سوم را در دستگاه چرخیده می‌نویسیم. حال با بررسی تعادل نیروها و گشتاورها برای این منشور، رابطه‌ی بین عناصر تانسور تنش در دو دستگاه بدست آورید. آیا روابط بدست آمده با قانون تبدیل ۱۶.۲ سازگارند؟



شکل ۸.۲ دستگاه مختصات (x', y') نسبت به دستگاه اولیه به اندازه‌ی $\frac{\pi}{4}$ چرخیده است.

۷.۲ در فصل قبل و مطابق شکل ۱.۱، دستگاه مختصات قطبی کروی را بصورت یک دستگاه متعامد موضعی در نظر گرفتیم که نسبت به دستگاه دکارتی چرخیده است. عناصر تانسور تنش در دستگاه قطبی-کروی را با $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{r\phi}, \sigma_{\theta r}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta\phi}, \sigma_{\phi r}, \sigma_{\phi\theta}$ نشان دهید. با استفاده از ماتریس دورانی که دستگاه قطبی را به دستگاه دکارتی تبدیل می‌کند، ارتباط بین عناصر تانسور تنش در دو دستگاه را بدست آورید.

۳

شارش پایستار

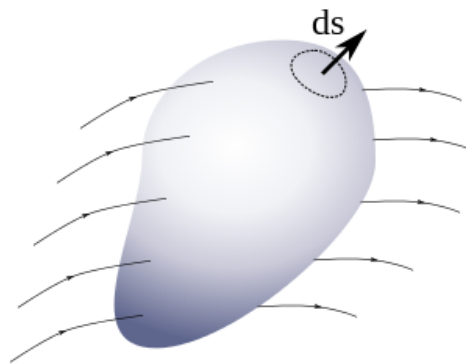
به جز ابرشاره‌ها که شماره‌هایی کوانتومی هستند و مورد نظر ما در این کتاب نیستند، سازوکارهای اتلافی همواره در حرکت شاره‌ها نقش دارند. اتلاف، انرژی حرکتی شاره را به گرما تبدیل می‌کند. البته زیادی یا کمی اتلاف در سامانه‌های شارشی به عوامل مختلفی بستگی دارد. خصوصیات ذاتی شاره، شکل هندسی مسأله، سرعت‌های مشخصه و زمانهای مشخصه‌ای که در آن پدیده‌ی مورد نظر مطالعه می‌شود، برخی از این عوامل هستند. در برخی شرایط، ممکن است از قبل بدانیم که اثرهای اتلافی در یک مسأله نقش مهمی ندارند^۱. در این صورت شارشی داریم که انرژی در آن پایسته (تقریباً پایسته) است. در این فصل می‌خواهیم شارشی را بررسی کنیم که در آن اتلاف دقیقاً صفر است. ممکن است در نگاه اول تصور شود که این مسأله تنها ارزش ریاضی دارد ولی این درست نیست. در واقع در پدیده‌هایی که اتلاف خیلی کم است، انتظار داریم رهیافت‌های این فصل نتایج تقریبی مناسبی به دست دهند. دو موضوع «شاره‌های اوپلری» و «شاره‌های پتانسیلی»، ابزارهای ریاضی مناسبی برای مطالعه‌ی شارش‌های پایستارند. در ادامه، ابتدا معادله‌ی پیوستگی را بدست می‌آوریم، این معادله برای هر گونه شارشی قابل استفاده است.

^۱ در فصل‌های بعدی با معرفی عدد بدون بعد رینولدز، یک معیار عددی دقیق را برای اندازه‌گیری درجه‌ی اهمیت اثرهای اتلافی در هر مسأله ارائه می‌کنیم.

سپس قانون حرکت نیوتن را برای یک عنصر کوچک از شارش پایستار می‌نویسیم و از آنجا معادله‌ی دیفرانسیل حرکت شارش پایستار را به دست می‌آوریم. در ادامه با کمک چند مثال، برخی از خصوصیات این معادلات را بیشتر مطالعه می‌کنیم.

۱.۳ قانون پایستگی جرم

برای مطالعه‌ی دینامیک شاره‌ها، معادلات حرکت را از اصول اولیه‌ی فیزیک به دست می‌آوریم. اولین معادله‌ی حرکت از قانون پایستگی جرم به دست می‌آید. در سامانه‌های شارشی بسته که در آن‌ها فرآیندهای شیمیایی یا هسته‌ای انجام نمی‌گیرند، جرم پایسته است. شارشی را در نظر بگیرید که حرکت آن با میدان سرعت $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ داده شده است. مطابق شکل ۱.۳، یک سطح بسته‌ی فرضی S را در نظر بگیرید. از هر عنصر بی‌نهایت کوچک این سطح، (ds) ، در واحد زمان جرم dm عبور می‌کند. جهت بردار ds عمود بر سطح و به سمت خارج سطح است. این جرم بی‌نهایت کوچک با رابطه‌ی زیر از میدان سرعت قابل محاسبه است:



شکل ۱.۳ یک سطح بسته‌ی دلخواه درون شاره به همراه خطوط جریان. جرم رد شده در واحد زمان از این عنصر بی‌نهایت کوچک سطح برابر است با: $\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s}$.

$$\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s}, \quad (۱.۳)$$

که در آن $\rho(\mathbf{x}, t)$ ، چگالی شاره است. دقت کنید که علامت این کمیت به میدان سرعت و

جهت‌گیری آن نسبت به سطح بستگی دارد. اگر این جرم از سطح بسته‌ی S خارج شود $dm > 0$ و اگر این جرم وارد سطح شود $dm < 0$. جرم خالصی که از این سطح خارج می‌شود بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\oint \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}.$$

اگر جرم درون این سطح بسته در زمان t را با $M(t)$ نشان دهیم، آهنگ تغییرات آن بصورت زیر است:

$$\frac{d}{dt}M(t) = - \oint \rho \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s},$$

که در آن فرض کرده‌ایم هیچ چشمه یا چاهکی درون حجم S نداریم. تنها عامل تغییرات جرم شارهای درون این سطح بسته، ورود یا خروج شار از طریق سطح آن است. اکنون توجه کنید که جرم کل شارهای درون سطح مورد نظر بصورت $M(t) = \int d^3x \rho$ ، از تابع چگالی بدست می‌آید. با استفاده از این موضوع و با کمک قضیه‌ی دیورژانس به رابطه‌ی دیفرانسیلی زیر می‌رسیم:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0. \quad (2.3)$$

رابطه‌ی بالا صورت دیفرانسیلی قانون پایستگی جرم و به رابطه‌ی پیوستگی مشهور است. معادله‌ی پیوستگی را می‌توان برای هر نوع شارشی، پایستار یا غیر پایستار، به کار برد. معادله‌ی پیوستگی را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{d}{dt} \rho = 0, \quad (3.3)$$

که در آن مشتق کامل تابع چگالی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\frac{d}{dt} \rho = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \rho.$$

یادآوری می‌کنیم که تغییرات زمانی از دید ناظر واقع بر دستگاه همراه شار به گونه اندازه گیری می‌شود: مطابق بحث ارایه شده در فصل قبل، مشتق کامل چگالی، تغییرات زمانی چگالی است که از دید ناظر همراه شار اندازه گیری می‌شود.

شارش تراکم‌ناپذیر و تابع جریان

چه شارشی تراکم‌پذیر و چه شارشی تراکم‌ناپذیر است؟ تغییرات زمانی یا مکانی چگالی، کدام‌یک تعبیر مناسب‌تری برای مفهوم تراکم‌ناپذیری ارائه می‌کنند؟ ممکن است در لحظه‌ی آغازین، با سامانه‌ای روبرو باشیم که چگالی در نقاط مختلف فضا متفاوت باشد. اگر شارشی در این سامانه برقرار شود، چگالی در نقاط مختلف فضا در لحظات بعدی مدام با زمان تغییر خواهد کرد. این شارش در صورتی تراکم‌ناپذیر است که فاصله‌ی متوسط بین ذرات مجاور ثابت بماند. چون شاره حرکت می‌کند، برای بررسی این موضوع، لازم است تا چگالی را در دستگاه همراه شاره مدام اندازه‌گیری کنیم. اگر از دید ناظر واقع بر دستگاه همراه شاره، چگالی ثابت بماند، آن شارش تراکم‌ناپذیر است. به بیان دیگر، برای شارش تراکم‌ناپذیر داریم:

$$\frac{d}{dt}\rho = 0.$$

اکنون با ترکیب رابطه‌ی بالا با معادله‌ی پیوستگی، به رابطه‌ی ریاضی ساده‌تر زیر برای شرط تراکم‌ناپذیری می‌رسیم:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.3)$$

شارش آب که درون لوله‌ها صورت می‌گیرد، مثال خوبی برای شارش تقریباً تراکم‌ناپذیر است. از طرف دیگر، انتشار امواج صوتی در آب، شارشی تولید می‌کند که تراکم‌پذیر است. انتشار صوت با انتشار تراکم‌ها و انقباض‌های موضعی سامانه همراه است. ممکن است یک شاره در شرایط یک آزمایش تراکم‌ناپذیر ولی در آزمایشی دیگر، رفتار تراکم‌پذیری داشته باشد. نمی‌توان یک شاره‌ی را تراکم‌پذیر یا تراکم‌ناپذیر نامید، شرایط شارشی هر مسأله تعیین‌کننده است. در فصل‌های بعدی، از عدد بدون بُعد ماخ، به عنوان یک معیار کمی برای تشخیص تراکم‌پذیری یا تراکم‌ناپذیری شارش استفاده می‌کنیم.

مطالعه‌ی شارش‌های تراکم‌ناپذیر، اندکی از بررسی شارش‌های تراکم‌پذیر ساده‌تر است. خطوط جریان در مورد شارش‌های تراکم‌ناپذیر را در نظر بگیرید. مفهوم تابع جریان کمک می‌کند تا شارش‌های تراکم‌ناپذیر در سامانه‌های دوبعدی را آسان‌تر مطالعه کرد. میدان سرعت مربوط به یک شارش دوبعدی تراکم‌ناپذیر را بصورت $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ در نظر بگیرید. با توجه

به شرط تراکم ناپذیری داریم:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (5.3)$$

پس: $\partial_x u = -\partial_y v$. بنابراین $udy - vdx$ یک دیفرانسیل کامل است. این دیفرانسیل کامل را بصورت دیفرانسیل یک تابع اسکالر Ψ ، و به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$d\Psi = udy - vdx, \quad (6.3)$$

با مقایسه‌ی این رابطه با معادله‌ی مربوط به خطوط جریان در شارش دو بعدی، در می‌یابیم که خطوط $\Psi = c$ با c های ثابت، خطوط جریان را مشخص می‌کنند. برای یافتن تابع جریان باید معادلات زیر حل شوند:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u. \quad (7.3)$$

به عنوان اولین مثال، تابع جریان برای شارش یکنواخت $(u_0, 0, 0)$ را به دست می‌آوریم:

$$d\Psi = u_0 dy, \rightarrow \Psi = c + u_0 y, \quad (8.3)$$

که در آن c ثابت است. همان‌طور که انتظار داریم، خطوط جریان در این مورد، خطوطی موازی با محور x هستند.

برای مثال دوم، اجازه دهید یک جریان خطی دوبعدی را بررسی کنیم. جریان معرفی شده در مسأله‌ی شماره‌ی ۵ فصل قبل را در نظر بگیرید. مؤلفه‌های میدان سرعت بصورت زیرند:

$$u = \frac{\gamma}{4} ((1 + \alpha)x + (1 - \alpha)y), \quad v = \frac{\gamma}{4} ((-1 + \alpha)x - (1 + \alpha)y), \quad (9.3)$$

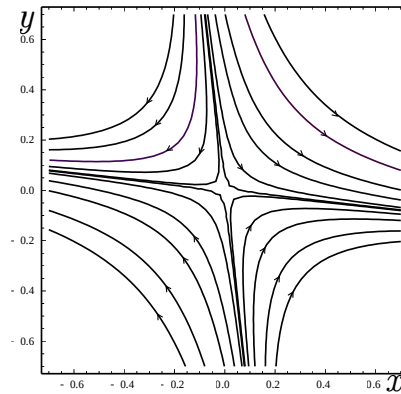
در این مورد:

$$d\Psi = \frac{\gamma}{4} ((1 + \alpha)(xdy + ydx) + (1 - \alpha)d(x^2 + y^2)/2),$$

با انتگرال‌گیری، مقدار تابع جریان به صورت زیر می‌شود:

$$\Psi = \frac{\gamma}{4} ((1 + \alpha)xy + (1 - \alpha)(x^2 + y^2)/2) + \Psi_0.$$

خطوط جریان در شکل ۲.۳ و برای $\alpha = 0.8$ رسم شده‌اند.



شکل ۲.۳ خطوط میدان برای یک جریان دوبعدی خطی و برای $\alpha = 0.8$.

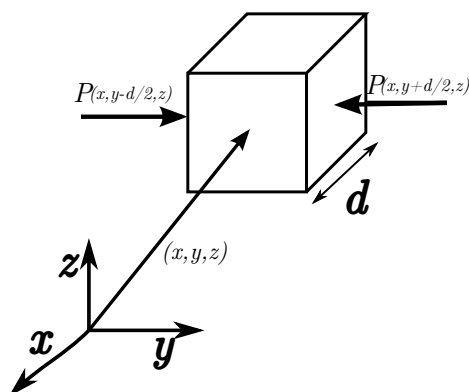
۲.۳ معادله‌ی اوایلر

پس از مطالعه‌ی قانون پایستگی جرم، اکنون می‌خواهیم قانون پایستگیِ تکانه را در شارها بررسی کنیم. می‌خواهیم معادله‌ی حرکت نیوتن را برای هر عنصر شار بکار برده تا به یک معادله‌ی دیفرانسیل که حرکت شار را توصیف می‌کند برسیم. برای این منظور، در این فصل تنها شارش‌های پایستار را در نظر خواهیم گرفت. در بحث مقدماتی فصل گذشته که در مورد وشکسانی و اتلاف در شارها ارائه شد، دیدیم که چسبندگی و لغزش لایه‌های مجاور شار، ارتباط مستقیمی با اتلاف دارند. وجود نیروهای برشی (مؤلفه‌های مماسی تانسور تنش) در یک شارش، نتیجه‌ی اصلی وشکسانی است. اگر از وشکسانی و اثرهای اتلاfi صرف‌نظر کنیم، در واقع نیروهای برشی را نادیده گرفته‌ایم. پس در شارش‌های پایستار، تنها مؤلفه‌های عمودی تانسور تنش در نیروهای داخلی سهم دارند. مؤلفه‌های عمودی تانسور تنش، مشخص‌کننده‌ی فشار درون شار هستند. برای شارهای همسانگرد، تمام راستاها هم‌ارزند، بنابراین برای مشخص کردن نیروهای درونی در این شارها، کافی است فشار که کمیتی اسکالر است را در نظر بگیریم. فشار بصورت زیر به عناصر قطری تانسور تنش بستگی دارد:

$$P = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}).$$

اکنون یک شارش کلی و بدون اتلاف را در نظر بگیرید که با میدان سرعت $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ و میدان

فشار $P(x, t)$ مشخص شده است. مطابق شکل ۳.۳، یک قطعه مکعب بسیار کوچک از شار به ابعاد d را در نظر بگیرید. مرکز این مکعب در نقطه‌ای از فضا با مختصات (x, y, z) قرار دارد. در شکل، تنها نیروهای فشاری که در راستای $\hat{y}$ به مکعب وارد می‌شوند را نشان داده‌ایم. نیروهای وارد بر وجوه دیگر که در شکل نشان داده نشده است، در راستاهای $\hat{x}$ و $\hat{z}$ اثر می‌کنند. چون اندازه‌ی مکعب را بسیار کوچک فرض کرده‌ایم^۱، می‌توانیم با استفاده از بسط تیلور مقدار فشار روی وجوه مکعب را به مقدار فشار در مرکز مکعب ارتباط دهیم:



شکل ۳.۳ مؤلفه‌ی y نیروی وارد بر یک حجم کوچک از شار نشان داده شده است.

$$P(x \pm \frac{d}{2}, y, z) = P(x, y, z) \pm \frac{d}{2} \frac{\partial P}{\partial x} + \mathcal{O}(d)^2. \quad (10.3)$$

اکنون می‌توانیم مؤلفه‌های مختلف نیروی کل وارد بر این مکعب را بر حسب مشتقات میدان فشار بدست آوریم. به عنوان مثال برای مؤلفه‌ی x نیرو داریم:

$$f_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (11.3)$$

دقت کنید که به‌جای نیرو، نیرو بر واحد جرم را محاسبه کرده‌ایم. به همین روش و با مطالعه‌ی دیگر مؤلفه‌های نیرو به رابطه‌ی کلی زیر برای نیرو بر واحد جرم می‌رسیم:

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (12.3)$$

^۱ اندازه‌ی مکعب در مقایسه با مقیاس طولی که در آن فشار تغییر می‌کند باید کوچک باشد. مرتبه‌ی بزرگی مقیاس طولی که در آن فشار تغییر می‌کند از رابطه‌ی $(P/|\nabla P|)$ به دست می‌آید.

حالا قانون حرکت نیوتن را برای این قطعه‌ی کوچک شاره بررسی می‌کنیم. نیروی خالص بر واحد جرم باید برابر با شتاب باشد. در فصل قبلی توضیح دادیم که چگونه میدان شتاب را از میدان اوילری سرعت به دست می‌آوریم. شتاب از سرعت بصورت: $\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ، به دست می‌آید. اکنون با دردست داشتن شتاب، معادله‌ی حرکت نیوتن برای یک قطعه‌ی بی‌نهایت کوچک شاره بصورت زیر می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{f}^{\text{ext}}. \quad (۱۳.۳)$$

این صورت دیفرانسیلی قانون پایستگی تکانه برای شارش‌های پایستار و برای شاره‌های همسانگرد به معادله‌ی اوایلر معروف است. در معادله‌ی اوایلر، سهمی برای دیگر نیروهای خارجی هم در نظر گرفته شده است. به عنوان مثال، اثر نیروی وزن بصورت $\mathbf{f}^{\text{ext}} = -g\hat{z}$ ، در معادله‌ی حرکت اوایلر وارد می‌شود.

برای ارائه‌ی توصیف کامل از حرکت شاره‌های اوایلری، باید میدان سرعت $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ و میدان فشار $P(\mathbf{x}, t)$ را بدست آوریم. سه مؤلفه‌ی سرعت به همراه فشار هیدروستاتیک، چهار مجهول را تشکیل می‌دهند. دو معادله‌ی اساسی، معادله‌ی پیوستگی و معادله‌ی اوایلر، در صورتی که به همراه شرایط مرزی مناسب مسئله حل شوند، توصیف کامل و یکتایی از میدان شارشی آن مسئله بدست می‌دهند. البته دقت کنید، برای حالتی که چگالی شاره ثابت نباشد، باید یک معادله‌ی حالت ترمودینامیکی نیز به جمع معادلات بالا اضافه شود. معادله‌ی حالت، یک رابطه‌ی تجربی بین فشار، چگالی و دمای سامانه است. ما تنها به بررسی مثال‌هایی می‌پردازیم که در آنها چگالی شاره یکنواخت و ثابت است. در این گونه مسائل، شارش تراکم ناپذیر خواهد بود. موضوع انتشار امواج صوتی در شاره‌ها، یکی از مسائل مهمی است که برای بررسی دقیق آن، اطلاعات معادله‌ی حالت ترمودینامیکی سامانه نیز لازم است. پیش از پرداختن به مسائل دینامیکی و بررسی معادله‌ی اوایلر، اجازه دهید ابتدا کمی در مورد شاره‌های ساکن بحث کنیم.

شاره‌های ساکن

حالت شاره‌های ساکن و قوانین استاتیک شاره‌ها را می‌توانیم به عنوان حالت خاصی از معادله‌ی اوایلر در نظر بگیریم. اجازه دهید بحث را برای یک سامانه با چگالی ثابت ادامه دهیم. برای یک

شاره‌ی ساکن $\mathbf{u} = 0$ و معادله‌ی اوایلر به صورت زیر می‌شود:

$$\nabla \left(\frac{P}{\rho} + g z \right) = 0. \quad (14.3)$$

این معادله جواب ساده‌ای به شکل زیر دارد:

$$P = P_0 - \rho g (z - z_0), \quad (15.3)$$

که در آن P_0 و z_0 ، دو عدد ثابت هستند. به بیان دیگر، اختلاف فشار هیدروستاتیک در دو نقطه‌ی شاره تنها به اختلاف ارتفاع آن دو نقطه بستگی دارد. این معادله‌ی اساسی، توصیف کننده‌ی توزیع فشار هیدروستاتیک در شارها است. دقت کنید که در حالت سکون، اثرهای اتلافی هیچ نقشی ندارند، اصطکاک شاره تنها در شارش خود را نشان می‌دهد.

نیروی ارشمیدس

مطابق شکل ۴.۳، یک جسم صلب را در نظر بگیرید که درون شاره، در حالت سکون و غوطه‌ور است. می‌خواهیم نیروی وارد بر این جسم از طرف شاره را محاسبه کنیم. به هر عنصر بی‌نهایت کوچک سطح این جسم (ds)، نیروی فشار برابر با $-Pds$ اثر می‌کند. نیروی کل با انتگرال‌گیری بدست می‌آید:

$$\mathbf{F} = - \oint P d\mathbf{s}.$$

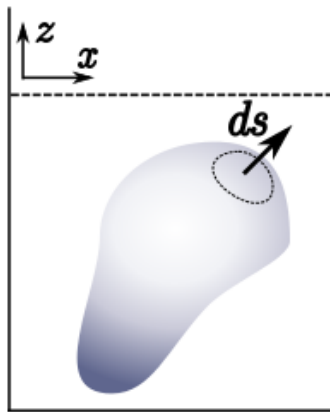
برای محاسبه‌ی این انتگرال از تقارن استفاده می‌کنیم. بنا به تقارن واضح است که این نیرو فقط در راستای z مؤلفه‌ی غیر صفر دارد. پس مستقیماً به محاسبه‌ی همین مؤلفه نیرو می‌پردازیم:

$$F_z = - \oint P \hat{z} \cdot d\mathbf{s} = - \int_V \nabla \cdot (P \hat{z}) d^3x,$$

که در آن با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس، انتگرال سطحی را به یک انتگرال درون حجم جسم تبدیل کرده‌ایم. راستای یکه‌ی $\hat{z}$ در فضا ثابت است، بنابراین از اتحاد $\hat{z} \cdot (\nabla P) = \nabla \cdot (P \hat{z})$ استفاده می‌کنیم و رابطه‌ی نیرو را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$F_z = - \int_V (\nabla P) \cdot \hat{z} d^3x = \rho g \int_V d^3x,$$

که در آن از رابطه‌ی تعادل شارهای ساکن استفاده کرده‌ایم. اکنون دقت کنید که $\int_V d^3x = V$ ، حجم جسم است. بنابراین نیروی وارد بر جسم درون شار به صورت $\mathbf{F} = m'g\hat{z}$ است، که در آن m' جرم شاری جابجا شده یا شاری هم حجم جسم است. این صورت آشنای قانون



شکل ۴.۳ طبق قانون ارشمیدس، به جسم درون شار، از طرف شار نیرویی رو به بالا وارد می‌شود. با انتگرال‌گیری روی سطح، نیروی کل وارد بر جسم غوطه‌ور به دست می‌آید.

ارشمیدس است. اندازه‌ی نیروی ارشمیدس متناسب است با جرم شاری هم حجم با مقداری از جسم که در شار فرو رفته است. نیروی ارشمیدس، تنها سهمی از نیروی کل وارد شده بر جسم است که از طرف شار وارد می‌شود. برای مطالعه‌ی تعادل جسم درون شار، لازم است تا برآیند نیروهای وارد بر آن بررسی شود. نقطه‌ی اثر نیروی ارشمیدس کجاست؟ برای مطالعه‌ی تعادل جسم و برای محاسبه‌ی گشتاورهای وارد بر آن به نقطه‌ی اثر نیروی ارشمیدس نیاز داریم. نقطه‌ی اثر نیروی ارشمیدس، دقیقاً منطبق با مرکز هندسی قسمتی از جسم است که درون آب فرو رفته است. برای تحقیق این نکته نشان دهید که نیرویی که از طرف شار به سطح جسم وارد می‌شود، حول هر محوری که از مرکز هندسی قسمت درون شار می‌گذرد، گشتاور خالصی ندارد.

۳.۳ فشار با شیب عرضی

پس از بررسی حالت خاص شارهای ساکن، اجازه دهید به مسأله‌ی شارش بازگردیم. در ادامه‌ی

بحث می‌خواهیم با مثال‌هایی ساده برای شارش، مفهوم شهودی عبارت $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ ، که در معادله‌ی اوایلر هست را درک کنیم. از آنجا که این عبارت باعث غیر خطی شدن معادله‌ی حرکت می‌شود، بررسی آن از اهمیت زیادی برخوردار است. مطابق شکل ۵.۳، یک شارش دلخواه در صفحه‌ی (x, y) را در نظر بگیرید. خطوط خمیده‌ی جریان، چرخش‌های کوچک و موضعی شاره را به همراه دارند. دایره‌ی نشان داده شده در شکل، دایره‌ای است که به صورت موضعی و در نقطه‌ی P به خطوط جریان مماس است. شعاع انحنا در این نقطه برابر با r است. مطابق شکل ۵.۳، دو نقطه‌ی نزدیک هم P و Q روی این دایره را در نظر بگیرید. فرض کنید میدان سرعت در نقطه‌ی P فقط یک مؤلفه در جهت x دارد:

$$\mathbf{u}_P = (u_{xP}, 0),$$

میدان سرعت در یک نقطه‌ی خیلی نزدیک به آن برابر است با:

$$\mathbf{u}_Q = (u_{xQ}, u_{yQ}).$$

این دو نقطه بسیار به هم نزدیک‌اند، بنابراین می‌توانیم با استفاده از بسط تیلور میدان سرعت در نقطه‌ی Q را به میدان سرعت در نقطه‌ی P ارتباط دهیم:

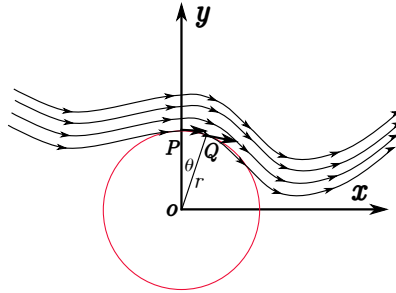
$$\begin{aligned} u_{yQ} &= u_{yP} + \frac{\partial u_y}{\partial y}|_P \Delta y + \frac{\partial u_y}{\partial x}|_P \Delta x + \dots \\ &\approx r \theta \frac{\partial u_y}{\partial x}|_P, \end{aligned} \quad (۱۶.۳)$$

در رابطه‌ی بالا از این موضوع استفاده کرده‌ایم که خطوط میدان سرعت در همسایگی نقطه‌ی P افقی شکل هستند، پس مقدار $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ در این نقطه صفر است و $\Delta x = r \sin \theta \approx r \theta$. از طرف دیگر داریم:

$$u_{yQ} = -u_Q \sin \theta \approx -u_Q \theta,$$

از مقایسه‌ی این رابطه با معادله‌ی ۱۶.۳، داریم:

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}|_P = -\frac{u_Q}{r}.$$



شکل ۵.۳ یک شارش دو بعدی دلخواه در صفحه‌ی (x, y) را در نظر بگیرید. دو نقطه‌ی P و Q روی دایره‌ای به شعاع r و بسیار به هم نزدیک هستند. این دایره به صورت موضعی به خطوط جریان مماس است.

از آنجا که در شارش اوילری اتلاف نداریم، باید اندازه‌ی سرعت در نقاط مختلف برابر باشد، پس $|u_Q| = |u_P| = u_{xP}$ و در نهایت:

$$u_{xP} \frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_P = - \left(\frac{u^2}{r} \right) \Big|_P. \quad (۱۷.۳)$$

دقت کنید که $u_x \frac{\partial u_y}{\partial x}$ در حقیقت یکی از مؤلفه‌های عبارت برداری $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ است که در نقطه‌ی P محاسبه شده است. بنابراین در این مسأله $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ، همان شتاب جانب مرکز $\frac{u^2}{r}$ در حرکت چرخشی است. راستای این شتاب در نقطه‌ی P در جهت $\hat{y}$ است. اکنون مطابق معادله‌ی اوایلر انتظار داریم به سبب این شتاب، فشار در نقطه‌ی P و با حرکت در راستای محور $\hat{y}$ تغییر کند. این نتیجه کاملاً کلی است، به این صورت که اگر در راستای عرضی نسبت به خطوط میدانی که خمیده‌اند حرکت کنیم، اختلاف فشار در شارش مشاهده می‌کنیم. به این مسأله، شیب عرضی فشار می‌گوییم. پس در حالت کلی در راستای شتاب موضعی، همواره اختلاف فشار وجود دارد، تفاوتی نمی‌کند که این شتاب خارجی و ناشی از گرانش باشد یا داخلی که از خم‌شدگی خطوط جریان نتیجه می‌شود. در قسمت‌های بعدی، بیشتر به مفهوم عبارت $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ می‌پردازیم و مؤلفه‌های دیگر آنرا بیشتر بررسی می‌کنیم. مطالعه‌ی مؤلفه‌های طولی این عبارت ما را به معادله‌ی برنولی می‌رساند.

چرخش حول یک محور

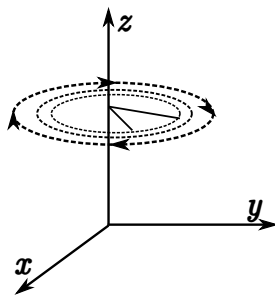
اجازه دهید موضوع شیب عرضی فشار را در مورد یک مثال ساده بیشتر بررسی کنیم. مطابق شکل ۶.۳، شارشی را در نظر بگیرید که حول محور z می‌چرخد. میدان سرعت در دستگاه دکارتی بصورت زیر است:

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, 0),$$

و بطور معادل در دستگاه استوانه‌ای $\mathbf{u} = u(r)\hat{\theta}$ ، که در آن $\omega = u(r)/r$. اکنون می‌توانیم مستقیماً و با استفاده از رابطه‌ی عملگر شیب در دستگاه استوانه‌ای به محاسبه‌ی عبارت $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ برای این شارش خاص پردازیم. پس از انجام محاسبات داریم:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{u^2}{r}\hat{r}.$$

نتیجه‌ی به‌دست آمده باز هم بحث کلی قسمت قبلی در مورد شیب عرضی فشار را تأیید می‌کند. اکنون برای میدان سرعت بالا، مؤلفه‌های معادله‌ی حرکت اوایلر را در دستگاه استوانه‌ای می‌نویسیم. در دو راستای $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ داریم:



شکل ۶.۳ شارشی را نشان داده‌ایم که حول محور z می‌چرخد.

$$-\frac{u^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g = 0.$$

مؤلفه‌ی شعاعی معادله‌ی اوایلر $\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{u^2}{r}$ ، بیانگر این است که برای شارشی که بصورت موضعی حول محور خاصی می‌چرخد اگر بصورت عرضی از محور چرخش دور شویم فشار

تغییر می‌کند. تغییرات فشار به نوع چرخش بستگی دارد. معادله‌ی دوم هم در واقع تغییرات فشار با ارتفاع را بدست می‌هد. با انتگرال‌گیری از معادلات بالا، جواب کلی زیر برای میدان فشار بدست می‌آید:

$$P(r, z) = P_0 - \rho g(z - z_0) + \rho \int_{r_0}^r \frac{u^2}{r} dr,$$

اعداد ثابت این معادله با اعمال شرایط مرزی مناسب مسئله به دست می‌آیند. با استفاده از این معادلات به سهولت می‌توانیم در مورد سطح آزاد شارهای چرخان بحث کنیم.

شکل سطح آزاد مایع چرخان

مطابق شکل ۷.۳، مایع درون سطل بلند و استوانه‌ای شکلی را در نظر بگیرید که حول محور z با سرعت ω می‌چرخد.^۱ شکل سطح آزاد مایع را با تابع $h(r)$ نشان می‌دهیم. می‌خواهیم شکل تابع $h(r)$ را بدست آوریم. در یک ارتفاع ثابت یعنی z ثابت، اگر از محور استوانه دور شویم فشار تغییر می‌کند. این تغییرات در رابطه‌ی $\frac{\partial P}{\partial r} = \rho \frac{r\omega^2}{r}$ صدق می‌کنند. با انتگرال‌گیری از این رابطه، از نقطه‌ای روی سطح آزاد مایع تا نقطه‌ی M (مطابق شکل)، داریم:

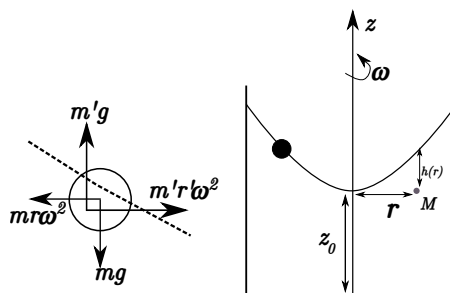
$$P(r, z) = P_{\text{هو}} + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2.$$

از طرف دیگر و در یک شعاع ثابت، می‌توانیم از رابطه‌ی $\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g$ ، از پایین‌ترین نقطه‌ی سطح آزاد مایع تا نقطه‌ی M انتگرال بگیریم تا به دست آید:

$$P(r, z) = P_{\text{هو}} + \rho gh(r).$$

هر دو روش بالا، باید برای نقطه‌ی M یک فشار را بدهند، پس $h(r) = (\omega^2/2g)r^2$. این رابطه‌ی ریاضی شکل هندسی سطح آزاد مایع را مشخص می‌کند که یک سهمی است.

^۱ اگر از اثرهای اتلافی کاملاً صرف‌نظر کنیم، چرخش سطل به هیچ صورت نمی‌تواند شارهای درون آنرا بچرخاند. چسبندگی بین لایه‌های شار از یک سو و چسبندگی لایه‌ی مرزی به دیواره‌ی سطل دو عامل لازم برای انتقال چرخش به شار هستند. در اینجا کمی با تقریب به مسئله‌ای نگاه می‌کنیم که به هر حال اتلاف دارد. در واقع نکته‌ی مهم این است که اثرهای مربوط به اتلاف فقط در یک لایه‌ی مرزی نازک نزدیک دیواره‌های سطل حضور دارند. وجود این لایه‌ی نازک لازمی چرخش شار است.



شکل ۷.۳ راست: سطل آب را حول محورش می چرخانیم تا آب درون آن نیز بچرخد. سطح خمیدهی آب به همراه یک جسم شناور روی آن نشان داده شده است. چپ: نیروهای وارد بر یک جسم شناور روی آب را نشان داده ایم. نیروهای وارد بر این جسم عبارتند از وزن، ارشمیدس، گریز از مرکز و عکس العمل شاره ناشی از گریز از مرکز.

تبادل جسم غوطه ور روی سطح مایع چرخان

فرض کنید جسمی روی سطح آزاد مایع چرخان شناور است. مطابق شکل ۷.۳، نیروهای وارد بر جسم را مطالعه می کنیم. نیروهای وزن، ارشمیدس و گریز از مرکز به جسم وارد می شوند. علاوه بر این سه نیرو، یک نیروی دیگر نیز به جسم وارد می شود. برای روشن شدن موضوع یادآوری می کنیم که نیروی ارشمیدس ناشی از شیب فشار است که به سبب نیروی وزن شاره ایجاد می شود. اینجا علاوه بر نیروی وزن نیروی گریز از مرکز هم به هر عنصر شاره وارد می شود. این نیرو یک شیب اضافی در فشار ایجاد می کند که در نهایت باعث اعمال نیروی به جسم می شود. محاسبه ی این نیروی چهارم کار آسانی است. دقیقاً مشابه روش محاسبه ی نیروی ارشمیدس عمل می کنیم. نیروی چهارم برابر می شود با: $m'r'\omega^2$ ، که در آن m' جرم مایع جابجا شده ناشی از فرو رفتن جسم در آن است. r' فاصله ی مرکز هندسی قسمتی از جسم که در مایع فرو رفته است از مرکز چرخش می باشد. اگر چگالی جسم را یکنواخت بگیریم، نیروهای وزن و گریز از مرکز به مرکز جرم جسم ولی دیگر نیروها به مرکز جرم قسمتی از جسم که داخل آب است اثر می کنند. در حالت تعادل باید $m'g = mg$ و $m'r'\omega^2 = mr\omega^2$ باشد. یعنی فقط در حالت $r' = r$ تعادل وجود دارد. اگر شکل هندسی جسم طوری باشد که $r' > r$ باشد، در این صورت جسم غوطه ور از مرکز چرخش می گریزد. ممکن است شکل هندسی جسم به گونه ای باشد که آن جسم به

مرکز چرخش جذب شود. به نظرتان اجسام با چه شکل هندسی به مرکز چرخش جذب و با چه شکلی از آن دفع می‌شوند؟ به صورت کیفی و تقریبی بحث کنید.

۴.۳ شارش تکانه

نشان دادیم یک شارش اویلری که تحت تاثیر چگالی نیروی خارجی $\mathbf{f}^{\text{ext}}$ (نیرو بر واحد جرم) است، از معادلات حرکت زیر تبعیت می‌کند:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad \rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = -\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla P + \rho \mathbf{f}^{\text{ext}},$$

از ترکیب روابط بالا، نشان می‌دهیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla P + \rho \mathbf{f}^{\text{ext}}. \quad (18.3)$$

توجه کنید در این رابطه، از خلاصه نویسی به صورت زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i \mathbf{u}).$$

یک سطح آزمون دلخواه درون شاره در نظر بگیرید. این سطح بسته یک حجم آزمون از شاره را مشخص می‌کند. بصورت لحظه‌ای از طرفین رابطه‌ی ۱۸.۳، روی حجم آزمون انتگرال می‌گیریم:

$$\int_V d^3x \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) = - \oint_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} - \oint P d\mathbf{s} + \mathbf{F}^{\text{ext}}. \quad (19.3)$$

برای رسیدن به عبارات بالا، از قضیه‌ی دیورژانس استفاده کرده و انتگرال‌های حجمی را به انتگرال‌های سطحی تبدیل کرده‌ایم. در رابطه‌ی بالا $\mathbf{F}^{\text{ext}} = \int d^3x \rho \mathbf{f}^{\text{ext}}$ ، نیروی خارجی برآیند وارد بر شاره‌ی درون سطح آزمون است. جمله‌ی دوم در سمت راست عبارت بالا، قسمتی از نیروی وارد بر شاره‌ی آزمون است که به سبب فشار تولید می‌شود. جمله‌ی اول در سمت راست، مشخص کننده‌ی تغییر تکانه‌ی شاره‌ی آزمون به سبب شارش تکانه از مرزهاست. اینجا $-\rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s})$ میزان تکانه‌ای است که در واحد زمان و به سبب شارش مرزی وارد ناحیه‌ی آزمون می‌شود.

رابطه‌ی ۱۹.۳ به این صورت تعبیر می‌شود: سمت چپ میزان افزایش تکانه‌ی شاره‌ی آزمون را نشان می‌دهد. سمت راست، دلایل افزایش تکانه را نشان می‌دهد. به سه دلیل تکانه می‌تواند افزایش یابد: شارش خالص تکانه از مرزها، نیروی فشاری که در مرزها مبادله می‌شود و نیروی خارجی.

اگر شارش در حالت پایا باشد، رابطه‌ی بالا بصورت زیر می‌شود:

$$\oint_S \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = - \oint P d\mathbf{s} + \mathbf{F}^{\text{ext}}. \quad (20.3)$$

در حالت پایا، نیروی خالص وارد بر شاره‌ی آزمون که مجموع نیروی خارجی و نیروی فشاری است با شارش تکانه یعنی تکانه بر واحد زمان که از مرزها خارج می‌شود برابر خواهد بود.

۵.۳ معادله‌ی برنولی

برای مطالعه‌ی حرکت شاره‌های اویلری، برنولی روش ساده‌تری را پیشنهاد می‌کند. هر چند با روش برنولی نمی‌توانیم به تمامی سؤالات دینامیکی شارش اویلری پاسخ دهیم، ولی این روش ارزشمند کارائی بالایی دارد. اجازه دهید از معادله‌ی حرکتی اویلر برای شاره‌ی تراکم ناپذیر با چگالی ثابت شروع کنیم:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + g z \right). \quad (21.3)$$

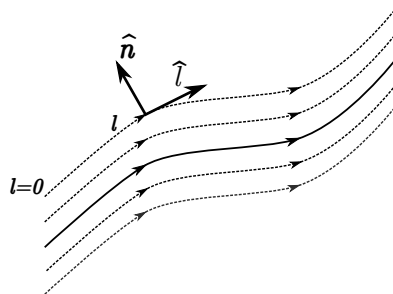
شارش را پایا فرض کرده‌ایم. مفهوم خط جریان که قبلاً تعریف شد را به خاطر بیاورید و فرض کنید روی یک خط جریان حرکت می‌کنیم. مطابق شکل ۸.۳، از پارامتر طول خم l ، برای مشخص کردن نقاط مختلف روی این خط استفاده می‌کنیم. همچنین بردار مماس بر این خط را با $\hat{l}$ نشان می‌دهیم. این بردار مماس در هر نقطه در راستای میدان سرعت است. پس میدان سرعت بصورت ساده‌ی $\mathbf{u} = u \hat{l}$ نوشته می‌شود. در این صورت عبارت $\mathbf{u} \cdot \nabla$ ، مشتق‌گیری جهتی است و تغییرات را در راستای یک خط جریان اندازه می‌گیرد. بنابراین قرار می‌دهیم: $(\mathbf{u} \cdot \nabla) = u \frac{\partial}{\partial l}$. اکنون می‌توانیم عبارت غیر خطی معادله‌ی اویلر را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)(u \hat{l}) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial l} u^2 \right) \hat{l} + u^2 \frac{\partial \hat{l}}{\partial l},$$

دقت کنید که $\frac{\partial \hat{l}}{\partial n} = -\hat{n}$ ، بردار یکه‌ای است که بر $\hat{l}$ عمود است. بردار گرادیان را نیز می‌توانیم بصورت موضعی در دو راستای خط جریان و راستای عمود بر آن بصورت زیر تصویر کنیم:

$$\nabla = \hat{l} \frac{\partial}{\partial l} + \hat{n} \frac{\partial}{\partial n}.$$

در این صورت و با جایگذاری این عبارتها در معادله‌ی اوایلر و مطالعه‌ی تصویر طرفین معادله‌ی بدست آمده در راستای $\hat{l}$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:



شکل ۸.۳ معادله‌ی برنولی برای خطوط جریان نوشته می‌شود.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial l} u^2 = - \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{P}{\rho} + g z \right). \quad (22.3)$$

با انتگرال‌گیری از این معادله روی یک خط جریان داریم:

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{P}{\rho} + g z = \text{ثابت}, \quad (23.3)$$

این معادله به قضیه‌ی برنولی مشهور است. ترکیب $\frac{1}{2} u^2 + \frac{P}{\rho} + g z$ در تمام نقاط یک خط جریان دارای یک مقدار ثابت است. دقت کنید که این مقدار ثابت، لزوماً برای خطوط مختلف جریان یک مقدار واحد نیست. از این یافته‌ی برنولی، می‌توانیم برای حل دسته‌ی بزرگی از مسائل استفاده کنیم.

به ارتباط نزدیکی که جملات موجود در معادله‌ی برنولی با کمیتی از نوع انرژی دارند بیشتر دقت کنید. در واقع رابطه‌ی برنولی بیان دیگری از پایستگی انرژی درون شاره‌های اویلری است. برای درک این موضوع، اجازه دهید لوله‌ی شار را تعریف کنیم. یک لوله‌ی شار، لوله‌ای است

فرضی که از کنار هم قرار دادن تعدادی خط جریان بدست می‌آید. خطوط جریان را طوری انتخاب می‌کنیم که نقطه‌ی شروع همگی آنها از روی یک مسیر بسته‌ی خاص باشد. در واقع این مسیر بسته مقطع لوله‌ی شار را در لحظه‌ی اول تشکیل می‌دهد. با دنبال کردن مسیر این خطوط جریان، می‌توانیم تصویری از لوله‌ی شار را بدست آوریم. واضح است که مقطع این لوله، با توجه به نوع جریان، در جاهای مختلف لوله متغیر است. اکنون به درستی دریافته‌اید که هیچ خط جریانی نمی‌تواند دیواره‌های لوله‌ی شار را قطع کند. یک لوله‌ی شار به طول دلخواه را در نظر بگیرید. در یک بازه‌ی زمانی دلخواه انرژی ورودی و خروجی به این لوله‌ی شار باید با کاری که نیروی ناشی از اختلاف فشار در دو سر لوله روی شار انجام می‌دهد، برابر باشند. انرژی‌های ورودی و خروجی از دونوع جنبشی و گرانشی هستند. با بررسی دقیق این موضوع، تحقیق کنید که رابطه‌ی برنولی، بیانی دیگر برای پایستگی انرژی شار است.

محاسبه‌ی سرعت خروج آب از انتهای یک مخزن روباز، ساده‌ترین کاربرد رابطه‌ی برنولی است. فرض کنید که مخزن تا ارتفاع H پر است و از سوراخ کوچکی در کف آن، جریان خارج می‌شود. اگر بتوانیم از اثرهای اتلافی صرف‌نظر کنیم، شارش را پایستار می‌گیریم. رابطه‌ی برنولی را برای دو نقطه، یکی در بالاترین سطح آزاد مخزن و دیگری در نقطه‌ی خروج می‌توانیم به کار بگیریم. فشار در این دو نقطه برابر با فشار هوا است. پس سرعت خروج برابر می‌شود با:

$$u = \sqrt{2gH + u_{\infty}^2},$$

که در آن u_{∞} ، سرعت پایین آمدن سطح آزاد مخزن است. از آنجا که شارش تراکم ناپذیر است، باید $A_{\infty}u_{\infty} = Au$ باشد که در آن A و A_{∞} به ترتیب سطح مقطع سوراخ ته ظرف و سطح مقطع قسمت روباز مخزن هستند. بنابراین:

$$u = \frac{\sqrt{2gH}}{\sqrt{1 + A^2/A_{\infty}^2}}.$$

کاربردهای بیشتری از معادله‌ی برنولی را جلوتر می‌بینیم.

شارش‌های بدون تاو

رابطه‌ی برنولی برای شارش‌های بدون تاو، شکل کاراتری را دارد. برای بررسی این موضوع اتحاد

برداری زیر را در نظر بگیرید:

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} \right) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

در حالتی که چرخش نداریم $\nabla \times \mathbf{u} = 0$. در این صورت اتحاد بالا شکل ساده‌تری دارد. با استفاده از این اتحاد و برای شارهای بدون گردابه معادله‌ی اوایلر را بازنویسی می‌کنیم:

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{2} + \frac{P}{\rho} + g z \right) = 0. \quad (24.3)$$

با انتگرالگیری از دوسوی این معادله روی هر مسیر دلخواه (نه لزوماً خطوط جریان)، داریم:

$$\frac{1}{2} u^2 + \frac{P}{\rho} + g z = \text{ثابت}. \quad (25.3)$$

این صورت معادله‌ی برنولی برای شارش بدون تاواست. همان‌طور که دیده می‌شود در شارش‌های غیر چرخشی، ترکیب برنولی، در تمام نقاط شار یک مقدار ثابت را دارد. در واقع برای حالت کلی، ترکیب برنولی روی هر خط شار برابر با یک عدد خاص است ولی برای شارهای غیر چرخشی، این عدد همه‌جا یک مقدار ثابت است.

۶.۳ شارش پتانسیل

نظریه‌ی ریاضی پتانسیل، ابزار مناسبی را برای مطالعه‌ی شارش‌های غیر چرخشی (بدون تاو) در اختیار ما قرار می‌دهد. این نظریه با رابطه‌ی تعمیم یافته‌ی برنولی ترکیب می‌شود و روشی با کاربرد بیشتر بدست می‌آید. در شارش‌های بدون گردش، میدان سرعت شرط $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ را برآورده می‌کند. اهمیت شارش‌های پتانسیلی با قضیه‌ی کلونین بهتر نمایان می‌شود. بنا به قضیه‌ی بسیار مهم کلونین، اگر در لحظه‌ی اول، در شارهای اوایلری گردش نباشد، هیچ موقع بوجود نخواهد آمد. در این شرایط میدان سرعت را می‌توانیم از یک پتانسیل اسکالر محاسبه کنیم^۱.

^۱ در بحث مربوط به شارش‌های اتلافی، نشان می‌دهیم که ارتباط نزدیکی بین چرخش و اتلاف در شارش‌ها وجود دارد. در واقع در شارش‌های تراکم ناپذیر که چرخشی هم نیستند، اتلاف نقشی ندارد.

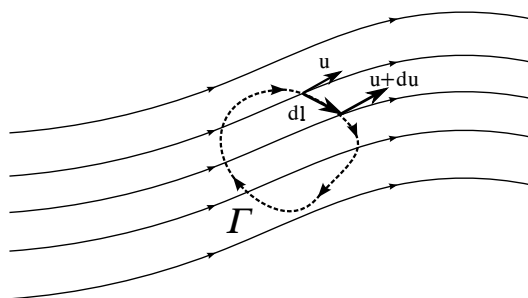
قضیه‌ی کلوین

مطابق شکل ۹.۳، یک مسیر بسته را در نظر بگیرید که همراه شارح حرکت می‌کند. کمیت چرخش را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Omega = \oint_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}, \quad (26.3)$$

که در اینجا انتگرال‌گیری روی مسیر بسته‌ی Γ که همراه شارح حرکت کند، انجام می‌شود. این مسیر مثل یک نخ دو سر بسته است که سوار بر شارح شده است. مطابق قضیه کلوین، اندازه‌ی چرخش ثابت است:

$$\frac{d}{dt}\Omega = 0.$$



شکل ۹.۳ یک مسیر دلخواه و بسته که همراه شارح حرکت می‌کند.

برای اثبات این موضوع باید تغییرات زمانی را از دید ناظری که همراه شارح حرکت می‌کند محاسبه کنیم. جزئیات محاسبه بصورت زیر است:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot d\mathbf{l} + \mathbf{u} \cdot \frac{d}{dt}(d\mathbf{l}) \right). \quad (27.3)$$

مشاهده می‌شود که تغییرات چرخش به دو علت ممکن است تولید شود: یکی به خاطر تغییرات سرعت و دیگری به علت تغییرات مسیر. سهم ناشی از هر کدام از این دو مورد به صورت زیر است:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + g z \right),$$

$$\frac{d}{dt}(dl) = (\mathbf{u} + d\mathbf{u}) - \mathbf{u} = d\mathbf{u}, \quad (28.3)$$

که در آن $\mathbf{u}$ و $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ مطابق شکل، سرعت‌های دو نقطه‌ی ابتدایی و انتهایی بردار $d\mathbf{l}$ هستند. مشاهده می‌شود که هر دو جمله‌ی موجود در $\frac{d\Omega}{dt}$ را می‌توانیم بصورت انتگرال یک دیفرانسیل کامل روی مسیر بسته بنویسیم. پس انتگرال آنها صفر می‌شود. بنابراین هیچ کدام از دو عامل بالایی نمی‌توانند تغییری را در چرخش تولید کنند. بنابراین چرخش در شارهای اولیه‌ی همیشه ثابت است.

با توجه به قضیه‌ی بالا و برای یک مسیر بی‌نهایت کوچک داریم:

$$\Omega = \int (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{s} \approx (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{s} = \text{ثابت}, \quad (29.3)$$

با استفاده از این رابطه، اگر در لحظه‌ای گردش‌دار (تاو) نداشته باشیم، Ω صفر است و همواره صفر می‌ماند. بنابراین هیچ گاه گردش‌دار بوجود نمی‌آید. این قضیه کمک می‌کند که برای شارهایی که در لحظه‌ی اول چرخشی نیستند، همواره بتوانیم از مفهوم پتانسیل استفاده کنیم.

معادله‌ی لاپلاس

برای مشخص کردن میدان شارشی در شارش‌های اولیه‌ی تراکم ناپذیر بدون چرخش، پتانسیل اسکالر $\phi(\mathbf{x}, t)$ ، کفایت می‌کند. بنا به قضیه‌ی پتانسیل در ریاضی چون تاو میدان سرعت صفر است می‌توانیم آن را از یک پتانسیل اسکالر بصورت زیر به دست آوریم:

$$\mathbf{u} = \nabla \phi(\mathbf{x}, t). \quad (30.3)$$

از طرف دیگر و با توجه به رابطه‌ی پیوستگی برای شارش‌های تراکم ناپذیر که بصورت $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ است، داریم:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (31.3)$$

پس برای توصیف این شارش‌ها کفایت معادله‌ی لاپلاس را برای پتانسیل اسکالر ϕ حل کنیم. برای حل معادله‌ی لاپلاس باید شرایط مرزی مناسب را برگزینیم. یکتایی جواب معادله‌ی دیفرانسیل لاپلاس با اعمال شرایط مرزی مناسب تضمین می‌شود.

از نظر فیزیکی، همواره شارش‌ها در محیط‌هایی صورت می‌گیرند که توسط مرزهایی محصورند. دیواره‌های ساکن یا متحرکِ ظرفهای حاوی شارش، دیواره‌های متحرک اجسام شناور درون شاره و یا مرز مشترک دو شاره‌ی ترکیب‌ناپذیر، مثالهایی از انواع مرزها در مسائل مختلف هستند. در مورد شارش‌های اولیه‌ی، سرعت عمودی شاره روی سطوح صلب برابر با سرعت عمودی خود سطح است. پس در حالت کلی، یک مرز دلخواه S را در نظر بگیرید که بردار عمود بر سطح آن را در یک نقطه‌ی مشخص روی آن با $\hat{n}$ نشان می‌دهیم. اگر این مرز با سرعت از پیش مشخص شده‌ی $\mathbf{V}$ حرکت کند، شرط مرزی میدان سرعت بصورت زیر اعمال می‌شود:

$$\mathbf{u} \cdot \hat{n}|_S = \mathbf{V} \cdot \hat{n}. \quad (32.3)$$

دقت کنید که این شرط مرزی، اجازه نمی‌دهد شاره در مجاورت مرز از آن جلوتر یا عقب‌تر حرکت کند. در مورد شارش‌های پایستار، نیازی به مشخص کردن مؤلفه‌های مماسی سرعت روی مرزها نیست^۱. در مورد مرزهای پیچیده‌تر، مثل مرز مشترک دو شاره‌ی ترکیب‌ناپذیر در سیستم دو فاز، بعداً بحث می‌کنیم. قبل از مطالعه‌ی شارش در سامانه‌های محصور، اجازه دهید در مورد برخی از شارش‌های مقدماتی که جواب‌های خاصی برای معادله‌ی لاپلاس در فضای نامتناهی هستند، بحث کنیم.

چشمه و چاهک

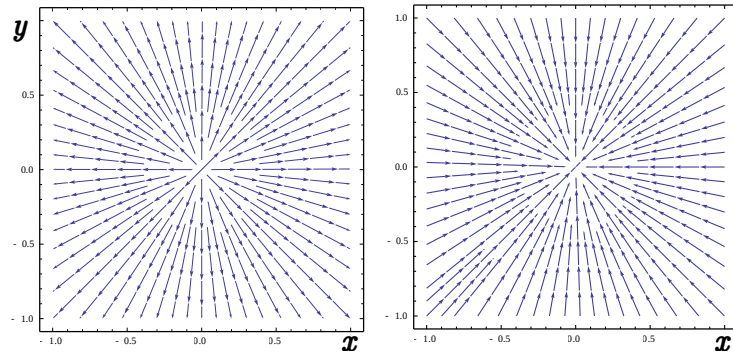
جوابهای مقدماتی و تکیه‌ی معادله‌ی لاپلاس در فضای ۳ بعدی را بنام چشمه یا چاه معرفی می‌کنیم. جوابهایی بصورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\phi^s(x, y, z) = \frac{-Q}{4\pi R}, \quad (33.3)$$

که در آن $\mathbf{R} = (x, y, z)$ بردار مکان نقاط فضا است. چشمه و چاه جواب‌های تکیه‌ی معادله‌ی لاپلاس هستند، به این معنی که جوابهای بالا در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$\nabla^2 \phi^s = Q\delta(\mathbf{R}),$$

^۱ در مقایسه با مسائل الکتروستاتیک، شرط مرزی روی پتانسیل شارشی، مشابه شرط مرزی مسأله‌ی نویمان است. در مورد بحث مربوط به یکتایی جواب در این حالت به کتاب‌های ریاضی فیزیک مراجعه کنید [۵۲].



شکل ۱۰.۳ چشمه و چاه جریان جوابهای مقدماتی معادله‌ی لاپلاس هستند.

این پتانسیل در تمامی نقاط، به جز مبدأ مختصات، در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند. بنابراین جوابها در نقطه‌ی مبدأ تکینه هستند. برای درک شهودی، میدان سرعت مربوط به این جوابهای تکینه را محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{u}^s = \nabla \phi^s = \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{R^3}, \quad (34.3)$$

با توجه به علامت Q ، این جوابها چشمه یا چاهک نقطه‌ای جریان را مشخص می‌کنند. حالت $Q > 0$ چشمه است و در غیر این صورت چاهک داریم. خطوط جریان را برای این دو حالت در شکل ۱۰.۳، مشاهده می‌کنید. مقدار Q قدرت چشمه یا چاهک را می‌رساند. برای بررسی این موضوع سعی کنید یک سطح کروی دلخواه به مرکز مبدأ را در نظر گرفته و حجم آب خارج شده از آن را محاسبه کنید. با محاسبه داریم:

$$\oint_S \mathbf{u}^s \cdot d\mathbf{s} = Q, \quad (35.3)$$

پس Q حجم شارهای است که در واحد زمان از چشمه خارج و یا وارد چاهک می‌شود. میدان فشار برای یک چشمه‌ی تنها، در نقاط مختلف فضا چگونه است؟ برای پاسخ به این سؤال اجازه دهید از رابطه‌ی برنولی استفاده کنیم. یک نقطه‌ی دلخواه فضا با مختصات (x, y, z) را با یک نقطه در بی‌نهایت مقایسه می‌کنیم. در صورتی که از گرانش صرف‌نظر کنیم، فشار در هر

نقطه بصورت زیر است:

$$P^s(x, y, z) = P_\infty + \frac{Q^2}{32\pi^2 R^4},$$

که در آن، P_∞ فشار در بی‌نهایت و یک عدد ثابت است.

سرعت یکنواخت

به عنوان مثالی دیگر از جوابهای معادله‌ی لاپلاس، میدان سرعت یکنواخت $\mathbf{u} = (0, 0, U)$ را در نظر بگیرید. این میدان سرعت از پتانسیل زیر بدست می‌آید:

$$\phi(x, y, z) = U z. \quad (36.3)$$

این پتانسیل در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند و جریان یکنواختی از شار در راستای محور $\hat{z}$ را مشخص می‌کند.

چشمه در حضور جریان یکنواخت

یک چشمه‌ی نقطه‌ای جریان را در نظر بگیرید که در حضور یک جریان یکنواخت قرار دارد. با توجه به خطی بودن معادلات حرکت مسأله، یعنی معادله‌ی لاپلاس، اصل برهم‌نهی صادق است. با توجه به اصل برهم‌نهی، جوابهای این مسأله را بصورت ترکیب جوابهای مربوط به یک چشمه‌ی تنها و یک جریان یکنواخت می‌نویسیم:

$$\phi(x, y, z) = U z - \frac{Q}{4\pi R}, \quad (37.3)$$

و میدان سرعت مربوطه هم در دستگاه دکارتی بصورت زیر می‌شود:

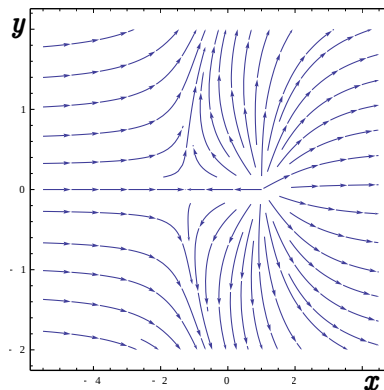
$$u_z = U + \frac{Q}{4\pi R^2} \cos \theta, \quad u_x = \frac{Q}{4\pi R^2} \sin \theta \cos \phi, \quad u_y = \frac{Q}{4\pi R^2} \sin \theta \sin \phi,$$

که در آن θ و ϕ زوایای مختصات قطبی کروی هستند. این میدان سرعت را در دستگاه قطبی-کروی بازنویسی می‌کنیم. در دستگاه قطبی کروی، به سبب تقارن سمتی که حول راستای z داریم،

میدان سرعت به زاویه‌ی سمتی بستگی ندارد:

$$u_r = U \cos \theta + \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad u_\theta = -U \sin \theta, \quad u_\phi = 0.$$

در شکل ۱۱.۳، خطوط جریان این مسأله را مشاهده می‌کنید. مشابه قبل با استفاده از رابطه‌ی



شکل ۱۱.۳ خطوط جریان برای شارش یک چشمه در حضور یک جریان یکنواخت.

برنولی، فشار در نقاط مختلف را بدست می‌آوریم. از مقایسه‌ی یک نقطه‌ی دلخواه با یک نقطه در نواحی خیلی دور از چشمه، فشار را در آن نقطه‌ی دلخواه فضا بدست می‌آوریم:

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U^2 = \frac{1}{2}\rho u^2(r, \theta) + P(r, \theta), \quad (38.3)$$

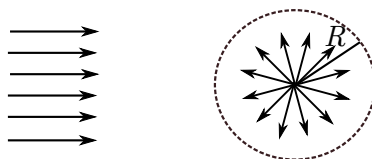
و از آنجا:

$$P(r, \theta) - P_\infty = -\frac{\rho Q^2}{32\pi^2 R^4} - \frac{\rho U Q}{4\pi R^2} \cos \theta. \quad (39.3)$$

دقت کنید که در اینجا برای سهولت از گرانش صرف‌نظر کرده‌ایم.

هر چند که چشمه یا چاهک، به عنوان ابزارهای ریاضی در حل تحلیلی مسائل کارایی دارند، ولی ممکن است نمود عملی خیلی دور از ذهنی داشته باشند. یک کره‌ی صلب را که سوراخ‌های ریزی بصورت یکنواخت روی آن ایجاد کرده‌ایم در نظر بگیرید. با یک لوله‌ی خیلی باریک شاره را به درون این کره پمپ می‌کنیم تا از سوراخ‌های ریز روی سطح آن به بیرون تزریق شود. اگر تعداد

سوراخ‌ها را زیاد، لوله‌ی جریان رسان را خیلی باریک و اندازه‌ی کره را خیلی کوچک انتخاب کنیم، به سامانه‌ای می‌رسیم که بسیار به چشمه‌ی جریان شبیه است. اکنون فرض کنید یک چشمه با شرایط بالا را در عمل ساخته‌ایم. این چشمه را درون یک شارش یکنواخت که در راستای $\hat{z}$ جریان دارد، قرار می‌دهیم. آیا منبع چشمه تمایل دارد به سمت جریان جذب شود و یا از آن دفع شود؟ چشمه و چاهک مشابه بارهای نقطه‌ای الکتروستاتیک و جریان یکنواخت هم مشابه میدان الکتریکی یکنواخت است. در الکتروستاتیک بارهای نقطه‌ای، متناسب با علامت بار، به سوی راستای میدان جذب یا دفع می‌شوند. آیا انتظار ندارید، در مورد راستای نیرو نیز از تشابه الکترومغناطیس استفاده کرده و پیش‌گویی کنید؟ در مورد دو چشمه در حضور هم چه انتظاری دارید؟ آیا انتظار دافعه دارید؟



شکل ۱۲.۳ یک چشمه‌ی نقطه‌ای جریان در حضور یک جریان یکنواخت فرودی از نقاط بسیار دور نشان داده شده است. آیا منبع چشمه تمایل دارد به سمت جریان جذب شود؟

برای بررسی برهم‌کنش بین چشمه و جریان یکنواخت، اجازه دهید مسأله‌ی ذهنی دیگری را مطرح کنیم. با جواب دادن به این مسأله‌ی کمکی، به پاسخ سؤال اصلی می‌رسیم. مطابق شکل ۱۲.۳، یک سطح کروی فرضی با شعاع R که مرکز آن روی چشمه قرار دارد را در نظر بگیرید. به شارهِی درون این کره چه نیرویی وارد می‌شود؟ مطابق بحث مربوط به رابطه‌ی ۲۰.۳، نیروی خالص ناشی از نیروی خارجی و انتگرال فشار باید با شارش تکانه (تکانه در واحد زمان که سطح آزمون خارج می‌شود) برابر شود. برای بررسی بیشتر بصورت زیر عمل می‌کنیم.

الف: شار خالص خروجی از ناحیه‌ی آزمون را محاسبه می‌کنیم. درست است که از طریق چشمه ماده به درون این ناحیه‌ی آزمون تزریق می‌شود ولی به سبب همسانگرد بودن شارش چشمه، تکانه‌ی خالصی از این طریق به درون سطح آزمون افزوده نمی‌شود. برای محاسبه‌ی شارش تکانه در واحد زمان که از طریق جریانهای سطحی صورت می‌گیرد بصورت زیر عمل می‌کنیم. تغییر خالص تکانه ناشی از عبور جریان از یک عنصر بی‌نهایت کوچک سطح (ds) را در نظر گرفته و

روی آن انتگرال می‌گیریم. اگر شارش مرزی تکانه را با $\dot{p}$ نشان دهیم، داریم:

$$\dot{p} = \oint \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}. \quad (40.3)$$

واضح است که بنا به تقارنهای موجود در مسأله، مؤلفه‌های x و y این شارش صفر است. پس مؤلفه‌ی z آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \dot{p}_z &= \oint \rho \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \oint \rho u_z u_r (\pi R^2) d(\cos \theta) \\ &= \int_{-1}^{+1} \rho \left(U + \frac{Q}{\pi R^2} \cos \theta \right) \left(U \cos \theta + \frac{Q}{\pi R^2} \right) (\pi R^2) d(\cos \theta) \\ &= \frac{4}{3} \rho U Q. \end{aligned} \quad (41.3)$$

که در آن از نتایج به‌دست آمده برای میدان سرعت استفاده کرده‌ایم.

ب- نیروی وارد بر شارهی درون کره‌ی آزمون را بررسی می‌کنیم. در این مورد، نیروی وارد شده از طرف چشمه، نقش نیروی خارجی در رابطه‌ی ۲۰.۳ را دارد. نیروی وارد بر این سامانه برابر است با نیروی وارد شده از طرف چشمه به اضافه‌ی نیروی وارد شده ناشی از فشار در نقاط روی سطح کره. نیروی وارد شده از طرف چشمه را با $\mathbf{f}^s$ نشان می‌دهیم پس:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}^s - \oint_S P d\mathbf{s}, \quad (42.3)$$

باز هم به سبب تقارن، مستقیماً مؤلفه‌ی z نیرو را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_z &= \mathbf{f}_z^s - \oint_S P \cos \theta d\mathbf{s} \\ &= \mathbf{f}_z^s + \pi R^2 \int_{-1}^{+1} \left(-P_\infty + \frac{\rho Q^2}{32\pi^2 R^4} + \frac{\rho U Q \cos \theta}{\pi R^2} \right) \cos \theta d(\cos \theta) \\ &= \mathbf{f}_z^s + \frac{1}{3} \rho U Q. \end{aligned} \quad (43.3)$$

اکنون دقت کنید که هر دو کمیت محاسبه شده در بالا باید برابر باشند. با مساوی قرار دادن این دو نتیجه می‌توانیم نیروی $\mathbf{f}^s$ را به‌دست آوریم. پس:

$$\mathbf{f}^s = \rho U Q \hat{z}. \quad (44.3)$$

پس چشمه نیروی $\rho U Q \hat{z}$ را به آب وارد می‌کند و از اینجا نتیجه می‌گیریم که نیروی وارد شده به چشمه برابر است با: $-\rho U Q \hat{z}$ که نشان می‌دهد چشمه جذب جریان می‌شود. مسأله چاهک در حضور جریان یکنواخت نیز به همین روش قابل بررسی است. چاهک با نیروی $\rho U Q \hat{z}$ از جریان دفع می‌شود.

چشمه و چاهک در حضور هم

دو چشمه و یا چاهک نقطه‌ای به قدرت‌های Q_1, Q_2 را در نظر بگیرید که به فاصله‌ی d از هم واقع شده‌اند. برای محاسبه‌ی نیروی بین آنها می‌توان مطابق روش قبلی عمل کرد. سامانه‌ای فرضی را بصورت زیر در نظر بگیرید: صفحه‌ی عمود منصف خط واصل، دو نیم فضا را از هم جدا می‌کند. نیروی وارد بر یک نیم فضا را از دو روش مشابه مسأله‌ی قبلی، محاسبه کرده و از آنجا نیروی بین چشمه و چاه را بدست آورید. اندازه‌ی این نیرو برابر است با:

$$\mathbf{F} = \frac{\rho Q_1 Q_2}{16\pi d^2} \hat{\mathbf{d}}, \quad (45.3)$$

که $\hat{\mathbf{d}}$ بردار واحد در راستای خط واصل مراکز چشمه و چاه است. نیروی بین دو بار هم‌نام جاذبه و بین دوبار غیر هم‌نام، دافعه است. پیش‌گویی با تکیه بر تناظر الکتروستاتیک کاملاً نتیجه‌ی نادرست می‌دهد. دقت کنید که تناظر با الکتروستاتیک تنها در شکل خطوط میدان است. قانون نیرو در دو مسأله‌ی الکتروستاتیک و شارها کاملاً با هم متفاوتند.

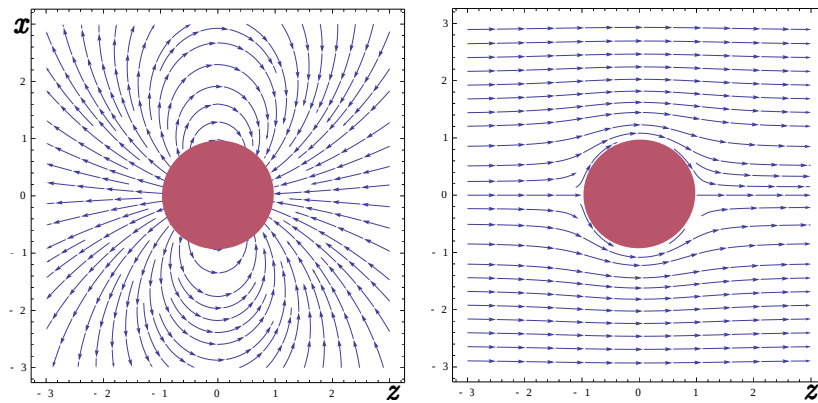
۷.۳ شارش اطراف کره

گره‌ای صلب به شعاع a را در نظر بگیرید که با سرعت $u \hat{z}$ (از دید ناظر آزمایشگاه) در یک شارهای اولیه‌ی حرکت می‌کند. علاوه بر گره، یک منبع جریان که در نقاط دور واقع شده است، شارش یکنواختی با سرعت $v \hat{z}$ را تولید می‌کند. می‌خواهیم میدان سرعت شاره که از حضور همزمان کره‌ی متحرک و جریان یکنواخت ناشی از منبع واقع در بی‌نهایت تولید می‌شود را بدست آوریم. برای این منظور معادله‌ی لاپلاس را با شرایط مرزی مناسب این مسأله حل می‌کنیم. برای بررسی این مسأله از دستگاه قطبی کروی استفاده می‌کنیم و محاسبات را در دستگاه مختصات آزمایشگاه انجام می‌دهیم. مبدأ این دستگاه را طوری برمی‌گزینیم که در لحظه‌ی مورد نظر، مرکز

کره دقیقاً روی مبدأ مختصات باشد. از تقارن سمتی که مسأله دارد، حدس می‌زنیم که پتانسیل تنها به مختصات r و θ بستگی دارد. پس در جستجوی تابع $\phi(r, \theta)$ هستیم. شرایط مرزی این مسأله در دستگاه آزمایشگاه بصورت زیرند:

$$\frac{\partial}{\partial r} \phi(r = a, \theta) = -u \cos \theta, \quad \frac{\partial}{\partial r} \phi(r \rightarrow \infty, \theta) = v \cos \theta. \quad (46.3)$$

از آنجا که ممکن است سرعت‌های u و v تابعی از زمان باشند، باید مسأله را بصورت لحظه‌ای



شکل ۱۳.۳ میدان سرعت اطراف یک کره‌ی صلب. راست: کره ساکن است و یک جریان یکنواخت از فواصل دور به کره نزدیک می‌شود. در این حالت یک جریان پایا داریم. چپ: کره با سرعت ثابت در جهت $\hat{z}$ حرکت می‌کند و در بی‌نهایت جریانی نداریم. در این حالت و در دستگاه آزمایشگاه، جریان پایا نیست. خطوط جریان در لحظه‌ای رسم شده است که مرکز کره بر مرکز دستگاه مختصات منطبق است.

حل کنیم. اکنون می‌توانیم از حل‌های عمومی که برای معادله‌ی لاپلاس در دستگاه قطبی کروی می‌شناسیم، استفاده کنیم^۱. با توجه به تقارن سمتی مسأله کلی‌ترین جواب معادله‌ی لاپلاس در دستگاه قطبی کروی بصورت زیر است:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta), \quad (47.3)$$

که در آن $P_n(\cos \theta)$ ، چندجمله‌ای‌های لژاندر هستند. با اعمال شرایط مرزی ثابت‌های عددی

^۱ این موضوع در کتاب‌های ریاضی بصورت مفصل بررسی شده است [۵۲].

بدست خواهند آمد. جواب نهایی بصورت زیر است:

$$\phi(r, \theta) = A_0 + v r \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} (u + v) \cos \theta. \quad (48.3)$$

در این رابطه A_0 ، یک ثابت عددی است. این ثابت می‌تواند وابسته به زمان باشد. دقت کنید که ترکیب $u + v$ که در رابطه‌ی بالا ظاهر شده است، مقدار سرعت نسبی کره و شاره در نواحی خیلی دور است. قابل توجه است که در جواب نهایی دو سرعت u و v بصورت متقارن ظاهر نشده‌اند. این موضوع به دستگاه انتخاب شده بستگی دارد. جواب بالا را در دو حالت خاص بیشتر بررسی می‌کنیم. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که کره ساکن و جریان از منبع جریان با سرعت ثابت واقع در بی‌نهایت تولید می‌شود. در این حالت، شارشی پایا داریم. در حالت دوم، منبع جریان واقع در بی‌نهایت را خاموش و کره را متحرک می‌گیریم. در این حالت دوم، جریان ناپایا است. در حقیقت شکل میدان سرعت و خطوط میدان، کاملاً به دستگاه مختصات وابسته است. میدان شارش و خطوط جریان مربوطه را برای این دو حالت مختلف در شکل ۱۳.۳ رسم کرده‌ایم.

آیا از طرف شاره، نیرویی به کره‌ی متحرک وارد می‌شود؟ انتظار داریم، در مورد نیرو، تنها سرعت نسبی بین شاره و کره مهم باشد. مقدار نیرو از دید تمامی ناظرهای لخت یکی است. برای تحقیق این موضوع و البته محاسبه‌ی نیرو، اجازه دهید مسأله را در دو حالت خاصی که در بالا معرفی شد، بررسی کنیم.

الف: ابتدا مسأله‌ی کره‌ی ساکن را در نظر می‌گیریم. در این حالت $u = 0$ است و میدان سرعت اطراف کره به حالت پایا رسیده است. میدان سرعت برابر است با:

$$u_r = v \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \cos \theta, \quad u_\theta = -v \left(1 + \frac{a^3}{2r^3}\right) \sin \theta, \quad u_\phi = 0.$$

اکنون می‌خواهیم نیرویی که از جانب شاره به این کره وارد می‌شود را محاسبه کنیم. برای این منظور ابتدا میدان فشار را بدست آورده و با انتگرالگیری روی سطح کره، نیرو را بدست می‌آوریم. یک نقطه‌ی دلخواه روی سطح کره با مختصات زاویه‌ای θ را در نظر بگیرید. با استفاده از قضیه‌ی برنولی و مقایسه‌ی مشخصات سرعت و فشار در این نقطه با یک نقطه در بی‌نهایت، میدان فشار

بدست می‌آید:

$$P(r = a, \theta) = P_{\infty} + \frac{1}{4}\rho v^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right), \quad (49.3)$$

که در آن فشار در نقاط خیلی دور و یک عدد ثابت است. برای سهولت بازهم از اثرهای مربوط به گرانش صرف‌نظر کرده‌ایم. نیروی وارد بر کره برابر است با:

$$\mathbf{F} = - \oint P(a, \theta) d\mathbf{s}. \quad (50.3)$$

از تقارن، مشخص است که مؤلفه‌های $\hat{x}$ و $\hat{y}$ نیرو صفر هستند. پس مؤلفه‌ی $\hat{z}$ آنرا بررسی می‌کنیم. این مؤلفه‌ی نیرو برابر است با $F_z = - \oint P(a, \theta) \cos \theta ds$ ، که آنرا دقیق‌تر بررسی می‌کنیم. با اندکی محاسبه می‌بینیم که $F_z = 0$. بنابراین هیچ نیرویی از طرف شاره به کره وارد نمی‌شود. به نظر شما چرا هیچ نیرویی به کره وارد نمی‌شود؟

پیش از توصیف علت صفر شدن نیرو، آموزنده است تا همین نتیجه را در دستگاه مختصاتی که کره در آن حرکت می‌کند، بررسی کنیم. برای این منظور حالت $v = 0$ را در نظر بگیرید. شاره ساکن است و کره در آن حرکت می‌کند. مؤلفه‌های مختلف سرعت در دستگاه قطبی کروی به شکل زیراند:

$$u_r = -\frac{a^3}{r^3} u \cos \theta, \quad u_{\theta} = -\frac{a^3}{2r^3} u \sin \theta, \quad u_{\phi} = 0.$$

دقت کنید در این مورد، میدان سرعت شاره به حالت پایا نمی‌رسد و تمام کمیات با زمان تغییر می‌کنند. در این صورت پتانسیل ϕ با زمان تغییر می‌کند. شکل تعمیم یافته‌ی قضیه‌ی برنولی برای شارش‌های ناپا به صورت زیر است^۱:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 = \text{ثابت}. \quad (51.3)$$

برای محاسبه‌ی تغییرات زمانی پتانسیل، دقت کنید که نتایج بالا در دستگاهی ارائه شده‌اند که بصورت لحظه‌ای منطبق بر مرکز کره است. پس:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = u \frac{\partial}{\partial z} \phi. \quad (52.3)$$

^۱ به سؤالات انتهای فصل مراجعه شود.

اکنون مثل قبل، رابطه‌ی برنولی را برای یک نقطه‌ی دلخواه و نقطه‌ای در بی‌نهایت می‌نویسیم تا بتوانیم میدان شتاب را بدست آوریم. ادامه‌ی محاسبات سراسر است. نتیجه‌ی نهایی هم، مطابق انتظار است. تازمانی که سرعت‌های u و v ، مستقل از زمان هستند، تفاوت دو حالت، تنها اختلاف بین دو ناظر لخت است. پس در هر دو صورت هیچ نیرویی به کره وارد نمی‌شود. برای درک علت صفر شدن نیرو، اجازه دهید فرض کنیم یک نیروی متناهی از طرف شاره به کره وارد می‌شود. این نیروی غیر صفر چه اثری خواهد داشت؟ در واقع، اگر نیرویی خالصی از طرف شاره به کره وارد شود، این نیرو باعث تغییر سرعت کره می‌شود. پس برای اینکه سرعت کره ثابت بماند، باید ما نیز نیرویی به آن اعمال کنیم. اعمال نیرو یعنی تزریق انرژی به سیستم، چون انرژی خالصی به بی‌نهایت نمی‌رسد پس باید تمام انرژی تزریق شده در شاره تلف شود. از آنجا که شارش را پایستار فرض کرده‌ایم، اتلاف امکان پذیر نیست. به بیان دیگر نیرویی نباید به کره وارد شود، زیرا شارش را پایستار فرض کرده‌ایم.

کره با حرکت شتابدار

اگر حرکت کره از ابتدا با شتاب مشخص و غیر صفر شروع شود، چه اتفاقی می‌افتد؟ آیا باز هم نیرو صفر است؟ کره‌ای را در نظر بگیرید که درون یک شاره‌ی اویلری ساکن حرکت می‌کند. با اعمال نیروی خارجی، این کره شتاب می‌گیرد. در این شرایط، می‌خواهیم ببینیم چه نیرویی از طرف شاره به کره وارد می‌شود. برای سهولت فرض می‌کنیم که حرکت کره در لحظه‌ی $t = 0$ و از حالت سکون شروع شود:

$$u(t=0) = 0, \quad \frac{d}{dt}u(t=0) \neq 0, \quad (53.3)$$

و البته سرعت شاره در نقاط بسیار دور هم صفر است ($v=0$). از محاسبات قبلی، پتانسیل غیر پایای این مسئله برابر است با:

$$\phi(r, \theta; t) = \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^2} u(t) \cos \theta, \quad (54.3)$$

تغییرات زمانی پتانسیل بصورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi = \frac{1}{4} \frac{a^3}{r^2} \frac{d}{dt} u(t) \cos \theta, \quad (55.3)$$

با استفاده از شکل تعمیم یافته‌ی قضیه‌ی برنولی و در زمان $t = 0$ ، فشار یک نقطه‌ی دلخواه روی کره را بدست می‌آوریم:

$$P(r = a, \theta; t = 0) = P_{\infty} - \frac{1}{4} \rho u^2(r = a, \theta) - \rho \frac{\partial}{\partial t} \phi(r = a, \theta), \quad (56.3)$$

حال با در دست داشتن فشار، نیرو را محاسبه می‌کنیم. با توجه به تقارن سمتی که در این مسأله داریم، مؤلفه‌ی z نیرو، غیر صفر است. با اندکی محاسبه نتیجه‌ی نهایی بصورت زیر به دست می‌آید:

$$F_z = - \oint P \cos \theta ds = \frac{1}{4} m' \frac{d}{dt} u, \quad (57.3)$$

که در آن m' ، جرم شاره‌ی جابجا شده یا شاره‌ی هم حجم کره است. جالب است که نیروی وارد شده از طرف شاره از نوع نیروهای لختی و متناسب با شتاب است. دقت کنید که کار انجام شده توسط این نیرو صفر است. به بیان دیگر، غیر صفر شدن نیرو ارتباطی با اتلاف ندارد. اکنون اگر کره‌ی غوطه‌ور در شاره‌ی اویلری، تحت اثر نیروی خارجی $\mathbf{f}^{ext}$ باشد، معادله‌ی حرکت نیوتن برای آن به شکل زیر در می‌آید:

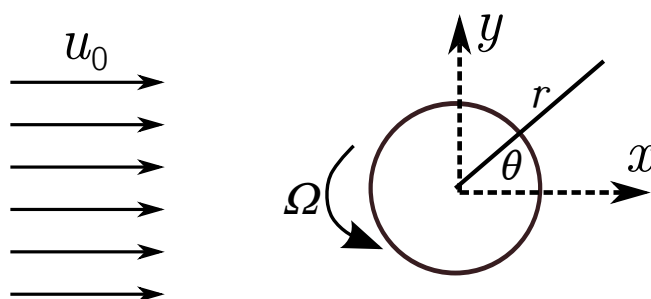
$$\mathbf{f}^{ext} = (m + \frac{1}{4} m') \mathbf{a}. \quad (58.3)$$

یعنی حرکت شتاب دار یک کره به جرم m درون یک شاره اویلری، مثل حرکت یک کره با جرم یا لختی موثر $M = m + \frac{1}{4} m'$ است. لختی موثر کره‌ی غوطه‌ور در شاره‌ی اویلری، اندکی بزرگتر از لختی آن در خلا است.

۸.۳ استوانه‌ی چرخان و نیروی مگنوس

در قسمت قبلی، نشان دادیم که از طرف شارش اویلری هیچ نیرویی به کره‌ای که با سرعت انتقالی ثابت حرکت می‌کند وارد نمی‌شود. این موضوع نتیجه‌ی مستقیمی از پایستار بودن شارش است. اگر جسم متحرک، دارای حرکت چرخشی باشد، چطور؟ توپ‌هایی که در هوا پرتاب می‌شوند، اگر با سرعت چرخشی اولیه پرتاب شوند، در مسیر خمیده حرکت می‌کنند. این موضوع را احتمالاً بیشتر ما در بازی با توپ‌های فوتبال، والیبال یا تنیس تجربه کرده‌ایم. در واقع بازیگر خوب، سعی

در استفاده‌ی بهینه از این پدیده می‌کند تا با فریبِ رقیب، نتیجه‌ی بازی را به سود خود تمام کند. منشأ این نیروی اسرار آمیز کجاست؟ به نظر نمی‌رسد این نیرو منشأ ناپایستاری و اتلاف داشته باشد. در واقع در بیشتر تجربه‌های روزمره که با توپ‌های مختلف صورت می‌گیرد، اصطکاک هوا بسیار ناچیز است. پیش از آنکه انرژی حرکتی توپ به اندازه‌ی قابل ملاحظه‌ای تلف شود، انحراف و یا همان نیروی اسرار آمیز خود را به نمایش می‌گذارد.



شکل ۱۴.۳ طرحی از مقطع یک استوانه که در یک جریان یکنواخت خارجی قرار دارد. استوانه حول محور طولی خود می‌چرخد و راستای جریان خارجی نیز عمود بر محور استوانه است.

ارائه‌ی پاسخی دقیق برای این موضوع، بسیار پیچیده است [۴۹]. آنچه اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم، ارائه‌ی تصویری بسیار ساده شده از این پدیده است. یک استوانه را در نظر می‌گیریم که در یک شارش یکنواخت خارجی قرار دارد. این استوانه حول محور طولی خود می‌چرخد. نیروی وارد بر این استوانه دقیقاً برابر است با نیروی وارد بر استوانه‌ی چرخانی که حرکت انتقالی با سرعت انتقالی برابر با سرعت شارش یکنواخت دارد.

این مسأله‌ی ساده شده را نیز در دو مرحله بررسی می‌کنیم. ابتدا میدان اطراف یک استوانه‌ی ساکن که در جریان یکنواخت $u_0 \hat{x}$ قرار دارد را بدست می‌آوریم. مطابق شکل ۱۴.۳، طول استوانه نامتناهی، شعاع آن a و راستای طولی آن در جهت $\hat{z}$ است. جهت شارش در راستای عمود بر محور استوانه است. برای محاسبه‌ی میدان سرعت اطراف استوانه، به حل عمومی معادله‌ی لاپلاس در مختصات استوانه‌ای نیاز داریم. بخاطر تقارن انتقالی در راستای استوانه، پتانسیل مستقل از مؤلفه‌ی z است و تنها به مختصه‌های r و θ استوانه‌ای بستگی دارد. کلی‌ترین

جواب معادله‌ی لاپلاس به شکل زیر است^۱:

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) = c_1 + c_2 \ln(r) + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta)) r^n + \\ + (C_n \sin(n\theta) + D_n \cos(n\theta)) r^{-n}. \quad (59.3) \end{aligned}$$

شرایط مرزی این مسأله بصورت زیرند:

$$\mathbf{u} \cdot \hat{r}|_{r=a} = 0, \quad \mathbf{u}|_{r \rightarrow \infty} = u_0 \hat{x}.$$

با اعمال این شرایط مرزی به جواب کلی ۵۹.۳، ثابت‌های عددی پتانسیل به دست می‌آیند. جواب نهایی پتانسیل با اندکی محاسبه به صورت زیر می‌شود:

$$\phi(r, \theta) = u_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta. \quad (60.3)$$

این پتانسیل یک شارش یکنواخت است که به یک استوانه‌ی ساکن برخورد می‌کند. اکنون به ساده‌ترین شکل اثر چرخان بودن استوانه را وارد می‌کنیم. هرچند شارش را پایستار فرض کرده‌ایم ولی همیشه در عمل مقدار بسیار کمی از چسبندگی شاره، باعث انتقال چرخش استوانه به شاره می‌شود. می‌خواهیم فرض کنیم چرخش ایجاد شده در شاره از نوع گردش‌دار ایده‌آل است. در مختصات استوانه‌ای میدان سرعت گردش‌دار ایده‌آل بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u} = \frac{K}{2\pi} \frac{1}{r} \hat{\theta}, \quad (61.3)$$

که در آن K ، قدرت گردش‌دار است. برای درک مفهوم شهودی گردش‌دار، کافیه از میدان سرعت روی یک مسیر دلخواه و بسته حول محور گردش‌دار انتگرال بگیریم: $\oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = K$. برای گردش‌دار که به صورت بالا تعریف شده، می‌توانید تحقیق کنید که: $\nabla \times \mathbf{u} = K \delta(x) \delta(y) \hat{z}$. تاو مربوط به این شارش، به جز روی محور گردابه، در تمام نقاط فضا صفر است. با توجه به این که این میدان در نقاط خارج محور چرخشی نیست پس می‌توانیم آنرا از یک

^۱ به کتاب‌های ریاضی فیزیک مراجعه شود [۵۲].

پتانسیل اسکالر بدست آوریم. با انجام محاسبات در مختصات استوانه‌ای درمی‌یابیم که این پتانسیل اسکالر بصورت زیر است:

$$\phi(r, \theta, z) = \frac{K}{2\pi} \theta. \quad (۶۲.۳)$$

این پتانسیل تک مقدار نیست ولی به درستی میدان سرعت یک گردش را می‌دهد. اکنون میدان سرعت اطراف استوانه‌ی چرخانی که در یک شارش یکنواخت قرار دارد، از برهم‌نهی دو مسأله‌ی اخیر بدست می‌آید:

$$\phi(r, \theta) = u_{\infty} \left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos \theta + \frac{K}{2\pi} \theta, \quad (۶۳.۳)$$

که در آن قدرت گردش بصورت $K = 2\pi a^2 \Omega$ ، به فرکانس چرخشی استوانه Ω ، بستگی دارد. هندسه‌ی این مسأله در شکل ۱۴.۳، نشان داده شده است. حال با استفاده از قضیه‌ی برنولی، میدان فشار در یک نقطه‌ی دلخواه روی استوانه را بدست می‌آوریم. در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$P(r = a, \theta) = P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{2u_{\infty} K}{\pi a} \sin \theta - \frac{K^2}{4\pi^2 a^2} \right). \quad (۶۴.۳)$$

اکنون با در دست داشتن فشار و با انتگرال‌گیری روی سطح، نیروی وارد بر استوانه بدست می‌آید:

$$\mathbf{F} = - \oint P d\mathbf{s}. \quad (۶۵.۳)$$

با توجه به تقارن، مؤلفه‌ی z نیرو، یعنی مؤلفه‌ی آن در جهت طولی استوانه، صفر است. دو مؤلفه‌ی دیگر را محاسبه می‌کنیم. با اندکی محاسبه به جواب زیر می‌رسیم:

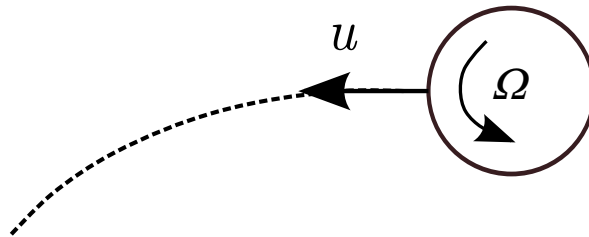
$$F_x = 0, \quad F_y = -\rho K u_{\infty} L,$$

که در آن طول استوانه را با L نشان داده‌ایم. دقت کنید که جریان فرودی در راستای $\hat{x}$ بوده و نیروی کل تنها در راستای $\hat{y}$ ، یعنی عمود بر راستای جریان فرودی مؤلفه‌ی غیر صفر دارد. به این

نیرو که تمایل دارد حرکت جسم چرخان را در جهت عمود بر سرعت جریان منحرف کند، نیروی مگنوس گفته می‌شود. در حالت کلی، اگر چرخش استوانه با بردار سرعت زاویه‌ای Ω داده شده باشد، نیروی مگنوس بر واحد طول برابر است با:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{F}}{L} = \rho \mathbf{u}_\infty \times \Omega. \quad (۶۶.۳)$$

این نیرو که همواره در جهتی عمود بر سرعت شارش یکنواخت است، تنها باعث خمیده شدن مسیر می‌شود. کار انجام شده توسط این نیرو صفر است در نتیجه انرژی را پایسته نگاه می‌دارد. هرچند محاسبه‌ی انجام شده برای یک جسم استوانه‌ای شکل بود ولی در حالت کلی و برای هر جسم دلخواه که با سرعت خطی $\mathbf{u}$ و سرعت زاویه‌ای Ω درون یک شارهی اویلری حرکت می‌کند، انتظار داریم یک نیروی منحرف کننده در راستای $\Omega \times \mathbf{u}$ بر جسم چرخان اثر کند. در شکل ۱۵.۳، یک تصویر ساده از مسیر منحرف شده نشان داده شده است.



شکل ۱۵.۳ مسیر یک جسم چرخان که در یک شارهی اویلری قرار دارد، در راستای $\Omega \times \mathbf{u}$ منحرف می‌شود. که در آن Ω بردار چرخش زاویه‌ای جسم و $\mathbf{u}$ بردار سرعت انتقالی جسم است.

۹.۳ شارش دوبعدی، تکنیک مختلط

با کمک روش‌های مختلط می‌توانیم بسیاری از مسایل دو بعدی شارش پتانسیل را حل کنیم. در بخش‌های پیشین، تابع جریان Ψ و تابع پتانسیل ϕ را برای شارش دو بعدی بدون چرخش تعریف کردیم. میدان شارش دو بعدی برحسب تابع پتانسیل و تابع جریان به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{u} = (u, v) = (\partial_x \phi, \partial_y \phi) = (\partial_y \Psi, -\partial_x \Psi) = \hat{z} \times (\partial_x \Psi, \partial_y \Psi).$$

اصل موضوع که کمک می‌کند تا از روش‌های مختلط استفاده کنیم این است که: در صفحه‌ی مختلط با مختصات $z = x + iy$ تابع مختلط که به صورت $g(z) = \phi + i\Psi$ تعریف می‌شود، یک تابع تحلیلی است.^۱

پس هر تابع تحلیلی که در صفحه‌ی مختلط در نظر بگیریم، می‌تواند نمایشگر میدان سرعت یک شارش پتانسیلی باشد. از اینجا می‌توانیم دسته‌ی بزرگی از شارش‌ها را با انتخاب توابع تحلیلی مختلف بدست آوریم، تنها کافیست تحقیق کنیم هر تابع تحلیلی متناظر با چه شرایط مرزی است. می‌توانیم نشان دهیم که برای تابع تحلیلی که به صورت بالا تعریف کردیم:

$$\frac{d}{dz}g(z) = u - iv.$$

ساده‌ترین مثال، تابع تحلیلی $g(z) = (a - ib)z$ است که در آن a و b دو ثابت‌اند. با محاسبه‌ی مشتق این تابع تحلیلی، به سهولت می‌بینیم که این تابع تحلیلی متناظر با یک میدان شارشی ثابت با مولفه‌های $\mathbf{u} = (a, b)$ است.

مثال دوم تابع تحلیلی $g(z) = \frac{K}{4\pi} \log(z - z_0)$ است. این تابع تحلیلی میدان سرعت یک گردش‌دار ایده‌آل که در نقطه‌ای به مختصات $(\Re z_0, \Im z_0)$ واقع است را نشان می‌دهد. برای مثال بعدی، تابع تحلیلی $g(z) = \alpha z^2$ را در نظر بگیرید. این تابع تحلیلی میدان سرعتی به صورت زیر به دست می‌دهد:

$$\frac{d}{dz}g(z) = 2\alpha z = u - iv \longrightarrow u = 2\alpha x, \quad v = -2\alpha y,$$

^۱ تابع مختلط $f(z)$ را در نظر بگیرید. این تابع تحلیلی است اگر مشتق آن $\frac{d}{dz}f(z)$ تعریف شده باشد. می‌توان نشان داد که برای تابع تحلیلی باید شرایط کوشی-ریمن به صورت $\partial_x \Re f = \partial_y \Im f$, $\partial_y \Re f = -\partial_x \Im f$ برقرار باشند. در نتیجه برای یک تابع تحلیلی، مشتق‌گیری در صفحه‌ی مختلط به راستا وابسته نیست.

مولفه‌ی x سرعت روی محور y صفر و مولفه‌ی y سرعت روی محور x هم صفر است. پس این میدان سرعت را می‌توانیم متناظر با میدان شارشی در فضای بین دو صفحه‌ی متقاطع با زاویه‌ی $\pi/2$ در نظر بگیریم که صفحات روی محورهای x و y قرار دارند (ناحیه‌ی اول صفحه‌ی مختصات). یادآوری می‌شود که در مورد شارش اولیه‌ی، شرط مرزی تنها به مولفه‌ی عمودی سرعت روی سطوح صلب اعمال می‌شود. اگر تنها یک صفحه‌ی صلب روی کل محور x داشته باشیم و جریان از بالا و به صورت متقارن (متقارن نسبت و چپ و راست) به این صفحه تابانده شود، میدان شارش در ناحیه‌ی بالای صفحه (ناحیه‌ی اول و دوم صفحه‌ی مختصات) باز هم توسط تابع تحلیلی بالا توصیف می‌شود. دقت کنید که در این حالت بنا به تقارن انتظار داریم، مولفه‌ی عمودی سرعت روی محور y صفر باشد.

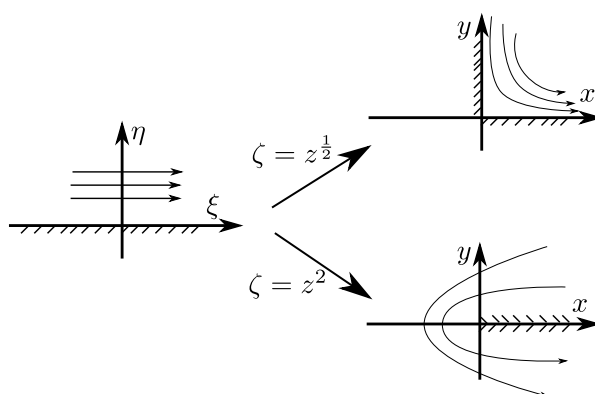
یکی دیگر از توابع تحلیلی که شارش دوقطبی چشمه-چاه را می‌رساند به صورت $g(z) = \frac{-p}{z-z_0}$ است. این تابع، شارش یک دوقطبی به قدرت p را که در نقطه‌ی z_0 و موازی با محور x است را نشان می‌دهد. مثال‌های بسیاری از توابع تحلیلی می‌توان برشمرد که در مساله‌ی شارشی می‌توانند مفید باشند. در اینجا تنها به برخی از آنها اشاره شده است.

نگاشت‌های همدیس

تابع تحلیلی $\zeta = F(z)$ را می‌توانیم به صورت یک نگاشت همدیس از صفحه‌ی مختلط $z = (x, y)$ به صفحه‌ی مختلط $\zeta = (\xi, \eta)$ در نظر بگیریم. توابع تحلیلی منحنی‌های فضای z را به منحنی‌هایی با شکل‌هایی دیگر در فضای ζ تبدیل می‌کنند. اگر تصور کنیم که منحنی‌های مورد بحث، مرزهای یک مساله‌ی شارشی باشند، می‌توانیم از این موضوع برای محاسبه‌ی شارش در حضور مرزهای پیچیده استفاده کنیم. این موضوع وقتی قابل اجرا است که بتوانیم تبدیل هم‌دیس پیدا کنیم که مرزهای مساله‌ی اصلی را به مرزهای ساده‌تری تبدیل کنند. یک نگاشت، هم‌دیس است به این معنی که زوایه‌ها و نسبت‌های طولی را حفظ می‌کند: دو نمو بی‌نهایت کوچک δz_1 و δz_2 را حول یک نقطه‌ی دلخواه z_0 در نظر بگیرید. نگاشتی که توسط تابع $F(z)$ تعریف شده، نقطه‌ی z_0 را به ζ_0 تبدیل می‌کند و نمو‌های δz_1 و δz_2 را به ترتیب به $\delta \zeta_1$ و $\delta \zeta_2$ تبدیل می‌کند. برای این تبدیل‌ها، می‌توان نشان داد که نسبت طول‌های این نمو‌های بی‌نهایت

کوچک و زاویه‌ی بین آنها ثابت می‌ماند.

نگاشت همدیس $\zeta = F(z) = z^n$ رادر نظر بگیرید. آنطور که گفته شد، تابع تحلیلی $g(\zeta) = \zeta$ متناظر با میدان شارشی یکنواخت در صفحه‌ی ζ است. مثلاً شارشی در راستای ξ است که توسط صفحه‌ی $\eta = 0$ محصور شده است.



شکل ۱۶.۳

در شکل زیر برای دو مورد $1/2$ ، 2 نشان داده‌ایم که نگاشت تحلیلی مورد بحث چطور مرز را به مرز جدید تبدیل می‌کند. برای پیدا کردن تبدیل‌ها از روابط زیر استفاده کنید:

$$\zeta = Re^{i\Theta}, \quad z = re^{i\theta} \longrightarrow r = R^{1/n}, \quad \theta = \Theta/n.$$

اجازه دهید به حالت کلی برگردیم. نگاشت همدیس، تابع پتانسیل شارشی را از $g(\zeta)$ در صفحه‌ی ζ به $g(F(z))$ در صفحه‌ی z تبدیل می‌کند: پس اندازه‌ی سرعت، در نگاشت همدیس ثابت نمی‌ماند و به اندازه‌ی فاکتور تغییر مقیاس‌ها، افزوده می‌شود:

$$\frac{dg}{d\zeta} = \frac{dg}{dz} \times \frac{dz}{d\zeta}.$$

البته، علی‌رغم تغییر اندازه‌ی سرعت، انرژی جنبشی کل شارش پایسته می‌ماند.

آموخته است که توجه کنید، دینامیک شارشی تحت تبدیلات همدیس ناوردا نیست. یک عنصر شاره در نقطه‌ی z_1 را در نظر بگیرید. بعد از گذر زمان δt ، این ذره به نقطه‌ی z_2

اکنون تصویر نقاط z_0 و z_1 را به ترتیب با ζ_0 و ζ_1 نشان می‌دهیم. در فضای ζ ، ذره ابتدا در ζ_0 است ولی بعد از گذر زمان بی‌نهایت کوچک به نقطه‌ی جدید ζ_1 می‌رسد که بر نقطه‌ی ζ_0 منطبق نیست. نشان دهید تفاوت مکانی این دو نقطه برابر است با:

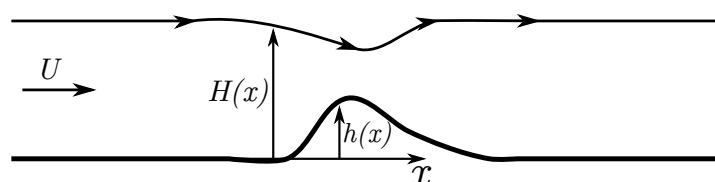
$$\delta t \frac{dg^*}{dz^*} \left(\frac{d\zeta}{dz} - \frac{dz^*}{d\zeta^*} \right).$$

پرسش‌ها

۱.۳ یک چشمه‌ی نقطه‌ای جریان به قدرت Q را در نظر بگیرید که در فاصله‌ی d از یک صفحه‌ی صلب و ساکن قرار دارد. میدان سرعت شارش ناشی از این چشمه‌ی نقطه‌ای و نیروی وارد بر صفحه را بدست آورید.

۲.۳ دو صفحه‌ی صلب و ساکن را در نظر بگیرید که همدیگر را با زاویه‌ی قائمه قطع کرده‌اند. یک چشمه‌ی نقطه‌ای جریان به قدرت Q در فاصله‌ی d از این گوشه و بصورت متقارن قرار دارد. میدان سرعت شارش را در فضا بدست آورید.

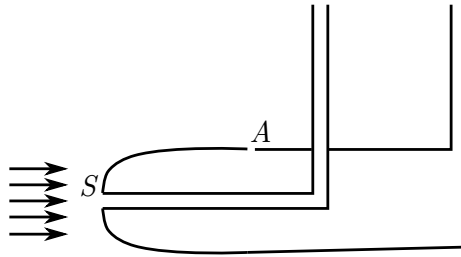
۳.۳ مطابق شکل ۱۷.۳، یک مانع در کف کانالی که آب در آن جاریست، ایجاد می‌کنیم. شکل ارتفاع مانع، با تابع $h(x)$ داده شده است. با استفاده از رابطه‌ی برنولی، تغییرات ارتفاع سطح خارجی و آزاد آب، یعنی تابع $H(x)$ را بدست آورید. بیشترین کاهش ارتفاع در چه شرایطی بدست می‌آید. توضیح دهید چطور از این ابزار برای اندازه‌گیری نرخ شارش استفاده می‌کنید. شارش را بسیار آرام و اندازه‌ی سرعت را برابر با U بگیرید.



شکل ۱۷.۳ مانع کف کانال ارتفاع سطح آزاد جریان را تغییر می‌دهد.

۴.۳ لوله‌ی پیتو وسیله‌ای برای اندازه‌گیری سرعت شارش است. مطابق شکل ۱۸.۳، این وسیله از دو استوانه‌ی هم محور تشکیل شده است. سرِ باز یکی از لوله‌ها (سرِ S لوله‌ی درونی) در جلوی شارش قرار داده می‌شود. روی یک دایره و در سطح جانبی لوله‌ی بیرونی مجموعه‌ای از سوراخ‌های کوچک قرار گرفته‌اند (نقطه‌ی A یکی از این سوراخ‌ها است). دو انتهای خروجی هر دو استوانه به یک فشار سنج متصل هستند، تا اختلاف

فشار بین آنها اندازه گرفته شود. سرعت شارش را بر حسب اختلاف فشار دوسر لوله محاسبه کنید.



شکل ۱۸.۳ لوله‌ی پیتو وسیله‌ای برای اندازه‌گیری سرعت شارش است.

۵.۳ دو چشمه‌ی نقطه‌ای به قدرت‌های Q ، $-Q$ را در نظر بگیرید که به فاصله‌ی $2d$ از هم و روی محور x واقع شده‌اند. میدان سرعت این سیستم را بدست آورید. نشان دهید با انتخاب: $\frac{Qd}{4\pi} = \frac{va^2}{4}$ ، نتیجه‌ی بدست آمده دقیقاً با میدان سرعت یک گره که با سرعت $v\hat{x}$ حرکت می‌کند، برابر است.

۶.۳ آیا برای شارش غیرچرخشی و ناپایا می‌توان از مفهوم پتانسیل استفاده کرد؟ در این صورت توضیح دهد شکل تعمیم یافته‌ی رابطه‌ی برنولی چه تغییری می‌کند.

۷.۳ دو صفحه‌ی متقاطع که با هم زاویه‌ی α می‌سازند را در نظر بگیرید. شارش پتانسیلی در نزدیکی‌های این گوشه چگونه است؟ راهنمایی: معادله‌ی لاپلاس در مختصات استوانه‌ای را حل کنید و شرایط مرزی دو صفحه را اعمال کنید. دقت کنید که شارش هیچ مؤلفه‌ای نزدیک گوشه ندارد و در راستای طولی خط تقاطع تقارن داریم.

۸.۳ یک حفره‌ی کروی به شعاع R و بصورت آبی درون یک شاره‌ی اویلری تراکم ناپذیر ایجاد می‌کنیم. زمان لازم برای پر شدن این حفره را محاسبه کنید. راهنمایی: شارش ایجاد شده دارای تقارن کروی است. میدان سرعت را به صورت $\mathbf{u} = u\hat{r}$ بگیرید. معادله‌ی اویلر به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t}u + u\frac{\partial}{\partial r}u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}P.$$

معادله‌ی پیوستگی را نیز نوشته و سعی در حل آنها کنید. با به دست آوردن میدان سرعت

می‌توانید زمان لازم برای پر شدن کره را محاسبه کنید.

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

شارش تراکم پذیر

انتشار صوت مهم‌ترین پدیده‌ای است که از تراکم پذیری مواد نتیجه می‌شود. در این بخش بصورت مختصر انتشار امواج صوتی را معرفی می‌کنیم. سپس به برخی پدیده‌های فراصوتی هم می‌پردازیم. تراکم‌پذیری شارش در حرکت مافوق صوت اجسام پرنده، با ظهور موج شوک، افزایش نسبی نیروی بالابر و القای نیروی کششی همراه است.

۱.۴ تراکم پذیری

برای مطالعه‌ی پدیده‌های مرتبط با تراکم پذیری، لازم است تا میزان تراکم پذیری شاره از طریق معادلات ترمودینامیکی داده شود. معادله‌ی حالت، یعنی رابطه‌ای که تغییرات حجم سامانه در پاسخ به تغییرات فشار را بیان می‌کند، مهم‌ترین رابطه‌ای است که میزان تراکم پذیری را مشخص می‌کند. تابع پاسخ مکانیکی یک سامانه‌ی ترمودینامیکی که بصورت $\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}$ تعریف می‌شود، به تراکم‌پذیری موسوم است و از طریق روش‌های آزمایشگاهی قابل اندازه‌گیری است. تراکم پذیری یک سامانه، تابعی از فشار و دما است و لزوماً یک عدد ثابت نیست. علاوه بر تراکم‌پذیری که در بالا بصورت پاسخ مکانیکی سامانه تعریف شد، کمیت دیگری

نیز که بصورت $c = \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}}$ تعریف می شود اطلاعات تراکم پذیری سامانه را بازگو می کند. در بخش بعدی می بینیم که این کمیت به سرعت صوت ارتباط دارد. توجه کنید که سرعت صوت و تراکم پذیری بصورت $c = \sqrt{1/\rho\chi}$ به هم مربوط هستند. آنچنانکه که پیداست، تراکم پذیری و c وابسته به شرایط اند، آزمایش در دمای ثابت انجام شود یا در شرایط بی دررو. تصور نیوتن این بود که انتشار صوت در دمای ثابت انجام می شود به همین دلیل تخمین عددی کمتری برای سرعت صوت در هوا بدست می آورد. اولین بار لاپلاس متوجه شد که انتشار صوت در شرایط بی دررو انجام می شود.

گاز ایده آل که برای گازهای رقیق مدل ترمودینامیکی مناسبی است، کمک می کند تا درک بهتری از اتفاقات داشته باشیم. معادله ی حالت گاز ایده آل بصورت $P = \rho k_B T / M_m$ که در آن M_m جرم هر مولکول و $k_B T$ انرژی گرمایی است. از طرف دیگر برای گاز ایده آل در شرایط بی دررو رابطه ای به شکل ثابت $P\rho^{-\gamma} =$ برقرار است که در آن $\gamma = c_P/c_V$. با محاسبه ای سرراست، تراکم پذیری همدمما و بی دررو بصورت زیر می شود:

$$\chi_T = \frac{1}{P}, \quad \chi_s = \frac{1}{\gamma P}.$$

اندیس s نشان دهنده ی این است که فرآیند مورد نظر در شرایط بی دررو و آنتروپی ثابت صورت می گیرد. با استفاده از تراکم پذیری بی دررو، سرعت صوت بصورت زیر می شود:

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{M_m}}.$$

برای تخمین عددی تصور کنید که هوا خالص و تنها از مولکول های اکسیژن با $\gamma = 3/2$ و $M_m \sim 32 \times 1/6 \times 10^{27} \text{ Kg}$ تشکیل شده باشد. از طرف دیگر در دمای اطاق داریم: $k_B T \sim 2 \times 10^{-21} \text{ J}$. با در نظر گرفتن این اطلاعات مرتبه ی بزرگی سرعت صوت بصورت $c_s \sim 300 \text{ m/s}$ می شود که بسیار به مقدار تجربی نزدیک است.

۲.۴ دینامیک بی‌دررو

معادلات عمومی توصیف کننده‌ی یک شارش بدون اتلاف و تراکم پذیر بصورت زیر است:

$$\rho(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla P, \quad \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad P = P(\rho, s). \quad (۱.۴)$$

توجه کنید که برای شارهی تراکم پذیر، میزان تراکم پذیری از طریق معادله‌ی حالت، یعنی رابطه‌ای که فشار را به چگالی و آنتروپی مربوط می‌کند، داده می‌شود. این‌ها معادلات اساسی هستند که قادرند انتشار صوت را توصیف کنند. اشاره شد که انتشار صوت را می‌توانیم بصورت یک فرآیند بی‌دررو در نظر بگیریم به همین دلیل معادله‌ی حالت را بصورتی در نظر گرفته‌ایم که صریحا شرایط بی‌دررو را شامل شود. می‌خواهیم نشان دهیم برای فرآیندهای سریعی که بی‌دررو هستند، آنتالپی نقش انرژی را ایفا می‌کند. آنتالپی و آنتروپی بر واحد جرم را به ترتیب با h و s نشان می‌دهیم. در یک فرآیند ترمودینامیکی عمومی در دمای T می‌دانیم که: $dh = Tds + (\frac{1}{\rho})dP$. با مقایسه‌ی این رابطه با اولین رابطه از معادله‌ی ۱.۴، می‌بینیم که:

$$(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla h.$$

برای یک شارش پایا، اگر مولفه‌ی رابطه‌ی بالا روی یک خط جریان را در نظر بگیریم، می‌بینیم که: $\partial_t(\frac{1}{2}u^2 + h) = 0$. پس روی یک خط جریان، ترکیب $\frac{1}{2}u^2 + h$ باید ثابت باشد. این رابطه نشان می‌دهد که در شرایط تراکم پذیر، آنتالپی نقش انرژی درونی سیستم را ایفا می‌کند که مجموعه‌ش با انرژی جنبشی می‌تواند پایسته باشد.

آنتالپی از انرژی درونی ϵ بصورت $h = \epsilon + P/\rho$ بدست می‌آید. برای یک گاز ایده‌آل که از مولکول‌های تک اتمی ساخته شده است داریم $\epsilon = \frac{3}{2} \frac{k_B T}{m_M}$ و با استفاده از معادله‌ی حالت خواهیم داشت: $h = \frac{5}{2} \frac{k_B T}{m_M}$. معمولا تمایل داریم برای یک گاز ایده‌آل غیر تک اتمی، انرژی درونی و آنتالپی را بر حسب گرماهای ویژه‌ی واحد جرم در حجم و فشار ثابت بصورت $\epsilon = c_V T$ و $h = c_P T$ بنویسیم. اگر از تعریف $\gamma = c_P/c_V$ استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{RT}{M_{\text{mol}}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{k_B T}{M_m},$$

که در آن R ثابت عمومی گازها و M_{mol} جرم مولی گاز است.

۳.۴ انتشار صوت

ساده‌ترین ابزار تولید صوت یک ورق مرتعش است، مانند همان چیزی که دیافراگم یک بلندگو را می‌سازد. این ورق با دامنه‌ی بسیار کوچکی حرکت رفت‌و برگشتی انجام می‌دهد که با تراکم‌های موضعی شارهای روبرویش همراه می‌شود و این تراکم‌های موضعی در سرتاسر شار منتشر می‌شوند. برای اینکه سازوکار انتشار صوت را بررسی کنیم، اجازه دهید فرض کنیم یک اختلال کوچک در شار ایجاد شده است و ببینیم این اختلال چگونه متحول می‌شود. منظور از اختلال، یک تغییر کوچک در میدان‌های سرعت، چگالی و فشار است. فرض کنید شار ابتدا در حالت سکون با چگالی و فشار یکنواخت باشد. اکنون اختلال‌های دلخواهی بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \delta\rho(\mathbf{x}, t), \quad P(\mathbf{x}, t) = P_0 + \delta P(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} + \delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t).$$

اکنون برای یافتن معادلات دینامیکی که اختلال‌ها در آن صدق می‌کنند، بسط‌های اختلالی بالا را در معادلات اساسی ۱.۴ قرار داده و جملات تا مرتبه‌ی اول اختلال را نگاه می‌داریم. داریم:

$$\rho_0 \partial_t \delta\mathbf{u} = -\nabla \delta P, \quad \partial_t \delta\rho = -\rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{u}. \quad (۲.۴)$$

همچنین معادله‌ی حالت را با معادله‌ی ساده شده‌ای بصورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\delta P = P - P_0 \sim \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho_0, s} \delta\rho = c^2 \delta\rho.$$

برای شارهای وشکسان و رسانای گرما، که انتقال گرما بین اجزای آن می‌تواند رخ دهد، شرط بی‌دررو بودن لزوماً درست نیست. برای سهولت نوشته‌ها، در ادامه از اندیس بی‌دررو بودن استفاده نمی‌کنیم. با ترکیب معادلات بالا، سهولت می‌بینیم که اختلال‌های چگالی و فشار در معادلات زیر صدق می‌کنند:

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) \delta\rho = 0, \quad (\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) \delta P = 0. \quad (۳.۴)$$

اختلال‌های چگالی و فشار در معادله‌ی موج صدق می‌کنند. دیده می‌شود که معادلات بالا پاسخ‌هایی به شکل کاملاً عمومی $\delta P(\mathbf{x}, t) = f(x \pm ct)$ دارند. این جواب‌ها موجی اند

به این معنی که شکل فضایی تابع از دید ناظری که با سرعت $\mp c$ حرکت می‌کند، ثابت دیده می‌شود. پس جواب‌هایی داریم که تحول زمانی آنها مثل یک آشفتگی فضایی روی یک طناب کشیده است که عیناً به سمت راست یا چپ منتقل می‌شود. c سرعت انتشار موج است. یک دسته‌ی خیلی خاص از جواب‌ها را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\delta\rho = \delta\rho_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \quad \delta P = c^2 \delta\rho_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t).$$

این یک موج صوتی ساده و تخت را نشان می‌دهد که در جهت $\hat{n} = \mathbf{k}/k$ منتشر می‌شود. بصورت مستقیم با قرار دادن تابع بالا می‌توان تحقیق کرد که اگر شرط $\omega = ck$ برقرار باشد، این تابع در معادله‌ی موج صدق می‌کند. این موج کسینوسی ساده با دامنه‌ی $\delta\rho_0$ ، فرکانس ω ، راستای انتشار $\hat{n}$ و طول موج $\lambda = 2\pi/k$ مشخص می‌شود. در عمل صوت تولید شده خیلی پیچیده‌تر از این رابطه است ولی ممکن است موج صوتی تک فرکانس یک بلندگوی ساده که در فواصل بسیار و در یک محیط بدون مرز است بصورت تقریبی به جواب بالا شبیه باشد. به این پاسخ موجی ساده، موج تخت گفته می‌شود. از نظر ریاضی نشان داده می‌شود کلی‌ترین پاسخ‌های معادله‌ی موج از ترکیب خطی موج‌های ساده‌ای به شکل بالا که دامنه و فرکانس‌های مختلفی دارند قابل بازسازی است.

باید توجه شود که در تولید یک موج تخت ساده، دامنه، فرکانس و راستای انتشار موج توسط دستگاه موج ساز تعیین می‌شوند. ولی اندازه‌ی طول موج توسط محیط و از طریق رابطه‌ی پاشندگی، یعنی رابطه‌ی بین فرکانس و طول موج، داده می‌شود. برای یک محیط نامتناهی ساکن، رابطه‌ی پاشندگی ساده‌ای بصورت $\lambda = 2\pi/q = 2\pi c/\omega$ برقرار است. حرکت شاره، شرایط هندسی مرزها و جنس محیط می‌توانند رابطه‌ی پاشندگی را تغییر دهند. تا مرتبه‌ی اول اختلال، میدان اختلالی سرعت در معادله‌ی خطی شده‌ی زیر صدق می‌کند:

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} = 0. \quad (4.4)$$

این معادله هم مانند معادلات قبلی رفتار موجی شکلی برای اختلال‌های سرعت در پی دارد. ولی به سبب جزییات برداری آن، باید ملاحظات داشت. با یک مثال ساده می‌توان اصل مطلب را

دریافت نمود. در فضای سه بعدی جوابی به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$\delta u_x = \delta u_0 \cos(kx - \omega t), \quad \delta u_y = \delta u_z = 0.$$

با محاسبات سراسر می‌توان قانع شد که این جواب در معادله‌ی موج سرعت صدق می‌کند به شرطی که $\omega = ck$. این موجی است که در راستای $\hat{x} = k\hat{x}$ منتشر می‌شود و میدان سرعت هم در همان راستای $\hat{x}$ مولفه‌ی غیر صفر دارد. به بیان دیگر معادله‌ی موجی میدان سرعت، تنها موج‌های طولی برای میدان سرعت را مجاز می‌داند. در امواج طولی راستای حرکت ذرات در راستای انتشار موج هستند. دامنه‌ی موج اختلالی سرعت به دامنه‌ی چگالی مربوط است. این موضوع به راحتی با قراردادن جواب‌های موج تخت که در بالا معرفی شدند در معادله‌ی ۲.۴ دیده می‌شود که $\delta u_0 = \delta P_0 / (c\rho_0)$.

نکته‌ی بسیار مهمی که باید به آن توجه کرد محدوده‌ی از سرعت‌هاست که معادلات خطی شده‌ی بالا کارایی دارند. در بسط‌های اختلالی فرض شده است که $\delta\rho/\rho_0 \ll 1$. اگر از جواب‌های بالا استفاده کنیم دیده می‌شود که $\delta u_0/c = \delta\rho/\rho_0$. اگر مرتبه‌ی بزرگی سرعت ذرات در یک موج صوتی را با v نشان دهیم، دیده می‌شود که در حد $\mathcal{M} = v/c \ll 1$ ، روابط خطی صحت دارند. به $\mathcal{M}$ عدد ماخ گفته می‌شود. برای عدد ماخ بزرگ، لازم است تا اثرهای غیر خطی را وارد کرد.

۴.۴ ناظر متحرک

مطابق شکل ۱.۴، ناظر ساکن در آزمایشگاه S و جریان یکنواخت باد با سرعت $\mathbf{w}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم ببینیم از دید ناظر آزمایشگاه صوت به چه صورتی شنیده می‌شود. توجه کنید که موج صوتی تخت که در بخش پیشین معرفی شد، موجی است که نسبت به شارهِ ساکن منتشر می‌شود. پس اجازه دهید به دستگاه همراه شارهِ، یعنی دستگاه مختصات S' برویم. در این دستگاه یک موج ساده داریم که با فرکانس ω_0 تولید می‌شود و با بردار موج $\mathbf{k}$ می‌تواند در هر راستای دلخواهی منتشر شود. در این دستگاه شکل موج بصورت $\delta P_{S'} = \delta P_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}' - \omega_0 t)$ و با رابطه‌ی پاشندگی $\omega_0(k) = ck$ است. راستای انتشار در دستگاه همراه شارهِ را با $\hat{n}$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که در اینصورت $\mathbf{k} = k\hat{n}$. دقت کنید که برای مشخص کردن موج،

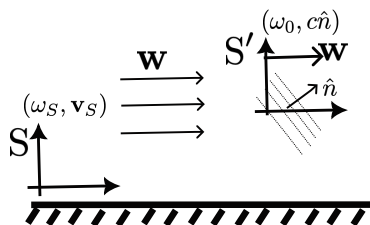
تنها به فرکانس و رابطه‌ی پاشندگی احتیاج داریم و طول موج از طریق رابطه‌ی پاشندگی مشخص می‌شود. با توجه به تبدیل مختصات $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{w}t$ ، شکل موج اسکالر از دید ناظر S بصورت $\delta p_S = \delta p_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{k}t - \omega_0 t)$ می‌شود. از دید ناظر آزمایشگاه، یک موج تخت با فرکانس ω_S و جهت انتشار $\mathbf{v}_S$ داریم. رابطه‌ی پاشندگی و جهت انتشارش بصورت زیر است:

$$\omega_S(k) = \omega_0(k) + \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} = \omega_0 \left(1 + \frac{\mathbf{w} \cdot \hat{n}}{c} \right), \quad (5.4)$$

که در آن $\mathbf{w} \cdot \hat{n}$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد. همچنین راستای انتشار از دید ناظر آزمایشگاه بصورت زیر است:

$$\mathbf{v}_S = \frac{\partial \omega_S}{\partial \mathbf{k}} = c\hat{n} + \mathbf{w}. \quad (6.4)$$

آنچنانکه انتظار داشتیم، موج صوتی سوار بر جریان باد است و راستای انتشار انرژی از دید ناظر آزمایشگاه برآیند سرعت موج و سرعت باد است.



شکل ۱.۴ ناظر ساکن در آزمایشگاه S و جریان باد با سرعت $\mathbf{w}$ و ناظر همراه باد S' را در نظر بگیرید. از دید ناظر همراه شاره، یک صوت تخت با مشخصات $(\omega_0, c\hat{n})$ داریم. این صوت از طرف ناظر آزمایشگاه با مشخصات $(\omega_S, \mathbf{v}_S)$ شنیده می‌شود. جبهه‌های موج و راستای انتشارشان از دید ناظر همراه باد در شکل نشان داده شده است.

۵.۴ اثر دوپلر

منبع و گیرنده‌ی موج صوتی را در نظر بگیرید که به ترتیب با E و D نشان داده می‌شوند. چشمه قادر است یک موج صوتی با فرکانس ω_E تولید کند. حرکت‌های منبع و گیرنده چه نقشی در فرکانس ω_D که توسط گیرنده ثبت می‌شود دارد؟

ابتدا فرض کنید، مطابق شکل ۲.۴- بالا، منبع ساکن و گیرنده با سرعت W_D حرکت کند. برای حل این مساله به دستگاه همراه گیرنده می‌رویم. از دید این ناظر، یک جریان باد در راستای $-W_D$ داریم. با استفاده از رابطه‌ی ۵.۴ و با جایگزینی $\mathbf{w} = -W_D$ و $\omega_S = \omega_D$ و $\omega_o = \omega_E$ خواهیم داشت:

$$\omega_D = \omega_E \left(1 - \frac{W_D \cdot \hat{n}}{c} \right) = \omega_E \left(1 \pm \frac{W_D}{c} \right).$$

در این رابطه همواره $W_D > 0$ و $+$ برای حالت نزدیک شونده و $-$ برای حالت دورشونده است. برای تعیین علامت، فرض کنید مطابق همان شکل، منبع و آشکارساز در وضعیت دور شونده باشند. در این صورت $\hat{n}$ و W_D همراستا هستند پس $\hat{n} \cdot W_D > 0$ بدست می‌آید. در اینصورت و برای حالت دورشونده، فرکانس شنیده شده توسط گیرنده از فرکانس فرستنده کوچکتر است. وضعیت برای حالت نزدیک شونده برعکس می‌شود.

برای حالت دوم، مطابق شکل ۲.۴- پایین فرض کنید که گیرنده ساکن و فرستنده با سرعت W_E حرکت کند. برای اینکه باز هم از نتیجه‌ی بخش قبلی استفاده کنیم، به دستگاه همراه فرستنده می‌رویم. از دید این ناظر، جریان باد با سرعت $-W_E$ داریم. با استفاده از رابطه‌ی ۵.۴ و با جایگزینی $\mathbf{w} = -W_E$ و $\omega_S = \omega_D$ و $\omega_o = \omega_E$ خواهیم داشت:

$$\omega_E = \omega_D \left(1 - \frac{W_E \cdot \hat{n}}{c} \right) \rightarrow \omega_D = \omega_E \left(1 \pm \frac{-W_E}{c} \right)^{-1}.$$

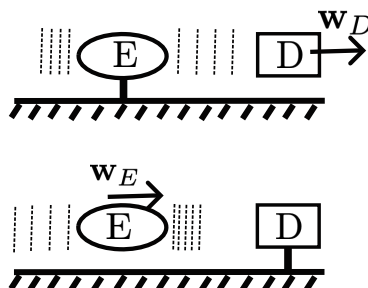
در اینجا همواره $W_E > 0$ و باز هم $+$ و $-$ به ترتیب حالت‌های نزدیک شونده و دور شونده را نشان می‌دهند. در حالت عمومی‌تر که منبع و آشکارساز هر دو حرکت می‌کنند رابطه‌ی زیر جایگزین روابط بالا می‌شود:

$$\omega_D = \omega_E \frac{1 \pm \frac{W_D}{c}}{1 \pm \frac{-W_E}{c}}.$$

برای $W_E \ll c$ رابطه‌ی بالا را می‌توانیم بصورت زیر بنویسیم:

$$\omega_D \approx \omega_E \left(1 \pm \frac{W_D + W_E}{c} \right).$$

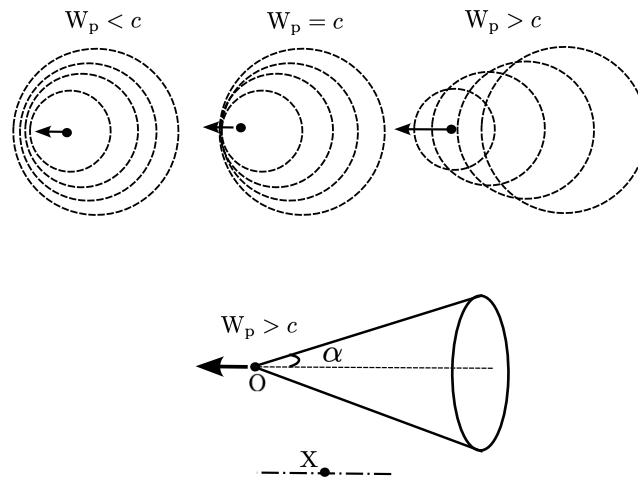
در واقع در حد سرعت‌های کم، سرعت نسبی دور شدن یا نزدیک شدن منبع و گیرنده در فرکانس ثبت شده توسط گیرنده تاثیر دارد.



شکل ۲.۴ منبع و گیرنده‌ی موج صوتی به ترتیب با E و D نشان داده شده‌اند. در حالت بالا فرکانس ثبت شده توسط آشکارساز بصورت $\omega_D = \omega_E \left(1 \pm \frac{w_D}{c}\right)$ است که + و - به ترتیب حالت‌های نزدیک شونده و دور شونده را نشان می‌دهند. در حالت پایینی، فرکانس ثبت شده توسط آشکارساز بصورت $\omega_D = \omega_E \left(1 \pm \frac{w_E}{c}\right)^{-1}$ است. در هر صورت گیرنده‌ای که از منبع دور می‌شود فرکانس کوچکتری را می‌شنود و گیرنده‌ی نزدیک شونده فرکانس بزرگتری را می‌شنود. شکل جبهه‌های موج که فاصله‌ی بین آنها طول موج را نشان می‌دهد، برای حالت‌های دورشونده (بالا) و نزدیک شونده (پایین) نشان داده شده است.

۶.۴ دیوار صوتی

یک جسم صلب، مثلاً یک هواپیما که با سرعت W_p درون هوا حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. امواج صوتی ناشی از این هواپیما چگونه در فضا منتشر می‌شوند. در شکل ۳.۴ - بالا بصورت کیفی موضوع را بررسی کرده‌ایم. فرض کنید هواپیما بسیار کوچک و آن را نقطه‌ای فرض کنید. اگر سرعت هواپیما خیلی کم باشد، آشفته‌گی‌هایی صوتی که به هر دلیلی (مثلاً نوسانات موتور هواپیما) از روی سطح هواپیما تولید می‌شوند وارد هوا شده و با سرعت c و بصورت همسانگرد در تمام راستاها منتشر می‌شوند. با افزایش سرعت هواپیما، جبهه‌های موج که با سرعت c از هواپیما دور می‌شوند، درست روبروی هواپیما به هم نزدیک تر و فشرده تر می‌شوند. اگر سرعت هواپیما تا $W_p = c$ افزایش یابد، همه‌ی جبهه‌های موج که قبلاً تولید شده‌اند روبروی هواپیما به هم رسیده و با هم جمع می‌شوند. اکنون اگر بخواهیم سرعت هواپیما را اندکی بیشتر افزایش دهیم تا از c کمی بیشتر شود، باید هواپیما از جبهه‌های موجی که قبلاً تولید کرده و همه روبرویش بصورت چگالیده قرار دارند عبور کند. از آنجا که هر جبهه‌ی موج با یک اختلاف فشار همراه است پس می‌توان حدس زد که نیروی پیش‌ران خیلی بزرگی برای گذر از این سد لازم است.



شکل ۳.۴ بالا: جبهه‌های موج یک پرنده‌ی تقریباً نقطه‌ای شکل که به سمت چپ حرکت می‌کند، نشان داده شده است. با افزایش سرعت جسم، جبهه‌های موج روبروی پرنده چگالیده می‌شوند. در $M = W_p/c = 1$ ، همه‌ی جبهه موج‌های قبلی درست روبروی هواپیما به هم رسیده‌اند. برای $M > 1$ ، فقط درون یک ناحیه‌ی مخروطی پشت پرنده، امواج صوتی منتشر می‌شوند. سطح ماخ، محلی است که تمام جبهه موج‌های قبلی به هم می‌رسند و یک موج شوک داریم. پایین راست: ناظر X ، در لحظه‌ای که سطح ماخ پرنده‌ی بالای سرش را ملاقات می‌کند، صدای مهیبی می‌شنود که به غرش فراصوت معروف است. پایین چپ: زاویه‌ی مخروط ماخ با رابطه‌ی $\sin \alpha = 1/M$ داده می‌شود.

تا سالها تصور می‌شد گذر از این سد، به خاطر محدودیت‌های عملی، مقدور نباشد ولی با توسعه‌ی پرنده‌های جنگی این سد از لحاظ عملی شکسته شد. با افزایش سرعت پرنده و برای $W_p > c$ ، پرنده همواره از جبهه موج‌های تولید شده قبلی توسط خودش جلوتر است و در واقع امواج صوتی فقط درون یک ناحیه‌ی مخروطی شکل پشت پرنده قابل انتشارند. به مرز این ناحیه‌ی مخروطی شکل، سطح ماخ گفته می‌شود. سطح ماخ جایی است که جبهه موج‌هایی که قبلاً تولید شده‌اند، آنجا با هم جمع می‌شوند و در واقع یک موج شوک داریم. به گذر از حد $W_p = c$ و تشکیل مخروط صوتی پشت هواپیما، شکست دیوار صوتی گفته می‌شود. حال مطابق شکل ۳.۴- پایین پرنده‌ی جنگی با سرعت مافوق صوت $M = W_p/c > 1$ را در نظر بگیرید که در حال حرکت به سمت چپ است و ناظر X روی زمین نظاره گر است. در زمانی که پرنده درست بالای سر ناظر است، هنوز ناظر وارد مخروط پشت پرنده نشده و قاعدتاً هیچ

صدایی یا دست‌کم صدای قابل توجهی از هواپیما نمی‌شنود. این سکوت تا زمانی که پرنده دورتر شده و ناظر درون مخروط قرار گیرد ادامه پیدا می‌کند و پس از آن، این سکوت شکسته می‌شود. درست لحظه‌ای که ناظر شاهد گذر سطح مخروط (سطح ماخ) است، صدای بسیار مهیبی شنیده می‌شود که برهم‌نهی امواج صوتی است که به یکباره به هم رسیده‌اند.

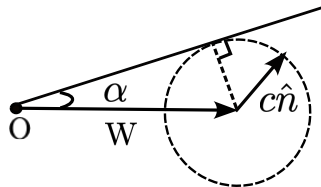
۷.۴ سطح ماخ

آنطور که شرح داده شد برای $M > 1$ ، امواج صوتی فقط درون یک مخروط پشت جسم پرنده منتشر می‌شوند. برای بررسی این مساله اجازه دهید از دید ناظر همراه پرنده ادامه دهیم. از دید این ناظر هواپیما ثابت و جریان هوا با سرعت $\mathbf{W} = -\mathbf{W}_p$ برقرار است. در اینصورت رابطه‌ی 6.4 راستای انتشار موج را از دید این ناظر بصورت $\mathbf{v}_S = \mathbf{w} + c\hat{n}$ مشخص می‌کند. به ازای تمام بردارهای دلخواه $\hat{n}$ تمام راستاهای مجاز انتشار از این رابطه بدست می‌آید. مطابق شکل 4.4 ، تمام $\mathbf{v}_S$ درون مخروطی با نیم زاویه‌ی راس $\sin \alpha = 1/M$ قرار می‌گیرند.

نتیجه‌ی نهایی این است که از دید ناظر همراه پرنده و برای $M > 1$ ، میدان سرعت شاره در ناحیه‌ی خارج مخروط ماخ، میدان سرعت یکنواخت $\mathbf{w}$ است ولی میدان سرعت درون مخروط ماخ شامل این میدان سرعت یکنواخت و اثرات تراکم پذیری ناشی از هواپیما (که بصورت امواج صوتی در نظر گرفته شده) است.

توجه کنید که برای $M < 1$ ، میدان سرعت در تمام نقاط فضا برهم‌نهی ساده‌ای از میدان یکنواخت $\mathbf{w}$ و اثرات اختلالی بصورت امواج صوتی است.

یک هواپیمای جنگنده‌ی $F-14$ در سطح دریا قادر است به سرعتی با $M = 1/2$ دست یابد. در این شرایط نیم‌زاویه‌ی مخروط ماخ برابر با $\alpha \sim 56^\circ$ است. اگر این پرنده با این سرعت و ارتفاع 1 km از بالای سر ناظری گذر کند، حدوداً پس از 600 m که دورتر شد، ناظر وارد مخروط ماخ می‌شود. این نتایج برای حالتی است که از جزییات شکل هندسی سطح پرنده صرف‌نظر کرده باشیم. در بخش‌های جلوتر اندکی در مورد نقش شکل هندسی بحث می‌کنیم.



شکل ۴.۴ برای پیدا کردن مخروط ماخ، از دید ناظر همراه جسم، تمام راستاهای مجاز انتشار از رابطهی $\mathbf{v}_S = \mathbf{W} + c\hat{n}$ بدست می‌آید که در آن بردار سرعت داده شده و ثابتی است ولی بردار یکه‌ی $\hat{n}$ می‌تواند تمام راستاهای فضایی را اختیار کند. در این صورت انتهای بردار $\mathbf{W} + c\hat{n}$ وقتی که بیشترین زاویه را می‌سازد، مکان هندسی سطح ماخ را مشخص می‌کند. زاویه‌ی مخروط ماخ با رابطهی $\sin \alpha = 1/M$ داده می‌شود.

۸.۴ بال نازک

در قسمت‌های قبلی بصورت کیفی در مورد اثرهای ناشی از تراکم پذیر بودن شارش‌های با عدد ماخ بزرگتر از یک صحبت کردیم. با یک مدل بسیار ساده می‌توانیم ایده‌های خوبی از نقش شکل هندسی بدست آوریم. مطابق شکل ۵.۴، یک بال نازک ساکن و صلب در معرض جریان فرودی یکنواخت $\mathbf{w} = W\hat{x}$ را در نظر بگیرید. نیمه‌ی بالایی و پایینی این باله نازک، متقارن و با تابع $y = f(x)$ داده می‌شود. می‌خواهیم شارش تراکم ناپذیر در مجاورت این بال را بدست آوریم. واضح است که از دید ناظر آزمایشگاه که بال را ساکن می‌بیند میدان شارش به حالت پایا می‌رسد. معادلات اساسی توصیف کننده‌ی این سامانه را در حالت پایا حول حالت جریان یکنواخت بصورت زیر مختل می‌کنیم:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \delta\mathbf{u}, \quad P = P_0 + \delta P, \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \delta P = c^2\delta\rho.$$

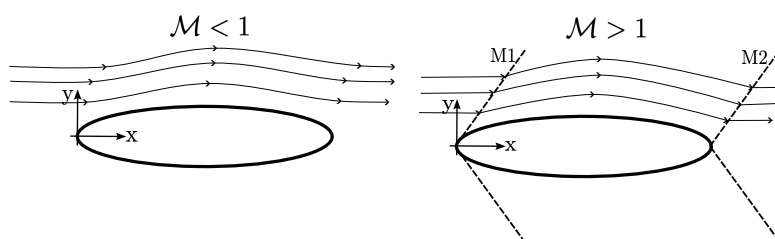
اختلال‌های معرفی شده را در معادلات اساسی قرار داده و فقط جملات مرتبه‌ی اول را نگاه می‌داریم:

$$\rho_0 W \partial_x \delta\mathbf{u} = -\nabla \delta P, \quad \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{u} = -W \partial_x \delta\rho, \quad (۷.۴)$$

اگر از طرفین معادله‌ی اول کرل بگیریم، می‌بینیم که میدان چرخش سرعت باید ثابت باشد: $\partial_x (\nabla \times \delta\mathbf{u}) = 0$. چون در فواید بسیار دور جریان بدون چرخش است، در نتیجه همه‌جا

میدان اختلالی سرعت بدون چرخش می‌ماند. در این صورت میدان سرعت از پتانسیل اسکالر بصورت $\delta \mathbf{u} = \nabla \phi = (\partial_x \phi, \partial_y \phi)$ بدست می‌آید. با جایگذاری در معادلات می‌بینیم که پتانسیل در معادله‌ی زیر صدق می‌کند:

$$(-\Lambda^2 \partial_x^2 + \partial_y^2) \phi(x, y) = 0, \quad \Lambda^2 = \mathcal{M}^2 - 1. \quad (8.4)$$



شکل ۵.۴ خطوط میدان یک شارش تراکم‌پذیر در مجاورت یک جسم صلب (بال) برای دو حالت $\mathcal{M} < 1$ و $\mathcal{M} > 1$ رسم شده است. در حالت $\mathcal{M} < 1$ ، خطوط میدان همواری در فضا داریم که با یک تغییر مقیاس راستای طولی، به خطوط میدان شارش پایستار و تراکم ناپذیر شبیه می‌شود. برای حالت $\mathcal{M} > 1$ ، خطوط ماخ که با شیب $\sin \alpha = 1/\mathcal{M}$ رسم شده‌اند فضا را به دو ناحیه درونی و بیرونی تقسیم می‌کنند. اثر امواج صوتی ناشی از سطح بال فقط ناحیه‌ی درونی را تحت تاثیر قرار می‌دهند. خطوط میدان در مرز ناحیه ماخ شکستگی دارند. ناپیوستگی مولفه‌ی عمودی سرعت و فشار روی خطوط ماخ، نیروی کششی به بال وارد می‌کند.

پیش از بررسی پاسخ‌های این معادله به شرط مرزی سرعت نگاه کنیم. میدان مختل شده‌ی سرعت باید در شرط مرزی زیر صدق کند:

$$\delta \mathbf{u}(x \rightarrow \infty) = 0, \quad \mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{u}(x, y = f(x)) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}.$$

که در آن $\mathbf{m}$ بردار یکه‌ی عمود بر سطح بال است. اگر بال خیلی نازک باشد، شرط مرزی سرعت روی سطح بال را بصورت زیر ساده می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که بردار عمود بر سطح بال را بصورت $\mathbf{m} \sim (-f'(x), 1)$ داریم. پس:

$$\delta u_y(x, y = f(x)) = W f'(x),$$

اگر میدان سرعت را بصورت $\delta u_y(x, f(x)) \sim \delta u_y(x, 0) + f(x) \delta u'_y(x, 0)$ بسط دهیم و

نتایج را مرتبه‌ی اول نگاه داریم، شرط مرزی روی سطح بال بصورت $\delta u_y(x, 0) = W f'(x)$ می‌شود. در نتیجه پتانسیل باید در شرط مرزی زیر صدق کند:

$$\partial_y \phi(x, 0) = W f'(x).$$

بازگردیم به معادله‌ی ۸.۴. این معادله‌ی برای دو حالت $M < 1$ و $M > 1$ رفتارهای کاملاً متفاوتی دارد.

برای حالت اول که عدد ماخ کوچک است $M < 1$ ، تابع پتانسیل در یک معادله‌ی دیفرانسیل بیضوی صدق می‌کند. این معادله پاسخ‌های همواری در فضای اطراف بال دارد که نتیجه‌ی آن تغییر خطوط میدان در همسایگی بال است. یک مشاهده‌ی ساده توصیف مساله را ساده می‌کند. با یک تغییر مقیاس $x \rightarrow \bar{x} = x/\sqrt{1-M^2}$ ، به معادله‌ی لاپلاس می‌رسیم. توجه کنید که معادله‌ی لاپلاس توصیف کننده‌ی شارش پایستار تراکم ناپذیر اطراف جسم صلب است. پس برای عدد ماخ کوچک، تراکم‌پذیر بودن شارش بصورت یک تغییر مقیاس ساده در راستای طولی بال دیده می‌شود. مثلاً از آنجا که نیروی بالابر با طول بال متناسب است، نتیجه می‌گیریم که تراکم پذیر بودن شارش، نیروی بالابر هواپیما را به اندازه‌ی ضریب $1/\sqrt{1-M^2}$ افزایش می‌دهد. انتظار نداریم در این حالت، تراکم پذیری شارش باعث ایجاد نیروی کششی (نیرو در راستای طولی) شود.

اکنون حالت عدد ماخ بزرگ $M > 1$ را در نظر بگیرید. در این حالت $\Lambda^2 > 0$ و پتانسیل در معادله‌ی هذلولوی صدق می‌کند. کلی‌ترین پاسخ‌های این معادله به صورت زیر است:

$$\phi(x, y) = g_+(x + \Lambda y) + g_-(x - \Lambda y).$$

دو منحنی $y(x) = \pm \Lambda^{-1}x$ در شکل ۵.۴ با خطوط $M=1$ و قرینه‌اش نشان داده شده‌اند. توجه کنید که شیب این دو خط با زاویه‌ی ماخ که قبلاً تعریف شده بود و بصورت $\sin(\alpha) = \pm M^{-1}$ داده می‌شود. درواقع اگر جلوترین نقطه‌ی بال یعنی نقطه‌ی $x = y = 0$ و دیگر نقاط سطح بال را در نظر بگیریم، موج‌های صوتی ناشی از تراکم‌پذیری که از سطح بال تولید شده و با سرعت صوت منتشر می‌شوند، همواره پشت این دو خط $M=1$ و قرینه‌اش قرار می‌گیرند. در ادامه معلوم می‌شود که در هر لحظه، تنها ناحیه‌ی بین دو خط $M=1$ و $M=2$ می‌توانند اثرهای تراکم پذیری و

انتشار موج را تجربه کنند. خارج این ناحیه عملاً متأثر از اثرهای تراکم‌پذیری نیست و در آن نواحی میدان سرعت شاره برابر با سرعت یکنواخت فرودی است. پس پتانسیل خارج این ناحیه مقداری ثابت است و آن را بدون اینکه از کلیت مساله بکاهد برابر با صفر می‌گیریم. انتظار داریم پتانسیل ناحیه‌ی درون و ناحیه‌ی بیرون روی خطوط ماخ (همان خطوط M_1 و M_2 که در شکل مشخص شده‌اند) پیوسته باشد. مثلاً یک نقطه روی خط ماخ جلویی به مختصات $(x, x/\Lambda)$ را در نظر بگیرید:

$$\phi(x, x/\Lambda) = \circ \rightarrow g_-(\circ) + g_+(x) = \circ,$$

نتیجه می‌شود که $g_+(x)$ باید مستقل از x باشد پس بدون مشکلی آن را می‌گیریم: $g_+(x) = \circ$. داریم:

$$\phi(x, y) = g_-(x - \Lambda y), \quad g_-(\circ) = \circ,$$

با اعمال شرط مرزی روی سطح بال $g'_-(x) = -\frac{W}{\Lambda} f'(x)$ انتگرالگیری از این رابطه آسان است و جواب نهایی بصورت زیر می‌شود:

$$\phi(x, y) = \begin{cases} -\frac{W}{\Lambda} f(x - \Lambda y), & \circ < x < L, y > \circ, \\ -\frac{W}{\Lambda} f(x + \Lambda y), & \circ < x < L, y < \circ. \end{cases} \quad (9.4)$$

روی یک نقطه روی خط M_2 با مختصات $(x, (L+x)/\Lambda)$ ، مقدار پتانسیل برابر می‌شود با $\phi = -(W/\Lambda)f(L) = \circ$ (توجه کنید $f(L) = \circ$). در نتیجه شرط پیوستگی روی خط ماخ سمت راست هم برقرار است.

اولین پیغام محاسبات بالا این است که خطوط میدان شارشی در ناحیه‌ی میانی به شکل طرح سطح بال است. در ناحیه‌ی خارجی خطوط میدان با خطوط میدان مختل نشده مربوط به جریان یکنواخت برابر است. دومین نتیجه‌ی مهم ناشی از تراکم‌پذیری شارش به ناپیوستگی مشتق خطوط میدان روی خطوط ماخ مربوط می‌شود. مثلاً در یک نقطه روی خط ماخ به مختصات $(x, x/\Lambda)$ ، مولفه‌ی عمودی میدان سرعت به میزان زیر ناپیوسته می‌شود:

$$\Delta u_y = \delta u_y(x, x/\Lambda) = W f'(\circ) = \frac{W}{\sqrt{\mathcal{M}^2 - 1}}.$$

علاوه بر ناپیوستگی سرعت، فشار نیز در خطوط ماخ ناپیوسته رفتار می‌کند. در ناحیه‌ی خارجی

ماخ، میدان سرعت هیچ مولفه‌ی عمودی ندارد ولی درون ناحیه‌ی ماخ به سبب ناپیوستگی سرعت و وجود مولفه‌ی عمودی سرعت، شاری از انرژی امواج صوتی داریم که به بی‌نهایت می‌رود. انتظار داریم این انرژی که از طریق امواج صوتی به بی‌نهایت می‌رود بصورت یک نیروی کششی در حرکت پرنده‌ی مافوق صوت دیده شود. محاسبه‌ی دقیق‌تر وجود این نیرو را ثابت می‌کند. اثرهای تراکم‌پذیری در شارش پایستار مافوق صوت باعث نیروی کششی می‌شود به صورت تقریبی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود [۱۶]:

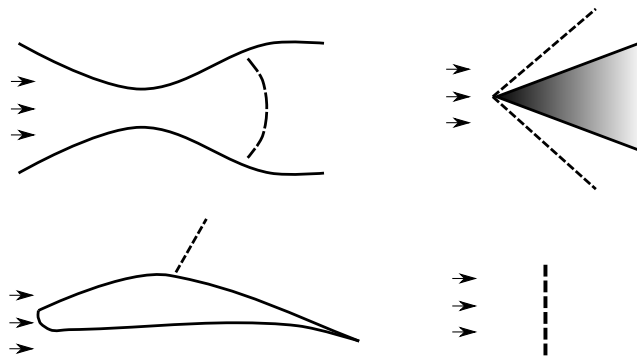
$$P_D = \frac{\rho_0 W^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^L f''(x) dx.$$

مرز ناحیه‌ی ماخ که در آن ناپیوستگی در کمیات شارشی دیده می‌شود مثالی از موج شوک است. محاسبات تقریبی که اینجا انجام شد وجود یک تکینگی در $M = 1$ را نشان می‌دهد. محاسبات کامل‌تر که با تقریب‌های بهتری انجام می‌شود رفتار هموار و غیر تکینه‌ای برای $M = 1$ نشان می‌دهد. محاسبات ساده‌ی اینجا، دست‌کم نشان دهنده‌ی افزایش قابل ملاحظه‌ای در نیروی کششی ناشی از تراکم‌پذیری در $M = 1$ است. در عمل هم ثابت شده است که نیروی کششی زیاد ولی متناهی لازم است تا دیوار صوتی شکسته شود.

۹.۴ موج شوک

تشکیل موج شوک، مشخصه‌ی اصلی جریان‌های تراکم‌پذیر فراصوت است. موضوع این است که تراکم‌پذیری با انتشار امواج صوتی همراه است و سرعت انتشار این امواج مستقل از طول موجشان است. چنانچه یک جسم صلب مثل گوه یا بال هواپیما مطابق شکل ۶.۴، در معرض یک شارش فراصوت قرار گیرد، امواج صوتی و اختلال‌های منتشر شده از سطح جسم نمی‌توانند در راستای بالادست جریان منتشر شوند. در نتیجه همواره می‌توان مرزی را تصور کرد که در شکل‌ها بصورت خط چین مشخص شده است. این مرز یک ناحیه‌ی باریک است که به موج شوک معروف است. توجه کنید از دید ناظر همراه شارش، این مرز، بصورت یک جبهه‌ی متحرک دیده می‌شود. سمت بالادست این مرز، متاثر از اثرات جسم نیست و اثرات جسم که در قالب اختلال‌های موجی که جریان فرودی را مختل می‌کنند، تنها در ناحیه‌ی پایین دست موج شوک قابل مشاهده است. در موج شوک یک ناپیوستگی در کمیات شارشی مانند سرعت، فشار، چگالی

و دما داریم. در ناحیه‌ی بالادست سرعت زیاد ولی در ناحیه‌ی پایین دست شوک، سرعت کاسته می‌شود که به همراه آن فشار، دما و چگالی افزایش می‌یابد.



شکل ۶.۴ جریان شاره‌ی تراکم‌پذیر درون یک نازل همگرا-واگرا (بالا چپ)، جریان اطراف یک گوه (بالا راست) و بال صلب (پایین چپ) وقتی به سرعت صوت می‌رسد با تشکیل یک موج شوک همراه می‌شود که در شکل‌ها بصورت یک خط-چین نمایش داده شده است. البته در مورد نازل سرعت در گلوگاه مورد نظر است که قاعدتا با سرعت ورودی کمتر از صوت هم می‌توان به شارش فراصوتی در گلوگاه رسید. موج شوک ناحیه‌ی بسیار باریکی مثلا از مرتبه‌ی یک برگه‌ی کاغذ است که اختلال‌ها و امواج ناشی از جسم به ناحیه‌ی بالادست آن (سمت جریان فرودی) نمی‌رسد. موج‌های صوتی فقط در ناحیه‌ی پشت موج شوک منتشر می‌شوند. پایین سمت راست، یک موج شوک عمودی نشان داده شده است.

از موج شوک در نازل‌های همگرا-واگرا برای تولید نیروی پیشران موشک‌ها استفاده می‌شود. مطابق شکل ۶.۴ نازل همگرا-واگرا را ببینید. فرض کنید جریان فرودی طوری باشد که در گلوگاه شارش فراصوت شود. در این حالت امواج صوتی نمی‌تواند به پایین دست منتشر شوند و همه در ناحیه‌ای که همان شوک است با هم ترکیب شده و یک موج ایستاده‌ی قوی تولید می‌کنند. مثلا کمیت فشار را در نظر بگیرید که در مکان این موج ایستاده می‌تواند پرش بزرگی را تجربه کند. پشت این شوک، جریان آرام است.

با توجه به جهت‌گیری جبهه‌ی موج شوک و راستای جریان فرودی، شوک را به عمودی و مایل تفکیک می‌کنند. در شکل ۶.۴ قسمت پایین، یک موج شوک ساده‌ی عمودی نشان داده شده است. فرض کنید کمیات شارشی در همسایگی بالادست شوک را با P_1 ، ρ_1 و u_1 و کمیات سمت پایین دست را با P_2 ، ρ_2 و u_2 نشان دهیم. با اعمال قوانین پایستگی، جرم، تکانه

و انرژی می‌توان روابطی برای میزان ناپیوستگی کمیات بدست آورد. قوانین پایستگی را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \rho_2 u_2, \\ P_1 + \rho_1 u_1^2 &= P_2 + \rho_2 u_2^2, \\ h_1 + \frac{1}{\gamma} u_1^2 &= h_2 + \frac{1}{\gamma} u_2^2.\end{aligned}\quad (10.4)$$

نشان دهید کمیات پایین دست بصورت زیر می‌شوند:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2^* &= \frac{(\gamma - 1)\mathcal{M}_1^* + 2}{2\gamma\mathcal{M}_1^* - (\gamma - 1)}, \quad \frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(\mathcal{M}_1^* - 1), \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{(\gamma + 1)\mathcal{M}_1^*}{(\gamma - 1)\mathcal{M}_1^* + 2}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2},\end{aligned}\quad (11.4)$$

که در آن اعداد ماخ بالادست و پایین دست به ترتیب با $\mathcal{M}_1 = u_1/c$ و $\mathcal{M}_2 = u_2/c$ داده شده‌اند.

پرش هیدرولیک

در انتشار امواج مرزی که در مرز مشترک دو شار، مثلاً آب و هوا، منتشر می‌شوند، اثری شبیه موج شوک دیده می‌شود. انتشار امواج مرزی در فصول آینده بررسی می‌شود ولی آن چیزی که به آن اشاره می‌کنیم به سرعت انتشار امواج مرزی در شارهای کم عمق مربوط می‌شود. برای یک لایه نازک شار به عمق H ، امواج مرزی با رابطه‌ی پاشندگی خطی شبیه امواج صوتی و در پی آن با سرعت ثابت $\sqrt{gH}$ منتشر می‌شوند، در نتیجه اگر یک جریان فرودی یکنواخت در این شار کم عمق داشته باشیم که سرعتش از رابطه‌ی بالا بیشتر باشد، امواج سطحی نمی‌توانند در راستای پایین دست جریان منتشر شوند. برهمه‌نی این امواج، یک آشفتگی با ارتفاع بزرگ می‌سازد که مشابه موج شوک است و به آن پرش هیدرولیک گفته می‌شود. این پدیده در کف سینک ظرفشویی وقتی که یک جریان آرام آب داریم قابل مشاهده است. آب فرودی از شیر وقتی به سینک می‌رسد یک جریان سطحی می‌سازد که بصورت شعاعی از محل ریزش آب دور

می‌شود. اگر جریان فرودی کمی قوی‌تر باشد، پرش هیدرولیک بصورت یک جهش در میزان عمق آب در ناحیه‌ای اطراف نقطه‌ی فرود آب دیده می‌شود. این پدیده در لایه‌ی نازک شاره‌ای که روی سطح شیبدار جاریست نیز قابل مشاهده است. بخاطر گرانش، سرعت شارش در پایین سطح شیبدار زیاد است و شرایط برای پرش هیدرولیک مهیاست. در پرش هیدرولیک ایجاد شده در نقاط پایینی سطح، می‌توانیم شاهد امواجی باشیم که به سمت بالادست منتشر می‌شوند.



سِر جُرج گابریل استوکس، فیزیک و ریاضی‌دان بریتانیایی به سال ۱۸۱۹ در کیمبریج زاده شد. از سال ۱۸۴۹ به عنوان پروفسور ریاضی در دانشگاه کیمبریج شروع به کار کرد. مطالعات استوکس روی رفتار شارهای و شکسان که امروزه با نام قانون استوکس شناخته می‌شود و همین‌طور قضیه‌ی استوکس در آنالیز برداری بیشترین سهم را در اشتهار استوکس دارند. مقالات آغازین استوکس روی حرکت پایای شارهای تراکم ناپذیر و اصطکاک شارها بوده است. علاوه بر مسائل مربوط به شارها، استوکس در پیشرفت موضوعات دیگر فیزیک نیز تاثیر گذار بوده است. مفهوم فلورسانس و حتی ابداع این کلمه از کارهای استوکس است. نظریه‌ی موجی نور، وجود اتر و مطالعه‌ی مشخصات آن و بررسی تغییرات شدت جاذبه روی نقاط مختلف زمین از دیگر فعالیت‌های علمی استوکس است. استوکس اولین شخصی بود که خطوط فرانهوفر موجود در طیف نور خورشید را به وجود برخی از اتم‌ها در لایه‌ی خارجی خورشید نسبت داد. امروزه در سیستم واحدهای CGS، شکسانی سینماتیکی به نام استوکس نامگذاری شده است.

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

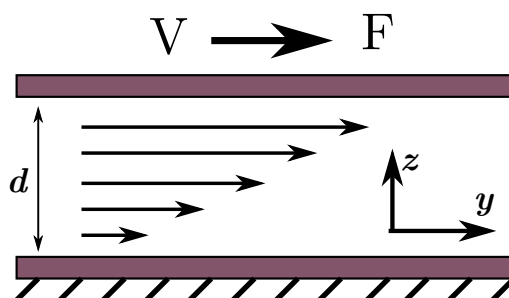


شارش اتلافی

در این فصل مسأله‌ی اصطکاک و اثرهای اتلافی در شارش‌های تراکم ناپذیر را مطالعه می‌کنیم. همانطور که قبلاً به صورت مختصر گفته شد، وشکسانی (η)، معیاری از شدتِ اثرهای اتلافی در شارها است. در اینجا با تعریف دقیق‌تر وشکسانی و ارائه‌ی مدلی پدیده‌شناختی برای تانسور تنشِ شارهای نیوتنی، معادله‌ی ناویه-استوکس را بدست می‌آوریم. این معادله را برای برخی از شارش‌های ساده حل می‌کنیم.

۱.۵ وشکسانی

آزمایش ساده‌ی دو صفحه‌ی موازی را به یاد بیاورید. مطابق شکل ۱.۵، ناحیه‌ی بین دو صفحه‌ی موازی از شارهای وشکسان پر شده است. یکی از صفحات ساکن و دیگری را با اعمال نیروی خارجی و ثابت F به حرکت درمی‌آوریم. فاصله‌ی بین دو صفحه d و اندازه‌ی صفحات A است. آزمایش نشان داده است که برای صفحات خیلی بزرگ ($d \gg A$)، که از اثرهای لبه‌ای می‌توان صرف‌نظر کرد و برای دسته‌ی بزرگی از شارها، اندازه‌ی نیرو بر واحد سطح بصورت خطی با V/d متناسب است. نتیجه‌ی این آزمایش را با رابطه‌ی ریاضی زیر بیان می‌کنیم:



شکل ۱.۵ از آزمایش دو صفحه‌ی موازی برای تعیین و شکسانی شارها استفاده می‌شود.

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{V}{d}, \quad (۱.۵)$$

که در آن ضریب تناسب η ، و شکسانی شار است. سرعت شارش شار در مجاورت صفحه‌ی بالایی برابر با سرعت حرکت آن صفحه و سرعت شار در مجاورت صفحه‌ی ساکن پایینی برابر با صفر است. پس اگر فاصله‌ی بین دو صفحه خیلی کوچک باشد می‌توانیم قرار دهیم:

$$\frac{V}{d} = \frac{\partial u_y}{\partial z},$$

از طرف دیگر با توجه به شکل بالا، F/A در واقع یکی از مؤلفه‌های برشی تانسور تنش است که با σ_{yz} نشان داده می‌شود. به بیان دیگر رابطه‌ی ۱.۵ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sigma_{yz} = \eta \frac{\partial u_y}{\partial z}. \quad (۲.۵)$$

مطابق این قانون تجربی، مقدار تنش در نقاطی از شارش که به صفحه‌ی بالایی نزدیک است، بر حسب گرادیان مؤلفه‌ای از سرعت که موازی سطح است نوشته شده است. با استفاده از قانون سوم نیوتن، مقدار تنش برشی شار در مجاورت صفحه‌ی پایینی را نیز برابر با همین مقدار، البته در جهت عکس، بدست می‌آوریم. شارهایی که از این قانون تجربی پیروی می‌کنند به شارهای نیوتنی معروف هستند. پاسخ این پرسش که چه شارهایی نیوتنی هستند، سراسر نیست. زیرا نیوتنی بودن یا نبودن، به شرایط آزمایش بستگی دارد. به عنوان مثال، آب در محدوده‌ی وسیعی از شرایط روزمره (حرکت در لوله‌های جریان، شارش اطراف ماهی‌ها) رفتار نیوتنی دارد ولی آب درون سلول و خون رفتاری نیوتنی ندارند. موضوع اصلی در تعیین رفتار نیوتنی یک

شارش، سرعت انجام آن آزمایش خاص و پاسخ زمانی مولکول‌های شاره به آن است. اگر پاسخ زمانی مولکول‌های شاره خیلی سریع و آنی باشد، شاره‌ی مورد نظر در شرایط آن آزمایش رفتار نیوتنی دارد. این موضوع در فصل شارش‌های نیوتنی به صورت مفصل و دقیق بررسی می‌شود. در ادامه‌ی این فصل می‌خواهیم یک رابطه‌ی پدیده‌شناختی برای تانسور تنش شاره‌های نیوتنی، شاره‌های سازگار با نتیجه‌ی بالا، ارائه کنیم.

تانسور تنش

برای ارائه‌ی معادلات حرکت شاره‌ها، حتماً باید اطلاعات دقیقی از نیروهای درونی که بین مولکول‌ها اثر می‌کنند در دست داشته باشیم. در نگاه محیط‌های پیوسته که ما از آن استفاده می‌کنیم، اطلاعات مربوط به تمام نیروها در تانسور تنش گنجانده می‌شود. پس اطلاعاتی کافی در مورد تانسور تنش، ما را به معادلات حرکت شاره می‌رساند. رهیافت‌های ریزمقیاس و پدیده‌شناختی، دو روش اساسی برای بدست آوردن اطلاعات تانسور تنش هستند. در روش ریزمقیاس، از شکل دقیق نیروهای بین مولکولی، وابستگی آنها به پیکربندی فضایی و فاصله‌ی بین مولکول‌ها استفاده می‌شود. با متوسط گیری نیروها روی مولکول‌هایی که در مجاورت هر نقطه قرار دارند، به روابطی ریزمقیاس برای تانسور تنش در حد سامانه‌ی پیوسته می‌رسیم. رهیافت مبتنی بر روش‌های ریزمقیاس، موضوع این کتاب نیست. ما از روش‌های ساده‌تری که بر مبنای مطالعات پدیده‌شناختی هستند، استفاده می‌کنیم.

یک شاره‌ی نیوتنی را در نظر بگیرید. آزمایش دوصفحه‌ی موازی را می‌توانیم با صفحات آزمون خیلی کوچک در تمامی نقاط شاره انجام دهیم. از طرف دیگر در هر نقطه‌ی دلخواه، صفحات آزمون موازی را در راستاهای اصلی مختلف قرار می‌دهیم. برای شاره‌های همسانگرد، انتظار داریم که نتیجه برای تمام راستاهای انتخابی صفحات یکی شود. با این روش می‌توانیم مؤلفه‌های مختلف تانسور تنش را بدست آوریم. نتیجه‌ی فوری که از این آزمایش بدست می‌آید، وابستگی خطی مؤلفه‌های تانسور تنش به مؤلفه‌های مختلف مشتقات سرعت در آن نقطه است. این موضوع از رابطه‌ی ۲.۵ نتیجه می‌شود. چطور می‌شود رابطه‌ی ۲.۵ را برای یک شارش کلی که در تمام راستاهای مختلف مؤلفه دارد، تعمیم داد؟ همسانگرد بودن شاره و متقارن بودن تانسور

تنش، دو قید اساسی برای ارائه‌ی یک رابطه‌ی کلی خطی بین تانسور تنش و مشتقات سرعت است. رابطه‌ای بصورت زیر برای مؤلفه‌های تانسور تنش را در نظر بگیرید:

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.5)$$

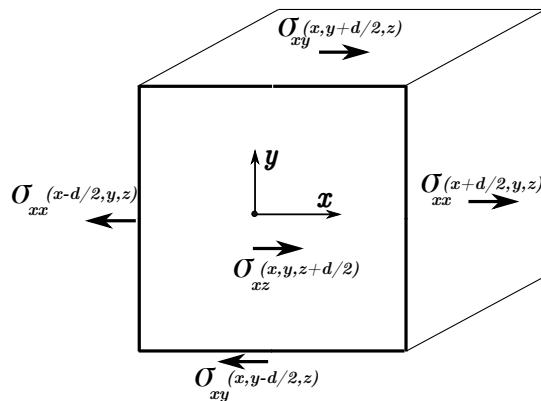
این رابطه‌ی پدیده‌شناختی، تانسور تنش را به میدان سرعت شارجه مربوط می‌کند^۱. در ادامه با استفاده از این رابطه‌ی اساسی، معادلات حرکت شارجه را بدست می‌آوریم. اجازه دهید قبل از استفاده از این رابطه، کمی بیشتر در مورد آن بحث کنیم. در این رابطه، همسانگرد بودن شارجه در نظر گرفته شده است. اگر آزمایش دو صفحه‌ی موازی را در راستاهای مختلف انجام دهیم، در هر راستا رابطه‌ای به شکل ۲.۵، بدست می‌آید. علاوه بر همسانگردی و تقارن، رابطه‌ی پدیده‌شناختی بالا، خاصیت تانسوری نیز دارد. در واقع با مطالعه‌ی تبدیل مؤلفه‌های مختلف تحت دوران مختصات، می‌توانیم شرط تانسور بودن را می‌توانیم تحقیق کنیم. میدان اسکالر $P(\mathbf{x})$ ، میدان فشار درون شارجه است.

معادله‌ی ناویه-استوکس

برای اینکه معادلات حاکم بر یک شارش تراکم ناپذیر را بدست آوریم، قطعه‌ی کوچک مکعب شکل از شارجه را در نظر بگیرید. مطابق شکل ۲.۵، اندازه‌ی اضلاع مکعب را برابر با d و مرکز آن را در نقطه‌ای به مختصات (x, y, z) در نظر می‌گیریم. شارجه خارج این ناحیه‌ی مکعب شکل به شارجه درون این ناحیه نیرو وارد می‌کند. این نیروها که منشأ بین مولکولی دارند، بسیار کوتاه‌برد هستند. این نیروها را می‌توانیم به شکل نیروهایی در نظر بگیریم که فقط در سطح مرزی دو ناحیه اثر می‌کنند. نیروهای وارد بر وجوه این مکعب را می‌توانیم بر حسب مؤلفه‌های مختلف تانسور تنش بیان کنیم. در شکل، مؤلفه‌ی $\hat{x}$ نیروهای وارد بر شارجه درون این مکعب را بررسی کرده‌ایم. نیروی کل وارد بر مکعب در راستای $\hat{x}$ بصورت زیر است:

$$F_x = d^3 \times [\sigma_{xx}(x + \frac{d}{2}, y, z) - \sigma_{xx}(x - \frac{d}{2}, y, z) + \sigma_{xy}(x, y + \frac{d}{2}, z)$$

^۱ این رابطه برای شارش‌های تراکم ناپذیر درست است. برای شارش‌های تراکم‌پذیر و بنا به ملاحظات تقارنی، باید عبارتی به صورت $\eta'(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij}$ ، به رابطه‌ی پدیده‌شناختی تانسور تنش افزوده شود. η' ، ضریب دوم وشکسانی است و به مقدار اتلاف انرژی در فرآیند متراکم شدن شارش‌های تراکم پذیر ارتباط دارد[۱].



شکل ۲.۵ یک مکعب کوچک با اضلاع d از شماره را در نظر بگیرید. مؤلفه‌ی $\hat{x}$ نیروهای وارد بر شاره‌ی درون این مکعب، که از طریق وجوه آن وارد می‌شوند، در شکل نشان داده شده‌اند.

$$- \sigma_{xy}(x, y - \frac{d}{2}, z) + \sigma_{xz}(x, y, z + \frac{d}{2}) - \sigma_{xz}(x, y, z - \frac{d}{2})]. \quad (۴.۵)$$

بحث را برای شارش‌های تراکم ناپذیر ادامه می‌دهیم. با جانشانی شکل پدیده‌شناختی تانسور تنش و استفاده از معادله‌ی پیوستگی برای شارش‌های تراکم ناپذیر، نیروی بالا، شکل ساده شده‌ای بر حسب میدان سرعت اوילری خواهد داشت. دقت کنید که معادله‌ی پیوستگی برای شارش‌های تراکم ناپذیر به صورت $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$ است. برای d های کوچک و با استفاده از بسط تیلور به دست می‌آوریم:

$$F_x = d^3 \times \left(-\frac{\partial}{\partial x} P + \eta \nabla^2 u_x \right), \quad (۵.۵)$$

که در آن $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ، عملگر لاپلاسی است. با تکرار همین مراحل، مؤلفه‌های دیگر نیرو را بدست می‌آوریم. نتیجه‌ی نهایی به شکل زیر است:

$$\mathbf{F} = d^3 \times (-\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u}). \quad (۶.۵)$$

اکنون می‌توانیم معادله‌ی حرکت شاره را بدست آوریم. نیروهای وارد بر یک حجم کوچک شاره باید با شتاب این عنصر شاره برابر باشد:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (۷.۵)$$

این معادله‌ی ناویه-استوکس برای تحول شاردهای نیوتنی است. $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ نیروی خارجی است که بر واحد حجم شارده وارد می‌شود. به عنوان مثال اثر گرانش را می‌توانیم با نیروی خارجی و ثابت $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \rho \mathbf{g}$ در نظر بگیریم.

مشاهده می‌کنید که تفاوت معادله‌ی شاردهای وشکسانی با شاردهای اویلری، جمله‌ی متناسب با وشکسانی است. اتحاد زیرا را برای شاردهای تراکم ناپذیر در نظر بگیرید:

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{u},$$

مطابق این رابطه، ارتباط بسیار نزدیک و مستقیمی بین وشکسانی و تاو شارش هست. در واقع اثرهای اتلاfi به صورت چرخش موضعی در شارده نمود پیدا می‌کنند. مسأله‌ی سطل چرخان آب را به یاد بیاورید. در آنجا اشاره شد که برای شاردهای اویلری هیچ راهی برای انتقال چرخش سطل به شارده نیست و با چرخاندن سطل، آب درون آن نمی‌چرخد. البته در عمل همواره اتلاف وجود دارد. در واقع در لایه‌ی بسیار کوچکی در نزدیکی دیواره‌ی سطل وشکسانی خود را بصورت چرخش موضعی نشان می‌دهد. این چرخش موضعی در لایه‌ی مرزی در نهایت حرکت سطل را به آب انتقال می‌دهد. برای مطالعه‌ی دینامیک این لایه‌ی مرزی، باید معادله‌ی ناویه-استوکس با دقت بررسی شود.

با دقت در معادله‌ی ناویه-استوکس، به سهولت دیده می‌شود که جمله‌ی وشکسانی در برخی حالات خاص بی‌اثر است. اگر شارش بدون تاو باشد: $\nabla \times \mathbf{u} = 0$ ، جمله‌ی وشکسانی بی‌اهمیت است. اگر چرخش داشته باشیم ولی $\nabla \times \mathbf{u}$ ثابت باشد باز هم اثرهای اتلاfi نمود پیدا نمی‌کنند. مورد دیگر حالتی است که $\nabla \times \mathbf{u} = \nabla \phi$ ، یعنی میدان چرخش از یک پتانسیل اسکالر بدست آید، در این صورت باز هم وشکسانی بی‌اثر است.

شرایط مرزی

برای مطالعه‌ی تحول زمانی یک شارش، باید معادلات پیوستگی و ناویه-استوکس بصورت همزمان حل شوند. حل همزمان این معادلات به همراه شرایط مرزی مناسب هر مسأله، جواب یکتایی را برای میدان فشار و میدان شارشی آن مسأله به دست می‌دهد. در حالت کلی دو نوع شرط مرزی داریم. این دو حالت کلی عبارتند از شرط مرزی مربوط به مرز شاردهی وشکسان با

سطوح جامد و همچنین شرایط مرزی در مرز مشترک دو شاره مختلف. در مرز مشترک شاره با سطوح صلب، شرط مرزی عموماً بصورت شرط بدون لغزش در نظر گرفته می‌شود. مطابق شرط مرزی بدون لغزش، حرکت شاره در کنار سطوح صلب بصورتی است که همواره سرعت شاره (مؤلفه‌های عمود و مماس بر سطح) درست روی سطح برابر است با سرعت سطح:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in S} = \mathbf{V}. \quad (۸.۵)$$

دقت کنید که برای شاره‌های اوپلری شرط بالا را فقط برای مؤلفه‌ی عمود بر سطح داشتیم. صحت این شرط مرزی برای آزمایش‌هایی که در شرایط ریزشارش انجام می‌شوند، از مسائل چالشی است [۳۲].

در مورد دسته دوم شرایط مرزی، دو شاره‌ی مختلف بدون اینکه با هم مخلوط شوند در کنار هم حرکت می‌کنند. در این صورت پیوستگی مؤلفه‌های مختلف نیروی وارد بر فصل مشترک به عنوان شرط مرزی در نظر گرفته می‌شود.

دستگاه دکارتی

رابطه‌ی ۷.۵، شکل مستقل از دستگاه معادله‌ی ناویه-استوکس است. این معادله‌ی برداری مجموعه‌ای از سه معادله‌ی دیفرانسیل جفت شده برای مؤلفه‌های سرعت است. در دستگاه دکارتی مؤلفه‌های سرعت را بصورت $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ در نظر می‌گیریم. در این صورت معادلات به صورت زیر می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_x, \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_y, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_z, \end{aligned}$$

و معادله‌ی پیوستگی نیز به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

دستگاه استوانه‌ای

معمولاً برای مطالعه‌ی شارش درون لوله‌ها، دستگاه مختصات استوانه‌ای کارایی بهتری دارد. میدان سرعت را در دستگاه استوانه‌ای بصورت $\mathbf{u} = u_r \hat{r} + u_\phi \hat{\phi} + u_z \hat{z}$ در نظر بگیرید. در این صورت معادلات ناویه-استوکس بصورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\phi^2}{r} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{u_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_\phi}{\partial z} - \frac{u_r u_\phi}{r} \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u_\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r^2} \right), \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \end{aligned}$$

و معادله‌ی پیوستگی بصورت زیر است:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

۲.۵ جریان لایه‌ای

به عنوان اولین و ساده‌ترین مثال می‌خواهیم جریان بین دو صفحه‌ی موازی که به فاصله‌ی d از هم واقع شده‌اند را مطالعه کنیم. فرض کنید یکی از صفحات ثابت است و دیگری با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در این صورت جریانی در شاره‌ی بین دو صفحه برقرار می‌شود. علاوه بر حرکت نسبی صفحات، اختلاف فشار خارجی نیز می‌تواند منشأ تولید جریان باشد. با توجه به شکل ۳.۵ و دستگاه مختصات انتخاب شده، در حالت پایا جریان تنها در راستای موازی صفحات مؤلفه‌ی غیر صفر دارد. صفحات در نقاط $y = \pm \frac{d}{2}$ واقع شده‌اند. پس:

$$\mathbf{u} = u(x, y, z) \hat{x}$$

البته تابع $u(x, y, z)$ به خاطر تقارن به z بستگی ندارد. از طرف دیگر با اعمال معادله‌ی پیوستگی $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ، می‌بینیم که میدان سرعت به x نیز بستگی ندارد. در واقع در جستجوی تابع $u(y)$ هستیم. حدس بالا برای میدان سرعت را در معادله‌ی ناویه-استوکس قرار می‌دهیم. در حالت پایا و با صرف‌نظر کردن از گرانش، اولین نتیجه‌ای که می‌گیریم این است که:

$$\frac{\partial}{\partial x} P = \text{ثابت}.$$

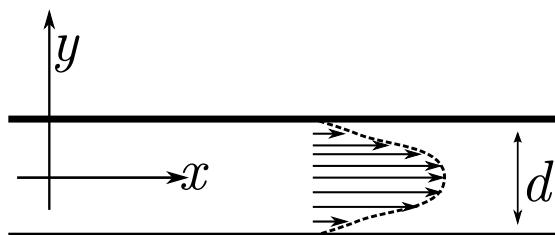
این عدد ثابت اختلاف فشار در واحد طول است که توسط عامل خارجی تولید می‌شود. در ادامه‌ی محاسبات این عدد ثابت را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} P = \frac{\Delta P}{\Delta L}.$$

در حالت پایا به معادله‌ی دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

$$-\frac{\Delta P}{\Delta L} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial}{\partial t} u = 0, \quad (9.5)$$

اکنون با اعمال شرایط مرزی، جواب این معادله را می‌یابیم. در مسأله‌ی دو صفحه‌ی موازی،



شکل ۳.۵ با ایجاد اختلاف فشار در راستای موازی صفحات یا حرکت نسبی دو صفحه، جریان شاره بین دو صفحه برقرار می‌شود.

علاوه بر حرکت نسبی دو صفحه که باعث شارش شاره می‌شوند، شیب فشار نیز می‌تواند شارش تولید کند. این شیب فشار $(\Delta P / \Delta L)$ توسط یک عامل خارجی، مثلاً پمپ جریانی که بین دو صفحه و در بی‌نهایت واقع شده است تولید می‌شود. ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که مطابق **شکل ۳.۵**، صفحات ساکن و جریان فقط به واسطه‌ی حضور شیب فشار (ناشی از یک پمپ)

تولید شود. میدان سرعت به صورت زیر می شود:

$$u(y) = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\Delta P}{\Delta L} \right) (y^2 - d^2/4). \quad (10.5)$$

برای زمانی که مطابق شکل ۴.۵، پمپی وجود ندارد و شیب فشار صفر است، جریان به خاطر حرکت صفحات تولید می شود. فرض کنید صفحه‌ی پائینی ساکن و صفحه‌ی بالایی با سرعت ثابت V حرکت کند. با اعمال شرایط مرزی، میدان سرعت به صورت زیر می شود:

$$u(y) = V (y/d + 1/2). \quad (11.5)$$

برای مسأله‌ی ترکیبی که شیب فشار به همراه حرکت نسبی صفحات وجود دارد، میدان سرعت به شکل زیر می شود:

$$u(y) = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\Delta P}{\Delta L} \right) (y^2 - d^2/4) + U (y/d + 1/2). \quad (12.5)$$

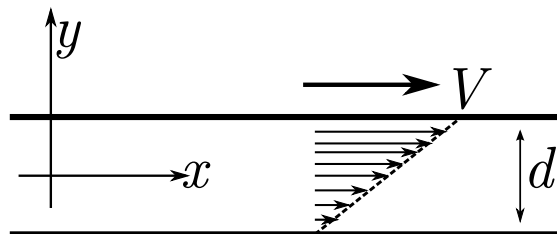
با در دست داشتن میدان سرعت می توانیم تانسور تنش و از آنجا نیروی وارد بر صفحات را محاسبه کنیم. نیروی وارد بر صفحه‌ی پایینی برابر است با:

$$\mathbf{F}_x^D = \int dx dz \sigma_{xy}(y = -d/2) = A \left(-\frac{1}{4} d \frac{\Delta P}{\Delta L} + \eta \frac{U}{d} \right) \hat{x}, \quad (13.5)$$

که در آن A اندازه‌ی سطح صفحات است. به روش مشابه نیروی وارد بر صفحه‌ی بالایی برابر می شود با:

$$\mathbf{F}_x^U = \int dx dz \sigma_{xy}(y = d/2) = A \left(-\frac{1}{4} d \frac{\Delta P}{\Delta L} - \eta \frac{U}{d} \right) \hat{x}. \quad (14.5)$$

نیرویی که از طرف شاره به صفحات وارد می شود دارای دو قسمت است. قسمت ناشی از حرکت نسبی دو صفحه و سهم ناشی از منبع جریان. قسمت ناشی از حرکت صفحات با قانون سوم نیوتن مطابقت دارد و نیروی ناشی از پمپ جریان بصورت یکسان به هر دو صفحه اثر می کنند. جریان ناشی از حرکت نسبی دو صفحه به شارش کوئت و جریان ناشی از اختلاف فشار به شارش پوازوی موسوم هستند. شارش کوئت در شکل ۴.۵ نشان داده شده است.



شکل ۴.۵ با حرکت دادن یکی از صفحات هم می‌توان بین دو صفحه جریان شاره را برقرار کرد.

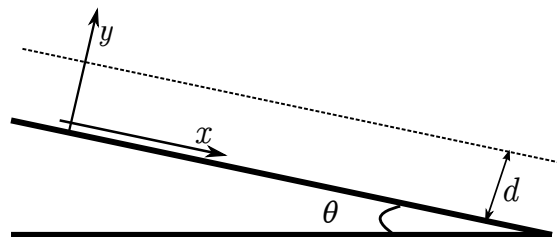
نرخ شارش، حجمی از شاره که در واحد زمان از واحد سطح می‌گذرد، برای شارش پوآزوی برابر می‌شود با:

$$Q = \frac{1}{ld} \int_{-l/2}^{l/2} dz \int_{-d/2}^{d/2} dy u(y) = -\frac{\Delta P}{\Delta L} \frac{d^3}{12\eta}.$$

نرخ شارش متناسب با توان دوم فاصله‌ی بین صفحات است. اگر فاصله‌ی بین صفحات کوچک شود، نرخ شارش نیز بسیار کوچکتر می‌شود. این مشخصه‌ی اصلی شارش‌های لایه‌ای است. در شارش‌های لایه‌ای، حرکت ذرات شاره بصورت لایه‌ای انجام می‌شود و ذرات پخش نمی‌شوند.

شارش روی سطح شیبدار

مطابق شکل ۵.۵، یک سطح شیبدار با زاویه‌ی θ را در نظر بگیرید. لایه‌ی نازکی از یک شاره به ضخامت d به سبب نیروی وزن روی این سطح جاری است. برای بررسی جزئیات میدان شارشی روی سطح شیبدار به حل معادله‌ی ناویه-استوکس می‌پردازیم. برای سهولت، دستگاه مختصات



شکل ۵.۵ لایه‌ی نازکی از شاره روی سطح شیبدار جاری است.

را مطابق شکل ۵.۵، در نظر بگیرید. بنابه تقارن و در شرایط شارش پایا، میدان سرعت تنها مؤلفه‌ای در راستای $\hat{x}$ دارد. حالا باتوجه به معادله‌ی پیوستگی $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x} u_x = 0$ ، کلی ترین جواب میدان سرعت بصورت زیر است:

$$\mathbf{u} = u_x(y)\hat{x}. \quad (15.5)$$

بردار میدان گرانشی که عامل اصلی حرکت است، در دستگاه مختصات انتخاب شده به صورت زیر است:

$$\mathbf{g} = g(\sin \theta, -\cos \theta, 0). \quad (16.5)$$

معادله‌ی ناویه-استوکس در حالت پایا را در نظر بگیرید:

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla P + \rho\mathbf{g} + \eta\nabla^2\mathbf{u}, \quad (17.5)$$

با قرار دادن شکل کلی میدان سرعت می‌بینیم که جمله‌ی سمت چپ معادله‌ی ناویه-استوکس، سهمی در حرکت شاره ندارد:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = u_x \frac{\partial}{\partial x} u_x = 0,$$

در این صورت سه مؤلفه‌ی معادله‌ی ناویه استوکس عبارتند از:

$$-\frac{\partial}{\partial x} P + \rho g \sin \theta + \eta \frac{d^2}{dy^2} u_x = 0, \quad -\frac{\partial}{\partial y} P - \rho g \cos \theta = 0, \quad -\frac{\partial}{\partial z} P = 0.$$

حل دو معادله‌ی آخر از معادلات بالا، میدان فشار را بصورت زیر بدست می‌دهد:

$$P = P_1(x) - \rho g y \cos \theta. \quad (18.5)$$

در مرز مشترک شاره و هوا، فشار باید پیوسته باشد. اگر از تغییرات فشار هوا در نقاط مختلف صرفنظر کنیم، شرط مرزی بصورت $P(x, y = d) = P_0$ خواهد بود که در آن P_0 ، فشار هوا و ثابت است. در واقع فشار در سطح شاره به x بستگی ندارد. پس داریم:

$$P = P_0 - \rho g \cos \theta (y - d). \quad (19.5)$$

حالا برای بدست آوردن مؤلفه‌ی x میدان سرعت به معادله‌ی ناویه استوکس باز می‌گردیم:

$$\eta \frac{d^2}{dy^2} u_x = -\rho g \sin \theta, \quad (20.5)$$

که دارای جواب کلی زیر است:

$$u_x = -\frac{1}{2} \frac{\rho g}{\eta} y^2 \sin \theta + ay + b,$$

که ثابت‌های a و b ، با اعمال شرایط مرزی بدست می‌آیند. شرط مرزی اول بصورت

$$u_x(y=0) = 0,$$

و شرط مرزی دوم از پیوستگی نیروهای برشی در فصل مشترک شاره و هوا بدست می‌آید. از آنجا که شکسانی هوا بسیار ناچیز است پس هوا نمی‌تواند نیروی برشی قابل ملاحظه‌ای به شاره وارد کند. در این صورت به عنوان شرط مرزی دوم، مؤلفه‌ی برشی تانسور تنش در فصل مشترک را برابر با صفر می‌گیریم:

$$\sigma_{xy}(y=d) = 0.$$

با در نظر گرفتن این شرایط داریم:

$$u_x(y) = \frac{1}{2} \frac{\rho g \sin \theta}{\eta} y(2d - y). \quad (21.5)$$

بیشترین مقدار سرعت در ارتفاع $h = d/2$ از سطح شیب‌دار است. آیا این شارش نیرویی به سطح شیب‌دار وارد می‌کند؟ برای محاسبه‌ی نیروی وارد بر سطح اجازه دهید تانسور تنش را در نقطه‌ی $y=0$ محاسبه کنیم:

$$\sigma_{yy}(y=0) = -P_0 - \rho g d \cos \theta,$$

$$\sigma_{xy}(y=0) = \rho g d \sin \theta.$$

نیروی وارد بر سطح بصورت زیر از تانسور تنش محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{F} = \int \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{s} = \hat{x} \int \sigma_{xy} \hat{y} \cdot d\mathbf{s} + \hat{y} \int \sigma_{yy} \hat{y} \cdot d\mathbf{s}.$$

با اندکی محاسبه نیروی کل بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{F}/A = (\rho g d \sin \theta) \hat{x} - (P_0 + \rho g d \cos \theta) \hat{y},$$

که در آن A اندازه‌ی مساحت سطح شیب‌دار است. دقت کنید که اکنون علاوه بر نیروی فشار ناشی از وزن شاره و فشار هوا، نیروی اضافی ناشی از وشکسانی نیز اضافه شده است.

۳.۵ شارش کنار صفحه‌ی لرزان

مطابق شکل ۶.۵، یک صفحه‌ی افقی نامتناهی را در نظر بگیرید که ناحیه‌ی بالای آن با یک شاره‌ی وشکسان پر شده است. اکنون این صفحه را در راستای مماس بر خودش به لرزه و می‌داریم. حرکت صفحه به شاره منتقل می‌شود. جریان تولید شده در شاره در نواحی نزدیکتر به صفحه خیلی بیشتر احساس می‌شود. آیا طول مشخصه‌ای که معیاری برای عمق نفوذ حرکت داخل شاره باشد، وجود دارد؟ این عمق نفوذ به چه عواملی بستگی دارد؟ برای یافتن پاسخی مناسب، اجازه دهید مسأله‌ی شارش روی صفحه‌ی لرزان را دقیق‌تر بررسی کنیم. راستای عمود بر صفحه را z و راستای حرکت مماسی صفحه را با x نشان می‌دهیم. حرکت مماسی صفحه را به صورت $A \sin(\Omega t)$ در نظر می‌گیریم. از تقارن‌های موجود در مسأله نتیجه می‌گیریم که میدان سرعت شاره تنها مؤلفه‌ی x دارد. پس سرعت را بصورت $\mathbf{u} = (u(z, t), 0, 0)$ می‌نویسیم. دقت کنید که این تنها مؤلفه‌ی غیر صفر سرعت، به x وابسته نیست. این نکته از شرط تراکم‌ناپذیری سرعت به‌دست آمده است. با جایگذاری میدان سرعت در معادله‌ی ناویه-استوکس، به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} u &= -\frac{\partial}{\partial x} P + \eta \frac{\partial^2}{\partial z^2} u, \\ 0 &= -\frac{\partial}{\partial z} P - \rho g. \end{aligned} \quad (22.5)$$

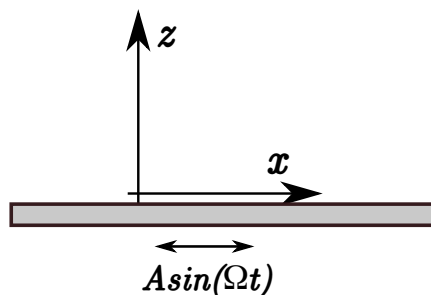
رابطه‌ی دوم، پیغام ساده‌ای دارد، فشار در راستای محور عمودی، همانند حالت ایستا و متناسب با نیروی وزن تغییر می‌کند:

$$P = P_0(x, t) - \rho g z.$$

آیا فشار در راستای مماسی تغییر می‌کند؟ اگر فرض کنیم سطح آزاد مایع در بالا، یک سطح صاف و در تماس با هوا باشد، در این صورت در این ارتفاع فشار یقیناً به مؤلفه‌ی مماسی (x) وابسته نیست. پس

$$\frac{\partial}{\partial x} P = \frac{\partial}{\partial x} P_1 = 0.$$

اکنون برای یافتن شکل صریح میدان سرعت، از تبدیل فوریه به شکل زیر استفاده می‌کنیم:



شکل ۶.۵ صفحه‌ی صلب و افقی واقع در $z = 0$ در راستای محور x نوسان می‌کند. دامنه و فرکانس نوسان با A و Ω مشخص شده‌اند.

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} u_{\omega}(z) e^{-i\omega t}, \quad (23.5)$$

با جایگذاری تبدیل فوریه‌ی میدان سرعت در معادله‌ی به‌دست آمده از معادلات ناویه-استوکس، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} u_{\omega}(z) = -i \frac{\omega \rho}{\eta} u_{\omega}(z), \quad (24.5)$$

کلی‌ترین جواب این معادله‌ی دیفرانسیل به شکل زیر است:

$$u_{\omega}(z) = \alpha e^{(i-1)k(\omega)z} + \beta e^{-(i-1)k(\omega)z}, \quad (25.5)$$

که در آن $k(\omega) = \sqrt{\omega \rho / 2\eta}$ و البته دقت کنید که: $\sqrt{i} = (\sqrt{2}/2)(i + 1)$. ثابت‌های این معادله با شرایط مرزی بدست می‌آیند. اگر فرض کنیم که سطح آزاد مایع در بالا و بسیار دور

از صفحه باشد، به سهولت شرط $\beta = 0$ به دست می‌آید. از طرف دیگر روی صفحه شرطی به صورت زیر داریم:

$$u(z=0, t) = A\Omega \cos(\Omega t) = \frac{A\Omega}{2}(e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}),$$

برای اعمال این شرط مرزی از اتحاد انتگرالی $\int dw e^{i\omega(t-t')} = 2\pi\delta(t-t')$ استفاده کرده و به دست می‌آوریم:

$$\alpha = \frac{A\Omega}{2}[\delta(\Omega - \omega) + \delta(\Omega + \omega)],$$

با جایگذاری این نتیجه در رابطه‌ی تبدیل فوریه، میدان سرعت به دست می‌آید:

$$u(z, t) = A\Omega e^{-z/\delta} [\cos(z/\delta - \Omega t)], \quad (26.5)$$

که در آن $\delta = (1/k(\Omega)) = \sqrt{2\eta/\Omega\rho}$ در واقع δ طول مشخصه‌ای است که عمق نفوذ درون شاره است. حرکت لرزشی صفحه، شاره را نیز به حرکت وامی‌دارد ولی این حرکت در فواصلی از صفحه که از مرتبه‌ی عمق نفوذ است، قابل مشاهده است. علاوه بر عامل میرایی، آشفتگی ناشی از لرزش صفحه بصورت موج رونده‌ای که در راستای $\hat{z}$ منتشر می‌شود، قابل مشاهده است. عمق نفوذ به فرکانس لرزشی صفحه وابسته است. برای تخمین مقادیر عددی، اجازه دهید لرزشی با فرکانس 10^3 Hz که در آب منتشر می‌شود را بررسی کنیم. برای آب $\eta = 10^{-3} \text{ Pa.s}$ و $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ است. پس عمق نفوذ برابر با $\delta = 0.1 \text{ mm}$ به دست می‌آید. لرزش با فرکانس بیشتر، فرصت کمتری برای انتشار دارد و در نتیجه در عمق کمتری نفوذ می‌کند.

۴.۵ معادله‌ی استوکس

در برخی شرایط اصطکاک آنچنان بزرگ است که می‌توانیم از اثرات لختی در مقابل آن صرف‌نظر کنیم. برای بررسی بهتر این شرایط باید مرتبه‌ی بزرگی جمله‌ی $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ را با جمله‌ی $\eta \nabla^2 \mathbf{u}$ در معادله‌ی ناویه-استوکس، مقایسه کنیم. نسبت مرتبه‌ی بزرگی این دو عبارت عدد بدون بعد رینولدز نامیده می‌شود. مرتبه‌ی بزرگی عدد رینولدز برای یک مسأله‌ی نوعی شارش بصورت زیر است:

$$Re = \frac{[\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}]}{\eta \nabla^2 \mathbf{u}} \approx \frac{\rho V/L}{\eta/L^2} = \frac{\rho V L}{\eta}, \quad (27.5)$$

که در آن V یک سرعت مشخصه و L طول مشخصه و ρ و η به ترتیب چگالی و وiskسسانی شاره هستند. اگر شرایط مسأله طوری باشد که $Re \ll 1$ ، سهم نیروی لختی در مقابل نیروی اصطکاک بسیار ناچیز است. در این حالت معادله‌ی تحول سامانه به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$-\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (28.5)$$

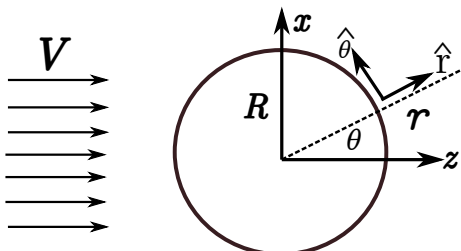
به این رابطه، معادله‌ی استوکس گفته می‌شود. معادله‌ی استوکس، حرکت شاره‌ای را توصیف می‌کند که بدون لختی است. توصیف بیشتر شاره‌های بدون لختی در فصل آینده ارائه می‌شود ولی در اینجا اجازه دهید یک مسأله‌ی خاص ولی مهم را بررسی کنیم.

با آزمایش قطره‌ی روغن میلیکان ادامه می‌دهیم. در این آزمایش با مطالعه‌ی حرکت یک قطره‌ی روغن که در میدان الکتریکی سقوط می‌کند، اطلاعاتی از نسبت بار الکتریکی به جرم به دست می‌آوریم. برای تفسیر نتایج این آزمایش به اطلاعاتی از نیروی اصطکاک هوا که به قطره‌ی روغن وارد می‌شود نیاز داریم. قطره‌ی روغن را می‌توانیم به صورت یک کره‌ی تقریباً صلب در نظر بگیریم که باعث شارش هوا می‌شود. اجازه دهید عدد رینولدز را در این آزمایش برآورد کنیم. اندازه‌ی شعاع قطرات روغن از مرتبه‌ی $1 \mu m$ است که با سرعتی از مرتبه‌ی $V \approx 1 cm/s$ در هوا حرکت می‌کنند. با توجه به مرتبه‌ی بزرگی وiskسسانی هوا که برابر با $\eta \approx 10^{-4} Pa.s$ است، عدد رینولدز از مرتبه‌ی $Re \approx 10^{-4}$ به دست می‌آید. در این آزمایش عدد رینولدز بسیار کوچک است. برای محاسبه‌ی نیروی اصطکاک هوا که به قطره‌ی روغن وارد می‌شود، معادله‌ی استوکس را حل می‌کنیم. جزئیات مسأله‌ی حرکت کره‌ی صلب در شاره‌ی نالخت در قسمت بعدی ارائه می‌شود.

کره‌ی صلب متحرک

یک توپ کروی شکل را در نظر بگیرید که با سرعت ثابت درون یک شاره (هوا یا آب) حرکت می‌کند. این توپ متحرک چه میدان سرعتی در شاره‌ی اطراف خود تولید می‌کند؟ این مسأله را می‌خواهیم برای شرایطی که شارش نالخت است، بررسی کنیم. برای بررسی این مسأله اجازه دهید مسأله را در دستگاه مختصات متصل به توپ بررسی می‌کنیم. در واقع در دستگاه همراه

توپ، میدان شارش به حالت پایا می‌رسد و بررسی مسأله اندکی ساده‌تر است.^۱ در دستگاه همراه توپ، میدان شارش در روی توپ صفر است. این میدان شارش در نقاط خیلی دور، یک مقدار ثابت و برابر با سرعت توپ و در خلاف جهت آن است. شکل ۷.۵، هندسه‌ی این مسأله را مشخص می‌کند که در آن یک کره‌ی صلب به شعاع R در یک شاره با وiskسائی η قرار دارد. در دستگاه همراه توپ، یک شارش یکنواخت با سرعت $\mathbf{V}$ از نقاط خیلی دور به این کره می‌رسد.^۲ هدفمان بدست آوردن میدان شارشی $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ در اطراف کره است. برای این منظور متغیر سرعت را بصورت: $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} + \mathbf{w}(\mathbf{r})$ تغییر می‌دهیم. و میدان $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ را از حل معادله‌های شارشی بدست می‌آوریم. از آنجا که $\mathbf{V}$ ثابت است، نتیجه می‌گیریم که میدان سرعت کمکی $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ نیز در معادله‌ی استوکس صدق می‌کند. سرعت $\mathbf{V}$ را در جهت محور z می‌گیریم. در این صورت بنا به تقارن سمتی، میدان شارش $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ و میدان فشار، به مختصه‌ی سمتی ϕ بستگی ندارند. برای بدست آوردن شکل میدان سرعت و میدان فشار باید دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر حل شوند:



شکل ۷.۵ مشخصات هندسی یک کره‌ی متحرک در شاره.

$$-\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{w} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad (29.5)$$

شرایط مرزی این مسأله بصورت زیرند:

$$\mathbf{w}(r = R) = -\mathbf{V}, \quad \mathbf{w}(r = \infty) = 0. \quad (30.5)$$

دقت کنید که شرط مرزی روی کره به صورتی است که در دستگاه همراه کره میدان سرعت روی

^۱ از آنجا که معادلات استوکس مستقل از زمان هستند، می‌توانیم جواب‌های آن را بصورت لحظه‌ای بیابیم.
^۲ سرعت حرکت توپ در دستگاه آزمایشگاه برابر با $-\mathbf{V}$ است.

کره صفر می‌شود. چون شارش تراکم ناپذیر فرض می‌شود، پس $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$ است. در این صورت و در هر لحظه میدان سرعت از یک پتانسیل برداری بصورت $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{A}$ بدست می‌آید. برای حل معادلات و یافتن این پتانسیل برداری، از تقارن‌های مسئله استفاده می‌کنیم.

تبدیل $r \rightarrow -r$ (پاریته) را در نظر بگیرید. تحت این تبدیل انتظار داریم سرعت $\mathbf{V}$ و میدان شارشی شار به $\mathbf{w}$ یعنی $\mathbf{w}$ تغییر علامت دهند. در نتیجه، تحت تبدیل پاریته، پتانسیل برداری تغییر علامت نمی‌دهد. از طرف دیگر با توجه به خطی بودن معادله‌ی استوکس انتظار داریم که میدان سرعت $\mathbf{w}$ بصورت خطی به سرعت $\mathbf{V}$ وابسته باشد. در این صورت کلی‌ترین رابطه‌ی بین پتانسیل برداری و سرعت $\mathbf{V}$ به شکل $\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \mathbf{V}$ نوشته می‌شود. که در آن $\mathbf{B}$ یک تابع برداری است که تحت پاریته تغییر علامت می‌دهد. از آنجا که $\mathbf{B}$ فقط به بردار مکان بستگی دارد، تنها امکان برای آن بصورت $\mathbf{B} = \nabla f(r)$ است. در واقع با استفاده از نتایج تقارنی تحت تبدیل پاریته، نتیجه گرفته‌ایم که برای محاسبه‌ی میدان سرعت، باید میدان اسکالر $f(r)$ بدست آید. این میدان اسکالر تنها به بردار مکان بستگی دارد. از طرف دیگر و با توجه به اینکه این تابع اسکالر است پس فقط باید به اندازه‌ی بردار مکان بستگی داشته باشد. داریم:

$$\mathbf{A} = (\nabla f) \times \mathbf{V} = \nabla \times (f\mathbf{V}). \quad (31.5)$$

اکنون معادله‌ی استوکس را در نظر بگیرید، با محاسبه‌ی تاو طرفین آن داریم:

$$\nabla \times \eta \nabla^2 \mathbf{w} = \nabla \times \nabla P = 0.$$

از این واقعیت که تاو هر گرادیانی صفر است استفاده کرده‌ایم. پس:

$$\nabla^2 \nabla \times \mathbf{w} = \nabla^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla^2 (\nabla \nabla \cdot - \nabla^2) (\nabla \times (f\mathbf{V})) = 0,$$

اکنون برای یافتن تابع اسکالر f معادله‌ی زیر را حل می‌کنیم:

$$\nabla^4 (\mathbf{V} \times \nabla f) = 0.$$

حل ساده‌ی این معادله بصورت زیر است:

$$\nabla^4 f = \text{ثابت}, \quad (32.5)$$

چون میدان سرعت به نوعی از مشتق مرتبه‌ی چهارم f بدست می‌آید و از طرف دیگر طبق شرط مرزی، سرعت در بی‌نهایت صفر است پس به سادگی نتیجه می‌شود که ثابت موجود در جواب بالا باید برابر با صفر باشد. اکنون برای حل این معادله‌ی جدید، قرار می‌دهیم: $\nabla^2 f = \psi$. پس باید معادله‌ی $\nabla^2 \psi = 0$ حل شود. با توجه به شکل لاپلاسی در دستگاه قطبی کروی داریم:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} \psi = 0,$$

کلی‌ترین جواب این معادله به شکل $\psi = \frac{a}{r} + c$ است. اینجا نیز به علت صفر شدن سرعت در بی‌نهایت، ثابت c صفر می‌شود. حالا برای یافتن تابع f ، معادله‌ی زیر را داریم:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} f = \frac{a}{r},$$

کلی‌ترین جواب سازگار با شرط مرزی به صورت زیر می‌شود:

$$f = ar + \frac{b}{r},$$

که ثابت‌های a و b با اعمال شرط مرزی روی کره بدست خواهند آمد. پیش از بدست آوردن این ضرایب و برای استفاده‌ی بعدی دقت کنید که داریم:

$$\nabla f = (a - \frac{b}{r^2}) \hat{\mathbf{r}}.$$

برای اعمال شرط مرزی، اجازه دهید شکل کامل میدان سرعت را بدست آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \nabla \times \nabla \times (f\mathbf{V}) = (\nabla \nabla \cdot - \nabla^2)(f\mathbf{V}) \\ &= \nabla(\nabla \cdot (f\mathbf{V})) - \nabla^2 f\mathbf{V} \\ &= \nabla(\nabla f \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 f\mathbf{V} \\ &= \nabla((\frac{a}{r} - \frac{b}{r^2})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})) - \frac{a}{r}\mathbf{V} \\ &= -\frac{a}{r}(\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{V}) + \frac{b}{r^3}(3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{V}). \end{aligned} \quad (33.5)$$

شرط مرزی بدون لغزش روی کره را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{w}(r=R) = -\frac{a}{R}(\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{V}) + \frac{b}{R^3}(3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{V}) = -\mathbf{V}, \quad (34.5)$$

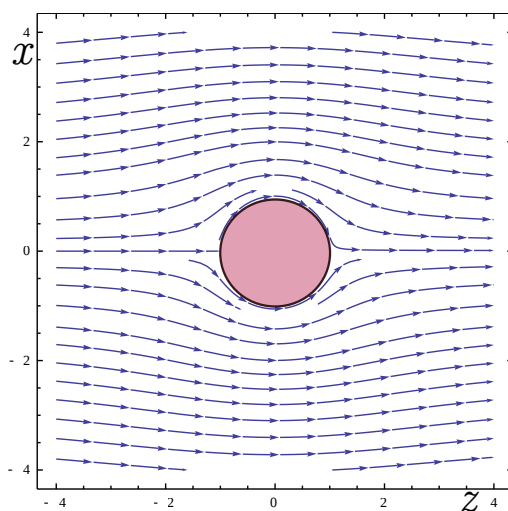
برای اینکه این شرط مرزی در هر نقطه‌ی دلخواه روی کره برقرار باشد کافیت ثابت‌ها در شرایط زیر صدق کنند:

$$-\frac{a}{R} - \frac{b}{R^3} = -1, \quad -\frac{a}{R} + 3\frac{b}{R^3} = 0, \quad (35.5)$$

که از اینجا ثابتهای a و b بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$a = \frac{3}{4}R, \quad b = \frac{1}{4}R^3, \quad (36.5)$$

در نهایت با قرار دادن ثابت‌ها، میدان سرعت شاره به شکل زیر بدست می‌آید:



شکل ۸.۵ یک جریان یکنواخت از نقاط بسیار دور به یک کره می‌رسد. در این شکل خطوط جریان اطراف این کره‌ی ساکن، نشان داده شده است.

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{V} - \left(\frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) (I + \hat{r}\hat{r}) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 (I - 3\hat{r}\hat{r}) \right) \cdot \mathbf{V}. \quad (37.5)$$

میدان سرعت کره در دستگاه مختصات قطبی کروی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_r = V \left[-\frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 + 1 \right] \cos \theta, \quad u_\theta = V \left[\frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 - 1 \right] \sin \theta. \quad (38.5)$$

خطوط جریان اطراف کره در شکل ۸.۵ نشان داده شده است. برای سهولت، میدان سرعت ناشی از کره‌ی متحرک را بصورت ماتریسی زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{V} + \mathbf{V}, \quad (39.5)$$

که در آن، ماتریس $\mathbf{M}$ ، بصورت زیر است:

$$\mathbf{M} = - \left(\frac{3}{4} \left(\frac{R}{r} \right) (I + \hat{r}\hat{r}) + \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^3 (I - 3\hat{r}\hat{r}) \right).$$

اکنون میدان فشار شاره را محاسبه می‌کنیم. برای محاسبه‌ی فشار از معادله‌ی ناویه-استوکس بصورت زیر شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \nabla P &= \eta \nabla^2 \mathbf{w} = \eta \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{A}) = \eta \nabla^2 (\nabla \times \nabla \times (f\mathbf{V})) \\ &= \eta \nabla^2 (\nabla \nabla \cdot - \nabla^2)(f\mathbf{V}) = \eta \nabla^2 (\nabla \nabla \cdot)(f\mathbf{V}) - \eta (\nabla^4 f) \mathbf{V} \\ &= \eta \nabla \nabla \cdot \nabla^2 f \mathbf{V} = \eta \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla) \nabla^2 f = \eta \nabla (\mathbf{V} \cdot \nabla) \left(\frac{2a}{r} \right) \\ &= \eta \nabla \left(-\frac{2a}{r^2} (\mathbf{V} \cdot \hat{r}) \right) = -\nabla \left(\frac{3}{4} \eta (\mathbf{V} \cdot \hat{r}) \frac{R}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (40.5)$$

اکنون با انتگرال‌گیری از طرفین میدان فشار بدست می‌آید:

$$P = P_0 - \frac{3}{4} \eta \mathbf{V} \cdot \hat{r} \frac{R}{r^2}. \quad (41.5)$$

حالا که میدان سرعت و فشار را در تمام نقاط فضا محاسبه کرده‌ایم، می‌توانیم مؤلفه‌های مختلف تانسور تنش و از آنجا نیروی وارد بر کره را بدست آوریم. بهتر است مؤلفه‌های تانسور تنش را در دستگاه قطبی کروی بررسی کنیم. ارتباط مؤلفه‌های مختلف تانسور تنش در دستگاه‌های قطبی و دکارتی پیش از این مطالعه شده است. با اندکی محاسبه می‌توانید نشان دهید:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P + 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_{r\theta} &= \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (42.5)$$

و در نهایت و روی کره خواهیم داشت:

$$\sigma_{rr}(r=R) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r=R) = -\frac{3}{4} \frac{\eta}{R} V \sin \theta.$$

بنا به تقارن می‌دانیم که نیروی وارد بر کره فقط در راستای سرعت کره یعنی z ، مؤلفه دارد. پس از ابتدا مؤلفه‌ی نیرو در راستای سرعت کره را محاسبه می‌کنیم:

$$F_z = \oint (-P \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) ds, \quad (43.5)$$

و از آنجا نیروی کل وارده به کره برابر می‌شود با:

$$\mathbf{F} = 6\pi\eta R \mathbf{V}. \quad (44.5)$$

این نیرویی است که به یک کره‌ی ساکن واقع در جریان یکنواخت وارد می‌شود. اکنون به راحتی می‌توانیم در مورد نیروی وارد بر یک کره‌ی متحرک در یک شاره‌ی ساکن، بحث کنیم. اگر کره با سرعت $\mathbf{W}$ حرکت کند، نیروی کششی برابر با $\mathbf{F} = -6\pi\eta R \mathbf{W}$ از طرف شاره به کره وارد می‌شود. منشا این نیروی استوکس، وشکسانی شاره است. در واقع چسبناکی لایه‌های شاره در نزدیکی سطح کره، عامل اساسی در کشیده شدن توپ توسط شاره است.

برای مقاصد تجربی، معمولاً به جای نیروی اصطکاک از ضریب کششی C_D ، استفاده می‌شود. این ضریب به صورت نسبت بین نیروی اصطکاک و نیروی مشخصه‌ای که از ضرب کردن $\frac{1}{2}\rho W^2$ در سطح πR^2 به دست می‌آید، تعریف می‌شود:

$$C_D = \frac{6\pi\eta RW}{\frac{1}{2}\rho W^2 \times \pi R^2}.$$

ضریب کششی برای کره در شارش نامتناهی برابر می‌شود با $C_D = 12/Re$ ، که در آن عدد رینولدز به صورت $Re = R\rho W/\eta$ تعریف شده است. در آزمایش‌های تجربی، عوامل مختلفی باعث انحراف از این نتیجه‌ی ساده برای ضریب کششی می‌شوند. انحراف از تقارن کروی، وجود دیواره‌های محدود کننده‌ی شاره و برهمکنش با دیگر اجسام غوطه‌ور در شاره، مهم‌ترین دلایل برای انحراف از قانون ساده‌ی بالا هستند.

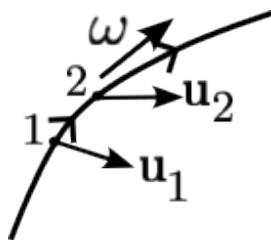
۵.۵ دینامیک چرخش

چرخش شاره یا ورتیسیته با میدان برداری $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \mathbf{u}$ مشخص می‌شود. مطالعه‌ی دینامیک

میدان چرخش آموزنده است. برای این منظور، چرخش (کرل) طرفین معادله‌ی ناویه-استوکس را محاسبه می‌کنیم تا به رابطه‌ی زیر برسیم:

$$\frac{d}{dt}\omega = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega, \quad (45.5)$$

که در آن $\nu = \eta/\rho$ و از شرط تراکم ناپذیری $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ استفاده شده است. رابطه‌ی بالا را می‌توانیم از معادله‌ی حرکت چرخشی یک عنصر کروی شکل شاره نیز بدست آوریم. معادله‌ی حرکت چرخشی را بصورت $\frac{d}{dt}L_i = \tau_i$ در نظر بگیرید که در آن τ گشتاور وارد شده بر یک عنصر کروی شکل شاره و L تکانه‌ی دورانی است. تکانه‌ی دورانی را می‌توانیم بصورت $L_i = I_{ij}\omega_j$ در نظر بگیریم که I_{ij} لختی دورانی است. برای یک عنصر شاره با تقارن کروی و چگالی یکنواخت، لختی دورانی بصورت $I_{ij} = \int d^3x \rho (x^i \delta_{ij} - x_i x_j)$ است. می‌توان دید که $I_{ij} = \frac{1}{2} I_0 \delta_{ij}$ که در آن $I_0 = \int d^3x \rho x^2$ برای بررسی معادله‌ی حرکت لازم است تا تغییرات زمانی تکانه‌ی دورانی محاسبه شود. در محاسبه‌ی تغییرات زمانی تکانه‌ی دورانی، باید به این موضوع توجه کرد که یک عنصر حجم کروی شکل شاره با گذشت زمان، دچار تغییر شکل می‌شود. در این صورت باید تغییرات زمانی لختی دورانی را با دقت محاسبه کرد. عبارت $(\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}$ در معادله‌ی حرکت ۴۵.۵ نشان از این تغییرات دارد. اصطکاک بین لایه‌های مجاور شاره، گشتاوری متناسب با $\nu \nabla^2 \omega$ به معادله‌ی حرکت اضافه کرده است. جزییات این محاسبه را اینجا نمی‌آوریم.



شکل ۹.۵ دو نقطه‌ی بسیار نزدیک به هم روی خط میدان چرخش را در نظر بگیرید. حرکت این دو نقطه آنچنان است که گویی سوار شاره شده و همراه آن منتقل می‌شوند.

معادله‌ی دینامیک چرخش (معادله‌ی ۴۵.۵) را به صورتی دیگر نیز می‌توان تفسیر کرد. فرض کنید در شاره اصطکاک نداریم. در این صورت معادله‌ی دینامیک چرخش بیان می‌کند که خطوط میدان چرخش، مانند عناصر مادی شاره حرکت می‌کنند. قبلاً خطوط هر میدان برداری را تعریف

کرده‌ایم. اینجا نیز منظور از خطوط میدان چرخش، خطوطی فرضی در فضا هستند که مماس بر آنها در هر نقطه، راستای میدان چرخشی در آن نقطه را نشان می‌دهد. علاوه بر این، چگالی خطوط نیز با شدت میدان چرخشی متناظرند. پس در شاره‌ای که اصطکاک ندارد خطوط میدان، همراه شاره حرکت می‌کنند. برای فهمیدن این موضوع مطابق شکل ۹.۵، یک خط میدان چرخش با دو نقطه‌ی بسیار نزدیک به هم ۱ و ۲ روی آن را در نظر بگیرید. عبارت $(\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}$ را برای این دو نقطه‌ی روی خط میدان در نظر بگیرید:

$$(\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} = |\omega| \frac{\delta \mathbf{u}}{\ell} \longrightarrow \frac{1}{|\omega|} \frac{d}{dt} \omega = \frac{\delta \mathbf{u}}{\ell} \quad (۴۶.۵)$$

که در آن $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$ سرعت نسبی نقاط ۱ و ۲ است و ℓ فاصله‌ی بین آن دو نقطه است. مطابق رابطه‌ی اخیر، از دید ناظری که همراه شاره و با سرعت شاره در نقطه‌ی ۱ حرکت می‌کند، بردار ω (برداري که دو نقطه‌ی ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کند) با سرعت نسبی دو نقطه حرکت می‌کند. این موضوع در مورد هر دو مولفه‌ی طولی (در راستای خط میدان چرخش) و عرضی (عمود بر راستای خط میدان) حرکت نسبی درست است. توجه کنید که ω ، تغییرات زمانی بردار چرخش از دید ناظر همراه شاره است. به بیان دیگر، نقاط روی خطوط میدان چرخش، مانند نقاط مادی شاره حرکت می‌کنند. موضوع حرکت همرفتی خطوط میدان چرخش و همراه شدن آنها با شارش، پیش از این در قالب قضیه‌ی کلون بیان شده بود. یک مسیر بسته که همراه شاره حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. برای تصور بهتر، می‌توان یک نخ بسیار سبک که سوار شاره شده است را تصور کرد. سطح همراه این نخ بسته را با $\delta \mathbf{s}$ نشان می‌دهیم. قدرت چرخش در یک نقطه‌ی معین درون شاره را می‌توان بصورت $\delta C = \omega \cdot \delta \mathbf{s}$ تعریف کرد. به سهولت می‌توان نشان داد که برای شارش بدون اصطکاک $\frac{d}{dt} \delta C = 0$. این رابطه بیان دیگری از همرفت میدان چرخش و قضیه‌ی کلون است.

در حضور اتلاف، علاوه بر پدیده‌ی همرفتی اثر دیگری نیز اضافه می‌شود و آن قابلیت پخش شدن چرخش در شاره است. این موضوع از عبارت $\nu \nabla^2 \omega$ که به معادله‌ی حرکت اضافه شده است، برداشت می‌شود. در واقع اگر از اثرهای همرفتی صرف‌نظر کنیم و تنها اصطکاک را در نظر بگیریم به معادله‌ی دیفرانسیلی به شکل $\partial_t \omega = \nu \nabla^2 \omega$ می‌رسیم. مطابق این معادله، اگر ابتدا در نقاط خاصی از شاره چرخش داشته باشیم، بعد از گذشت زمان و علی‌رغم نبود همرفت، باز

هم این چرخش در جاهای دیگر مشاهده خواهد شد. تفاوت‌های بنیادی بین دو پدیده‌ی پخش و همرفت وجود دارد که لازم به توجه است.

برای برقراری ارتباط بهتر با مفاهیم همرفت و پخش، مقایسه با اتفاقی مشابه آن‌چه که برای یک قطره جوهر در آب یا مقداری عطر در هوا می‌افتد، کمک می‌کند. توجه کنید در دو مثال اخیر، آن چیزی که پخش می‌شود، ذرات جوهر و عطر و در واقع میدان چگالی آنهاست که در شارهای اطراف پخش می‌شود. در این مثالها علاوه بر پخش، همرفت نیز وجود دارد. حرکت همرفتی ذرات جوهر در آب، بصورت لایه‌ای، ناهمسانگرد و در راستای حرکت لایه‌های آب است. سرعت همرفت جوهر متناسب با سرعت آب است. از طرف دیگر پخش جوهر در آب ساکن و بصورت همسانگرد صورت می‌گیرد. سرعت متوسط پخش با ضریب پخش که متناسب با دمای محیط و عکس شعاع ذرات جوهر است، کنترل می‌شود.

در مورد موضوع مورد نظر ما که پخش میدان چرخشی در شار است، ضریب پخش برابر با ν است. ویسکوزیته‌ی بزرگتر با پخش راحت‌تر و سریعتر میدان چرخشی متناظر است.

بررسی یک مثال ساده از پخش چرخش آموزنده است. جریان کوئت بین دو صفحه‌ی صلب نامتناهی و موازی را در نظر بگیرید. صفحات در $y = \pm \frac{d}{2}$ قرار دارند. صفحه‌ی بالایی با سرعت $V\hat{x}$ و پایینی با سرعت $-V\hat{x}$ حرکت می‌کند. برای درک بهتر موضوع پخش چرخش، لازم است تا رفتار ناپایای زمان‌های اولیه را در نظر بگیریم. نظر به تقارن مساله، میدان سرعت شکل کلی به صورت $\mathbf{u} = u_x(y, t)\hat{x}$ خواهد داشت. چرخش متناظر بصورت $\hat{\omega}_z(y, t)$ است و در معادله‌ی زیر صدق می‌کند:

$$(\partial_t - \nu \partial_y^2) \omega_z(y, t) = 0. \quad (47.5)$$

برای حل معادله‌ی دیفرانسیل بالا، لازم است تا شرط اولیه را داشته باشیم. فرض کنید در لحظه‌ی $t = 0$ ، صفحات بصورت آنی از حالت سکون به سرعت مورد نظر برسند، در این صورت انتظار داریم میدان سرعت شار در این لحظه همه‌جا صفر باشد و فقط لایه‌های مجاور صفحه سرعتی

برابر با سرعت صفحه داشته باشند:

$$u_x(y, \circ) = \begin{cases} V & y = \frac{d}{4}, \\ \circ & -\frac{d}{4} < y < \frac{d}{4}, \\ -V & y = -\frac{d}{4}, \end{cases} \quad (48.5)$$

در این صورت شرط اولیه‌ی میدان چرخش شاره بصورت زیر می‌شود:

$$\omega_z(y, \circ) = -\frac{V}{4} \left(\delta(y - \frac{d}{4}) + \delta(y + \frac{d}{4}) \right). \quad (49.5)$$

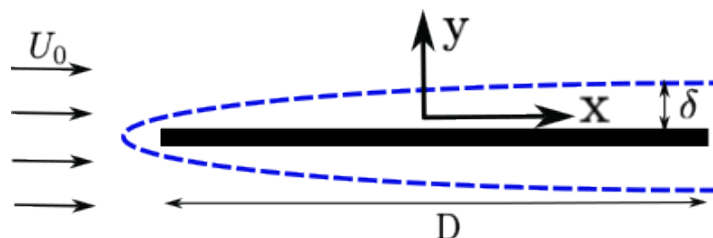
توجه کنید که در نوشتن روابط بالا، اندکی از حساسیت‌های ریاضی کاسته‌ایم و با امتداد دادن فضای مورد نظر به ناحیه‌ی خارج صفحات، ناپیوستگی روی مرزها را با تابع دلتا جایگزین کرده‌ایم. این ساده‌انگاری، اجازه می‌دهد تا جواب‌های معادله‌ی پخش را راحت‌تر حدس بزنیم. اگر ویسکوزیته‌ی شاره صفر بود، با توجه به اینکه در لحظه‌ی اول چرخش نداریم، قاعدتا در زمانهای بعدی نیز چرخش تولید نمی‌شد. وضعیت در حضور اصطکاک متفاوت است. معادله‌ی ۴۷.۵ با شرط مرزی ۴۹.۵، متناظر با جوابی است که نشان می‌دهد در زمانهای بعدی چرخش به نواحی دورتر از صفحات نیز نفوذ می‌کند. شرط اولیه‌ی چرخش را بصورت دو تابع گاوسی با عرض بی‌نهایت کوچک که بیشینه‌شان نزدیک صفحات رخ داده نظر بگیرید، در زمانهای بعدی جواب‌های تقریبی به صورت زیر در معادله ۴۷.۵ صدق می‌کنند:

$$\omega_z(y, t) \sim -\frac{V}{\sqrt{4\pi\delta}} \left(\exp\left[-\frac{(y - \frac{d}{4})^2}{4\delta^2}\right] + \exp\left[-\frac{(y + \frac{d}{4})^2}{4\delta^2}\right] \right), \quad (50.5)$$

که در آن $\delta(t) = \sqrt{2\nu t}$ جواب بالا تفسیر سراسری دارد. در زمان دلخواه t ، چرخش تا فاصله‌ی δ از صفحات به درون شاره نفوذ کرده است. در واقع عمق نفوذ $\delta(t)$ ، ضخامت لایه‌ای نزدیک مرز را نشان می‌دهد که در زمان t ، شارش درون آن لایه دارای چرخشی مخالف صفر است. با گذشت زمان، عمق نفوذ بیشتر می‌شود و در نهایت در زمانهای خیلی بزرگ، شارش به حالت پایا می‌رسد که در آن کل شارش دارای چرخش خواهد بود. جواب‌های حالت پایای با میدان سرعت $u_x(y) = 2(V/d)y$ و میدان چرخش $\omega_z(y) = -(V/d)$ داده می‌شوند.

۶.۵ لایه‌ی مرزی

شارش‌هایی را در نظر بگیرید که در حضور مرزهای صلب صورت می‌پذیرند. از شرط مرزی شارش بدون لغزش، انتظار داریم در همسایگی مرزها، شارش دچار تغییرات مکانی سریعی شود. در حقیقت در روی مرز، شارش حتما مولفه‌ی چرخشی بزرگی باید داشته باشد. موضوع مهم این است که آیا این ناحیه‌ی چرخشی فقط در یک لایه‌ی میکروسکوپی مجاور مرزها شکل می‌گیرد یا به ناحیه‌ی وسیع‌تری درون شاره کشیده می‌شود؟ در چنین شرایطی، اغلب می‌توان لایه‌ای نزدیک مرزها تشخیص داد که درون آن لایه‌ی مرزی، شارش دارای چرخش است و در خارج آن لایه، شارش دارای چرخش قابل ملاحظه‌ای نیست. در این صورت عمده‌ی اتلاف انرژی شارشی، درون این لایه‌ی مرزی صورت می‌گیرد و میدان شارشی خارج آن لایه‌ی مرزی را می‌توان با میدان پتانسیلی جایگزین کرد. موضوع وجود لایه‌ی مرزی که حدس اساسی پرانتل است، عمومیت ندارد ولی در بسیاری از شرایط شارشی صادق است. اندازه‌ی ضخامت لایه‌ی مرزی با افزایش عدد رینولدز کاسته می‌شود. برای شرایطی که لایه‌ی مرزی بسیار نازک شده است، ممکن است بتوانیم از تقریب شارش پتانسیلی در ناحیه‌ی وسیعی از فضا استفاده کنیم.



شکل ۱۰.۵ مقطع یک نوار صلب بسیار بلند که در معرض جریان فرودی است را می‌بینید. لایه‌ی مرزی تشکیل شده در اطراف جسم بصورت خط-چین نشان داده شده است.

مطابق شکل ۱۰.۵، یک جسم صلب با مقطع مستطیل شکل بسیار نازک که در راستای طولی بسیار بلند است را در نظر بگیرید. در شکل مقطع این جسم نشان داده شده است. این جسم از طرف یکی از لبه‌های تیزمقطعش در معرض جریان فرودی با سرعت U_0 قرار دارد. کشیدگی مقطع این جسم برابر با D است. طول جسم در راستای عمود بر صفحه‌ی تصویر بسیار بلند است. دستگاه مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که محور x موازی سطح بالایی مقطع و

محور y بر آن عمود باشد. در ادامه ابتدا بصورت شهودی در مورد ضخامت لایه‌ی مرزی در مجاورت سطح بالایی این جسم صحبت می‌کنیم. سپس با جزییات بیشتری معادلات ساده‌ی شده‌ی شارش درون و برون لایه‌ی مرزی را مطالعه می‌کنیم.

مطابق شکل انتظار داریم در حالت پایا، یک لایه‌ی مرزی اطراف سطح شکل بگیرد که ضخامتش با فاصله از لبه‌ی تیزی که در معرض جریان قرار دارد، بیشتر می‌شود. می‌خواهیم ضخامت لایه‌ی مرزی در یک نقطه به فاصله‌ی D از لبه را تخمین بزنیم. برای درک نحوه‌ی تشکیل لایه‌ی مرزی، فرض کنید جریان بصورت آنی برقرار می‌شود. ابتدا لبه‌ی تیز جلویی در تماس با جریان قرار می‌گیرد. شرط مرزی بدون لغزش، با تزریق چرخش به شارش در مرزها همراه است. چرخش تولید شده در لبه‌ی تیز (و البته در تمام لبه‌های دیگر) در تمام جهات به درون شاره پخش می‌شود. بعد از گذشت زمان t ، چرخش تولید شده در لبه‌ی جلویی به اندازه‌ی $\sqrt{\nu t} \sim \delta$ در راستای $\hat{y}$ پخش می‌شود. از دید ناظر همراه شاره، در این زمان مقطع جسم به اندازه‌ی $U_\infty t$ به جلو رفته است. در نتیجه، ضخامت لایه‌ی مرزی در نقطه‌ای به فاصله‌ی D از لبه برابر می‌شود با: $\delta(D) \sim \sqrt{\nu D/U_\infty}$. با استفاده از عدد رینولدز که به صورت $Re = DU_\infty/\nu$ تعریف می‌شود، ضخامت لایه‌ی مرزی با $D/\sqrt{Re} \sim \delta$ داده می‌شود. با توجه به حرکت شاره، این چرخش تولید شده، حرکت همرفتی هم خواهد داشت.

اکنون می‌توانیم کمی دقیق‌تر به ساختار لایه‌ی مرزی نگاه کنیم. دستگاه مختصات را مطابق شکل ۱۰.۵ در نظر بگیرید. فرض کنید یک لایه‌ی مرزی با ضخامت δ در مجاورت این سطح گوه داریم. درون لایه‌ی مرزی شارش دارای چرخش و خارج آن فاقد چرخش است. می‌خواهیم معادلات شارشی درون و برون لایه‌ی مرزی و البته ضخامت لایه‌ی مرزی را بدست آوریم. مولفه‌های میدان سرعت درون لایه‌ی مرزی را با $\mathbf{u}_{in} = (u, v, \omega)$ نشان می‌دهیم. در خارج ناحیه‌ی مرزی، میدان سرعت بصورت $\mathbf{u}_{out} = (U, 0, 0)$ داده می‌شود. برای اینکه بتوانیم بحث را بصورت عام‌تر و در مجاورت هر سطح دلخواهی ادامه دهیم، طول مشخصه‌ای که در راستای موازی سطح در آن سرعت تغییر قابل ملاحظه‌ای داشته باشد را با L نشان می‌دهیم. در مورد مثال بالا $L = D$ است. کوچک بودن ضخامت لایه‌ی مرزی به صورت $\delta \ll L$ است. شرایط مرزی نیز به این صورت است که در روی سطح سرعت شارش صفر و در فاصله‌ی بسیار دور از سطح سرعت بصورت $\mathbf{u}_{out}(\infty) = (U_\infty, 0, 0)$ داده شده است.

از نازک بودن لایه‌ی مرزی نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

با تقریب‌های بالا، مولفه‌ی موازی صفحه‌ی معادله‌ی ناویه استوکس و معادله‌ی پیوستگی درون لایه‌ی مرزی بصورت زیر می‌شوند:

$$(\partial_t + u\partial_x + v\partial_y)u = -\frac{1}{\rho}\partial_x p + \nu\partial_y^2 u, \quad \partial_x u + \partial_y v = 0. \quad (51.5)$$

لایه‌ی مرزی در انتهای لایه‌ی درونی و جایی است که در آنجا اصطکاک و اینرسی از یک مرتبه می‌شوند $\nu\partial_y^2 u \sim u\partial_x u$. از طرف دیگر در این نقطه داریم $u \sim U_0$. با جایگذاری داریم: $\nu U_0 / \delta^2 \sim U_0^2 / L$. در نتیجه می‌بینیم که $\delta \sim L / \sqrt{Re}$ که در آن $Re = LU_0 / \nu$. اکنون با جایگذاری مقادیر بزرگی در معادله‌ی پیوستگی می‌بینیم که مرتبه‌ی بزرگی مولفه‌ی عمودی سرعت درون لایه‌ی مرزی بصورت $v \sim U_0 / \sqrt{Re}$ است.

با در دست داشتن اطلاعات بالا، می‌توانیم مولفه‌ی عمودی معادله‌ی ناویه استوکس درون لایه‌ی مرزی را بررسی کنیم. نظر به کوچک بودن تمام جملات این معادله، نتیجه‌ی بدست آمده لازم می‌دارد که $\partial_y p = 0$ و فشار درون لایه‌ی مرزی با فاصله از سطح تغییر نکند. در نتیجه دسته معادلات ۵۱.۵، تمامی معادلات لازم برای توصیف شارش درون لایه‌ی مرزی را تشکیل می‌دهند. نکته‌ی مهم این است که عبارت $\partial_x P$ موجود در این معادلات باید از معادلات ناحیه‌ی خارجی استخراج شده و بصورت کمیت داده شده وارد این معادلات شوند. در مورد معادلات توصیف کننده‌ی ناحیه‌ی خارجی، توجه کنید که در این ناحیه اصطکاک نداریم و معادله‌ی تحولی بصورت زیر می‌شود:

$$\partial_t U + U\partial_x U = -\frac{1}{\rho}\partial_x p. \quad (52.5)$$

در حالت پایا، معادله‌ی بالا را می‌توان با ثابت بودن ترکیب برنولی $P/\rho + \frac{1}{2}U^2$ روی خطوط جریان معادل دانست.

توجه کنید که علاوه بر شرایط مرزی بحث شده، جواب‌های ناحیه‌ی درونی و بیرونی باید در روی لایه‌ی مرزی به هم برسند:

$$u(x, y, t)|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow U(x, y). \quad (53.5)$$

البته برای یافتن جوابی یکتا برای مساله‌ی غیر پایا، لازم است تا $u(x, y, t = 0)$ نیز داده شود. یکی از موارد مهمی که روش بالا در مورد آن پاسخگو نیست، شارشی است که به سر یک لوله‌ی باز می‌رسد. برای تصور بهتر، لوله‌ی بلندی با دو سر باز را تصور کنید که در راستای طولی خود درون شاره‌ای حرکت می‌کند. اتفاقی که در این مورد می‌افتد این است که در یک ناحیه درون لوله و نزدیک سر ورودی لوله، شارش کم و بیش پتانسیلی است و در نواحی دیگر کاملاً چرخشی است. طول ناحیه‌ی ورودی به عوامل مختلفی بستگی خواهد داشت. بحث و توصیف بیشتر این موضوع به خواننده واگذار می‌شود.

بررسی ایده‌ی لایه‌ی مرزی متناظر با حرکت‌های نوسانی در کنار صفحات صلب نیز از حیطه‌ی توصیف بالا فراتر است. پیش از این موضوع شارش کنار صفحه‌ی لرزان را بررسی کرده بودیم. در آن مورد نشان داده بودیم که عمق نفوذ بصورت $\delta = \sqrt{2\nu/\Omega}$ است که در آن Ω فرکانس حرکت نوسانی است. لازم به توجه است که در این گونه مسایل عمق نفوذ، ضخامت لایه‌ی مرزی را نشان می‌دهد.

۷.۵ انواع شرایط مرزی

در مثال‌های پیشین دیدیم که برای بررسی هر مساله‌ی شارشی، شرایط مرزی مربوطه باید اعمال شوند. در این قسمت شرایط مرزی برخی مسائل پیچیده‌تر را بررسی می‌کنیم. به صورت کلی شرایط مرزی، از پیوستگی نیرو در فصل مشترک‌ها و غیر لغزشی بودن شارش روی سطوح به دست می‌آید. در ادامه، ابتدا شرط مرزی روی یک ورقه‌ی غیر قابل کشش متحرک را بررسی و سپس به شرط مرزی روی غشاهای کشسان نیز می‌پردازیم.

شرط مرزی روی ورقه‌ی کشش ناپذیر

یک ورقه‌ی کشش ناپذیر ولی منعطف را در نظر بگیرید که یک موج رونده را هدایت می‌کند. در دستگاه مختصات که محور $\hat{x}$ عمود بر صفحه است، شکل هندسی این ورقه به شکل $h(x, t) = h_0 \sin(kx - \omega t)$ است. در این صورت موج در راستای $\hat{x}$ منتشر می‌شود. می‌خواهیم شرط مرزی شاره‌ای که زیر این ورقه است را به دست آوریم. ابتدا برای اینکه شهود بهتری از شکل

دینامیکی ورقه به دست آید، توجه کنید که حرکت روی ورقه توسط عاملی خارجی ایجاد شده است. مثال یک بعدی این حرکت شبیه موجی است که روی یک طناب آویزان، با حرکت افقی و نوسانی (رفت و برگشتی) نقطه‌ی آویز ایجاد می‌شود. در این صورت یک موج رونده روی طناب ایجاد می‌شود که از نقطه‌ی آویز شروع شده و در امتداد طناب منتشر می‌شود. واضح است که کل طناب جابجا نمی‌شود ولی موج همراه خود انرژی را به انتهای آزاد طناب منتقل می‌کند. در مورد ورقه‌ی مورد بحث نیز، با دلیلی که با آن کاری نداریم موجی ایجاد شده که در راستای $\hat{x} +$ منتشر می‌شود. ورقه در هنگام حرکت خم می‌شود ولی کشیده نمی‌شود. نشان می‌دهیم که شرط مرزی روی ورقه که شرط عدم لغزش شارش است را چگونه می‌توان اعمال کرد. دستگاه مختصات S' را در نظر بگیرید که با سرعت $w = \omega/k$ نسبت به دستگاه آزمایشگاه (S) و به سمت راست حرکت می‌کند. ارتباط این دو دستگاه به صورت زیر داده می‌شود:

$$x = x' - wt', \quad z = z', \quad t = t',$$

$$\partial_{x'} = \partial_x, \quad \partial_{t'} = \partial_t - w\partial_x,$$

از دید این ناظر متحرک، شکل ورقه به صورت ساکن دیده شده و با رابطه‌ی $z' = h_0 \sin(kx')$ داده می‌شود. اعمال شرط مرزی از دید این ناظر متحرک ساده تر است. درست است که از دید ناظر متحرک شکل ورقه به صورت ساکن دیده می‌شود ولی در این دستگاه، ورقه روی این شکل ساکن با سرعت v_0 به سمت چپ می‌خزد. سرعت خزش ورقه را می‌توانیم با استدلال زیر به دست آوریم. یک نقطه‌ی مادی روی ورقه، از دید ناظر متحرک زمانی برابر با ℓ/v_0 نیاز دارد تا از یک بیشینه‌ی ارتفاع به بیشینه‌ی بعدی برسد که در آن ℓ طول مسیری است که دو بیشینه را به هم وصل می‌کند، داریم:

$$\ell = \int_0^{2\pi/k} dx' \sqrt{1 + (h_0 k)^2 \cos^2(kx')}.$$

از طرف دیگر و از دید ناظر آزمایشگاه، این زمان برابر با زمانی است که در یک نقطه‌ی خاص دو بیشینه‌ی متوالی ارتفاع اتفاق می‌افتد: $2\pi/\omega$. در این صورت داریم:

$$v_0 = \frac{\omega}{k} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \sqrt{1 + (h_0 k)^2 \cos^2(\phi)}.$$

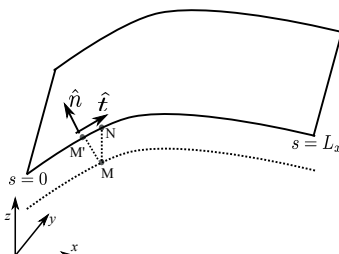
با درست داشتن سرعت خزش، شرط مرزی را از دید ناظر متحرک می‌نویسیم. اگر مولفه‌های سرعت را از دید این ناظر با $\mathbf{u}' = (u'_x, u'_z)$ نشان دهیم، شرط مرزی به صورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{u}'(x', z' = h_0 \sin(kx')) = (-v_0 \cos \theta, -v_0 \sin \theta),$$

که در آن θ زاویه‌ی مماس بر ورقه و با رابطه‌ی $\tan \theta = h_0 k \cos(kx')$ داده می‌شود. شرط مرزی از دید ناظر آزمایشگاه، با افزودن جمله‌ی $w = \omega/k$ به مولفه‌ی x سرعت به دست می‌آید. روی ورقه‌ای که موج کم دامنه را هدایت می‌کند ($\epsilon = h_0 k \ll 1$) شرط مرزی به صورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{u}(x, z = h_0 \sin \psi) = \frac{\omega}{k}(\circ, -\epsilon \cos \psi) + \frac{\omega}{k}(\frac{\epsilon^2}{4} \cos(2\psi), \circ) + \mathcal{O}(\epsilon)^3,$$

که در آن $\psi = kx - \omega t$. ملاحظه می‌شود که تا مرتبه‌ی اول تغییر شکل، شرط مرزی به صورت $u_z(x, z = h) = \partial_t h$ است.



شکل ۱۱.۵ مشخصات هندسی ورقه‌ی تغییر شکل یافته.

شرط مرزی روی ورقه‌ی کشش‌پذیر

اکنون ورقه‌ای را در نظر بگیرید که قابلیت کشش دارد. علاوه بر ورقه‌های کشسان، فصل مشترک دو شاره‌ای که با هم مخلوط نمی‌شوند، مثال دیگری است که در این قالب می‌گنجد. در فصل‌های آینده نشان می‌دهیم که به فصل مشترک شاره‌ها، انرژی سطحی نسبت داده می‌شود. ورقه‌ها در حالت عمومی، انرژی خمشی را هم می‌توانند در خود ذخیره کنند. مشخصات کشسانی ورقه‌ها

را در بخش بعد بیشتر مطالعه می‌کنیم. اینجا می‌خواهیم ببینیم شارش شارهای مجاور ورقه‌ی کشسان چگونه آن را به حرکت در می‌آورد. ابتدا به سینماتیک ورقه بپردازیم. برای سهولت، مشابه بخش پیشین، فرض کنیم بنا به دلایل تقارنی حرکت ورقه در راستای y متقارن باشد. سینماتیک ورقه با تابع $F(x, z) = z - h(x, t) = 0$ داده می‌شود. بر حسب این تابع، بردار عمود بر ورقه به صورت $\hat{n} = \nabla F / |\nabla F|$ قابل محاسبه است. شکل ورقه‌ی کشسان در دو زمان نزدیک به هم در شکل ۱۱.۵ نشان داده شده است. میدان شارشی بالای ورقه را با $\mathbf{u}^{(1)}$ و میدان شارشی پایین ورقه را با $\mathbf{u}^{(2)}$ نشان می‌دهیم. هر دوی این میدان‌ها، معادلات اساسی شارش را برآورده می‌کنند. شرط مرزی اساسی که این دو شارش را به هم پیوند می‌دهد، پیوستگی میدان شارشی روی ورقه است:

$$\mathbf{u}^{(1)}(x, z = h) = \mathbf{u}^{(2)}(x, z = h).$$

علاوه بر شرط مرزی سرعت، به معادلاتی احتیاج داریم که دینامیک ورقه را تعیین کنند. اولین معادله، شرط مرزی بدون لغزشی است. چون شار روی ورقه نمی‌لغزد، پس باید سرعت حرکت نقاط مادی روی ورقه از سرعت شار به دست آیند. به حرکت ورقه بیشتر بپردازیم. چون سطح کشسان است، هر نقطه‌ی مادی روی ورقه که با M نشان داده شده است، در راستای برداری که به صورت موضعی بر ورقه عمود است، منتقل می‌شود. سرعت حرکت این نقطه‌ی مادی که در راستای عمود بر ورقه است، به سادگی با ملاحظات هندسی از تابع $h(x, t)$ قابل محاسبه است. دقت کنید که $\partial_t h(x, t)$ تغییرات ارتفاع یک نقطه با x ثابت است و این کمیت سرعت نقاط مادی را نشان نمی‌دهد. در زمان δt نقطه‌ی M با سرعت $\partial_t h$ به نقطه‌ی N تبدیل می‌شود و در همین زمان نقطه‌ی مادی M با سرعت $\cos \theta \partial_t h$ به نقطه‌ی M' منتقل می‌شود که در آن θ زاویه‌ی بین دو خط MM' و MN است. با ملاحظات هندسی می‌بینیم که این زاویه‌ای است که مماس بر خم با محور افقی می‌سازد، پس: $\tan \theta = \partial_x h$. در نتیجه معادله‌ی دینامیکی ورقه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\hat{n} \cdot \mathbf{u}^{(1)}(x, z = h) = \hat{n} \cdot \mathbf{u}^{(2)}(x, z = h) = \frac{1}{|\nabla F|} \partial_t h(x, t),$$

$$|\nabla F| = \sqrt{1 + (\partial_x h)^2}$$

نتیجه‌ی بالا را به گونه‌ی دیگری هم می‌توان به دست آورد. فرض کنید که از سمت محیط

اول به مرز مشترک نزدیک می‌شویم. در این صورت شاره در همسایگی فصل مشترک دارای سرعتی است که با مولفه‌هایش به صورت $(u_x^{(1)}, u_z^{(1)}) = \mathbf{u}^{(1)}(x, z = h)$ داده می‌شود. اکنون ناظری را در نظر بگیرید که با سرعت $u_x^{(1)}$ در راستای $\hat{x}$ حرکت می‌کند. از دید این ناظر سرعت شاره‌ی مجاور فصل مشترک تنها مولفه‌ی $\hat{z}$ دارد و آن برابر است با تغییرات زمانی فصل مشترک $h(x, t)$ که از دید همان ناظر و به صورت $\frac{d}{dt}h(x, t) = \partial_t h + u_x^{(1)} \partial_x h$ محاسبه می‌گردد. پس داریم:

$$u_z^{(1)} = \partial_t h + u_x^{(1)} \partial_x h.$$

به سهولت می‌توانید تحقیق کنید که شرط اخیر نمایش دیگری است از شرطی که در بالا و با روشی دیگر به دست آمد.

کشسانی ورقه چه نقشی در دینامیک شاره دارد؟ درست است که عوامل ایجاد شارش، جایی خارج ورقه‌اند ولی واضح است که سختی و نرمی ورقه در حرکت ورقه و از آن مهم‌تر در میدان شارشی شاره هم نقش دارند. انرژی‌های خمشی و کشسانی ورقه، نیروهای درون ورقه ایجاد می‌کند. در تعادل بودن ورقه با شاره باعث انتقال این نیروها به شاره می‌شود. اجازه دهید نیروهای کشسانی درون ورقه بر واحد سطح را با $\mathbf{f}_e(x, z = h)$ نشان دهیم. نیروی کشسانی با نیروی خالصی که از طرف شاره وارد می‌شود برابر هستند. در این صورت شرط مرزی پیوستگی نیروها روی ورقه به صورت زیر می‌شود:

$$\hat{n} \cdot (\sigma^{(1)} - \sigma^{(2)})|_{z=h} = \mathbf{f}_e + (\rho^{(2)} - \rho^{(1)})gh(x, t)\hat{n},$$

که در آن $\sigma^{(1,2)}$ مقادیر تانسور تنش در همسایگی ناحیه‌ی بالا و پایین ورقه را نشان می‌دهند. همچنین حالتی را در نظر گرفته‌ایم که شاره‌های بالا و پایین ورقه اختلاف چگالی دارند و نیروی گرانشی مربوط به آن را اضافه کرده‌ایم. در بحث زیر نشان می‌دهیم که نیروهای کشسانی ورقه‌ی تغییر شکل یافته به خواص کشسانی و نوع تغییر شکل ورقه مربوط می‌شوند.

اندکی در مورد نیروی کشسانی ورقه

کشسانی ورقه‌ها با کشش سطحی σ مشخص می‌شود و آن برابر انرژی بر واحد سطح ورقه‌ای

است که کشیده شده است. σ بزرگتر باشد، سطح سخت تر کشیده می شود. اگر سطح ورقه‌ای کشسان به اندازه‌ی ΔS کشیده شود، انرژی برابر با $\Delta E_s = \sigma \Delta S$ در آن ذخیره می شود. علاوه بر کشش سطحی، در حالت عمومی تر به ورقه‌های کشسان، انرژی خمشی هم نسبت داده می شود. برای خم کردن ورقه‌ها باید انرژی صرف کرد. انعطاف پذیری خمشی ورقه‌ها با پارامتر B (مدول خمشی) مشخص می شود. ورقه‌ی صاف مستطیل شکلی با مساحت ΔS را در نظر بگیرید که از یک سو خم شده است. اگر شعاع انحنای ایجاد شده را با R نشان دهیم، انرژی خمشی ذخیره شده در ورقه برابر است با: $\Delta E_c = B \Delta S / (2R^2)$. مشخصات کشسانی ورقه مورد نیاز است زیرا در ادامه می خواهیم حالتی را در نظر بگیریم که حرکت شاره‌ی دوسوی ورقه، دینامیک ورقه را تعیین کند. عواملی که لزوماً روی ورقه نیستند و در جایی دور از ورقه قرار گرفته‌اند باعث شارش شاره و در نتیجه حرکت ورقه می شوند. اعمال شرط مرزی روی شاره، معادلات حرکتی ورقه را می سازد.

در بحث بالا مختصری در مورد کشسانی کششی و خمشی ورقه‌ها بحث شد. اکنون نشان می دهیم برای ورقه‌ای که کشیدگی و خمیدگی آن با تابع $F(x, z) = z - h(x, t) = 0$ داده شده است، نیروهای کشسانی چگونه‌اند. برای سهولت، خمیدگی و کشیدگی را تنها در یک سو در نظر بگیرید. ورقه‌ای مستطیل شکل به ابعاد $L_x \times L_y$ را در نظر بگیرید که در راستای x خمیده و کشیده شده است. مقطع ورقه با صفحه‌ی $x - z$ یک خم است. برای اینکه بتوانیم انرژی کشیدگی خم را در نظر بگیریم، از پارامتر طول قوس s استفاده می کنیم. هر نقطه‌ی مادی روی خم را با بردار مکان $\mathbf{r}(s)$ نشان می دهیم. بردار مماس بر خم به صورت $\hat{t} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{ds} \mathbf{r}(s)$ محاسبه می شود. توجه کنید که بردار مماس بر خم که به این صورت تعریف می شود، تنها در صورتی که خم کشیده نشود طولی واحد دارد. تغییرات بردار مماس بصورت $\dot{\mathbf{r}} = c\hat{n}$ است که در آن c انحنا خم (عکس شعاع انحنا) است. تغییرات مرتبه‌ی سوم هم به صورت $\ddot{\mathbf{r}} = c\dot{\hat{n}} - c^2\hat{t}$ است که در محاسبات آینده به کار می آید.

اکنون انرژی ورقه‌ی تغییر شکل یافته را به صورت زیر می نویسیم:

$$\mathcal{F} = \frac{F}{L_y} = \frac{B}{2} \int_0^{L_x} \ddot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} ds + \frac{\lambda}{2} \int_0^{L_x} (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - 1) ds,$$

که در آن، جمله‌ی اول انرژی خمشی ورقه‌ی خمیده را نشان می دهد که از انتگرال گیری روی مربع

انحنا در کل سطح ورقه به دست می‌آید. جمله‌ی دوم ضریب لاگرانژ است که کشیده نشدن خم را تضمین می‌کند. ضریب لاگرانژ $\lambda = 2\sigma$ نیروی قیدی است که مانند کشش سطحی اجازه نمی‌دهد ورقه کشیده شود. دقت شود که رابطه‌ی بالا انرژی بر واحد طول (در راستایی که کشیده نشده) است. برای محاسبه‌ی نیروی کشسانی تولید شده توسط ورقه‌ی کشسان، وردش انرژی را محاسبه می‌کنیم:

$$\delta \mathcal{F} = \int (B \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \lambda \ddot{\mathbf{r}}) \cdot \delta \mathbf{r} ds + \text{جملات مرزی},$$

و از آنجا نیروی کشسانی ناشی از ورقه که به محیط اطرافش وارد می‌شود برابر است با:

$$\mathbf{f}_e = -\frac{1}{\Delta s} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{r}} = (\lambda c - B(\ddot{c} - c''')) \hat{n} + 3Bc\dot{c}\dot{t}.$$

این نیروی کشسانی بر واحد سطح است که در قسمت قبل برای شرایط مرزی شارش مورد نیاز بود. برای یافتن رابطه‌ی بالا از حالت خاص خمش و کشش یک بعدی استفاده کردیم، ولی توجه کنید که رابطه‌ی نهایی کاملاً عمومی است به این صورت که خمش ظاهر شده در این رابطه با مجموع خمش‌ها در راستاهای اصلی جایگزین می‌شود.

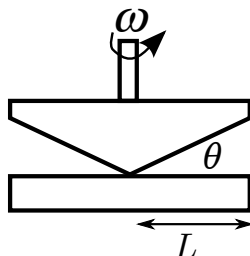
با یک محاسبه‌ی ساده می‌توان نشان داد که در مختصات مونژ که در بالا معرفی شد و برای سطح بسیار کند تغییر ($\partial_x h \ll 1$)، نیروی کشسانی به صورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{f}_e = (\sigma \partial_x^2 h - B \partial_x^4 h) \hat{z}.$$

در پایان یادآور می‌شویم که ورقه‌ها اگر ضخامت داشته باشند علاوه بر کشسانی خمشی و کششی، کشسانی برشی هم دارند. یک قسمت از ورقه‌ی تغییر شکل یافته به صورت یک قطعه‌ی مکعب شکل است که نیروی برشی، مربوط به تغییر شکلی از این ورقه است که دو وجه بالا و پایین آن نسبت به هم جابجا شده‌اند. نیروهای برشی تولید شده در راستای مماس بر ورقه هستند. جزییات این محاسبات را خواننده‌ی علاقه‌مند در کتاب Landau-Lifshitz پیدا می‌کند.

پرسش‌ها

- ۱.۵ در این فصل معادله‌ی ناویه-استوکس را برای شارش‌های تراکم ناپذیر به‌دست آوردیم. معادله‌ی حرکت شارش‌های تراکم پذیر را به‌دست آورید.
- ۲.۵ در رابطه‌ی ۳.۵، تانسور تنش در دستگاه دکارتی داده شده است. شکل تانسور تنش در دستگاه قطبی کروی را بدست آورید؟
- ۳.۵ جریان پوآزوی درون یک استوانه‌ی نامحدود به سبب اختلاف فشار محوری تولید شده است. اختلاف فشار در واحد طول را برابر با $\frac{\Delta P}{\Delta L}$ بگیرید. میدان سرعت درون استوانه را در حالت پایا بدست آورید.
- ۴.۵ دو استوانه‌ی هم محور و نامتناهی به شعاع‌های r_1 و r_2 را در نظر بگیرید که $r_1 < r_2$. استوانه‌ی داخلی ثابت و استوانه‌ی بیرونی با سرعت ثابت ω می‌چرخد. میدان شارشی شاره‌ی بین دو استوانه در حالت پایا چه شکلی دارد؟
- ۵.۵ شارش کنار صفحه‌ی لرزان را برای حالتی که ارتفاع شاره‌ی روی صفحه متناهی است، بررسی کنید. ارتفاع شاره را برابر با H بگیرید و فرض کنید سطح آزاد افقی بماند.
- ۶.۵ مطابق شکل ۱۲.۵، یک سامانه‌ی مخروط و صفحه را در نظر بگیرید. صفحه‌ی پایینی ثابت و مخروط با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. زاویه‌ی بین مخروط و صفحه را برابر با θ و اندازه‌ی سطح آنها را نامتناهی در نظر بگیرید. با حل معادله‌ی استوکس، میدان شارش تولید شده در شاره‌ی بین مخروط و صفحه را بدست آورید. گشتاور وارد شده بر واحد سطح صفحه‌ی پایینی را بدست آورید. برای محاسبات می‌توانید از دستگاه مختصات استوانه‌ای کمک بگیرید، وشکسانی شاره را برابر با η و شارش را پایا فرض کنید.
- ۷.۵ شارش پوآزوی درون یک لوله‌ی صاف نامتناهی با مقطع مثلث شکل را در حالت پایا بررسی کنید. مقطع لوله را یک مثلث متساوی‌الاضلاع به اندازه‌ی اضلاع a در نظر بگیرید. شکل میدان سرعت را بدست آورید.
- ۸.۵ نشان دهید نرخ اتلاف انرژی در یک شارش پایا که با مرزهای صلب و ساکن محدود



شکل ۱۲.۵ صفحه و مخروط نسبت به هم می‌چرخند و شاره‌ی بین آنها شارش پیدا می‌کند. در این صورت از طرف شاره گشتاوری به هر دو قسمت سامانه وارد می‌شود.

شده‌است با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\eta \int d^3x (\nabla \times \mathbf{u})^2.$$

راهنمایی: از رابطه‌ی انرژی جنبشی بصورت $\frac{1}{2} \rho \int d^3x \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ ، شروع کنید و با کمک معادله‌ی ناویه-استوکس نرخ تغییرات آن را محاسبه کنید.

۹.۵ یک صفحه‌ی صلب را در نظر بگیرید که با ضخامت h_0 از شاره‌ای به شکسانی η تر شده است. اکنون این صفحه را به حالت عمودی قرار می‌دهیم. لایه‌ی شاره شروع به جاری شدن می‌کند تا در انتها سطح صفحه کاملاً خشک شود. نشان دهید شکل سطح آزاد لایه‌ی شاره از معادله‌ی دیفرانسیل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial t} h + c \frac{h^2}{h_0} \frac{\partial}{\partial x} h = 0,$$

که در آن $h(x, t)$ ، ضخامت لایه‌ی شاره در نقطه‌ای به فاصله‌ی x از سر صفحه و در زمان t است. در این رابطه $c = \rho g h_0^2 / \eta$. در نشان دهید جوابی به صورت زیر در این معادله صدق می‌کند:

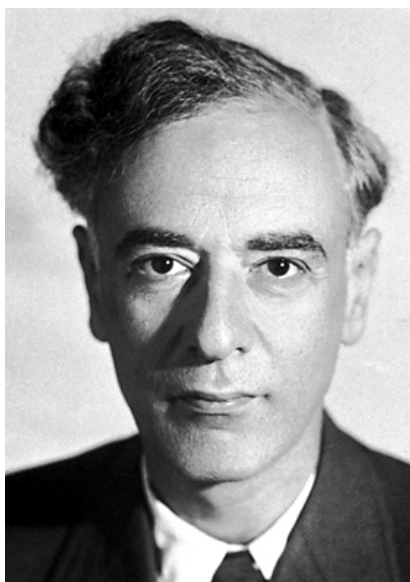
$$h(x, t) = \begin{cases} h_0 \sqrt{x/ct} & x \leq ct \\ h_0 & x \geq ct. \end{cases}$$

۱۰.۵ یک میله‌ی استوانه‌ای شکل به طول L و شعاع a را در نظر بگیرید ($L \gg a$). نیروی وارد شده از طرف شاره برای حالتی که استوانه موازی محور طولی خود حرکت می‌کند

بیشتر است یا برای حالتی که عمود بر محور طولی خود حرکت می‌کند؟ حل دقیق این مسأله پیچیده است، سعی کنید با استدلال‌های ساده، پاسخی کیفی بدهید.

۱۱.۵ سطح داخلی یک لوله‌ی استوانه‌ای شکل به شعاع R و طول L با لایه‌ای به ضخامت d از شاره‌ای با وiskسائی η تر شده است. برای خشک کردن این لوله از جریان هوا استفاده می‌کنیم. جریان هوا از اختلاف فشار ΔP بین دوسر لوله ایجاد می‌شود. برای اینکه لوله کاملاً خشک شود چه حجمی از هوا لازم است؟ برای سادگی فرض کنید $L \gg R$.

۱۲.۵ در مسأله‌ی صفحه‌ی لرزان چه نیرویی به صفحه وارد می‌شود؟



لِف داویدویچ لاندائو (۱۹۰۸-۱۹۶۸)، در باکو مرکز آذربایجان کنونی زاده شد. لاندائو از بزرگترین فیزیکدانان قرن بیستم، جایزه‌ی نوبل سال ۱۹۶۲ را به سبب کارهایش در نظریه‌ی کوانتومی فیزیک حالت جامد، از آن خود کرد. تحصیلات لاندائو همزمان بود با انقلاب روسیه، به این سبب وی هیچگاه نتوانست دوره‌ی تحصیلی دبیرستان را به صورت رسمی کامل کند. تحصیلات مقدماتی فیزیک را در دانشگاه لنینگراد انجام داد ولی هیچ پایان نامه‌ی دکتری را ننوشته است. لاندائو کارهای اثرگذاری در فیزیک هسته‌ای، دیامغناطیس، ابرشارگی و ابرسانایی، پلازما و نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی انجام داده است. لاندائو اعجوبه‌ی ریاضی بود. کتاب‌هایی که توسط لاندائو و لیفشیتز (اولین دانشجوی لاندائو) تألیف شده‌اند، از زیباترین کتاب‌های فیزیک نظری به شمار می‌روند. این کتاب‌ها تمام شاخه‌های فیزیک، از مکانیک کلاسیک، مکانیک شاره‌ها، محیط‌های کشسان، ترمودینامیک، مکانیک آماری تا مکانیک کوانتومی، نظریه‌ی کوانتومی حالت جامد و میدان‌های الکترومغناطیسی را پوشش می‌دهند. خوانندگان کتاب‌های لاندائو از نبوغ ریاضیاتی‌اش مسحور می‌شوند.

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان



شارش ناآخت

در برخی از شرایط، وشکسانی شاره آنقدر زیاد است که از اثرهای لختی در مقابل اثرهای اتلافی می‌توان صرف‌نظر کرد. این موضوع معمولاً در شارش‌هایی که در سامانه‌هایی با اندازه‌ی میکرونی رخ می‌دهند، قابل مشاهده است [۷]. حرکت باکتری‌ها و دیگر شناگرهای زیست‌شناختی، مهم‌ترین پدیده‌هایی هستند که در آنها لختی شاره نقش مهمی ندارد. حرکت شناسی در اندازه‌های سلولی با کوچک شدن عدد رینولدز همراه است. سازوکارهای تولید حرکت در این شرایط با حالت‌های مربوط به ابعاد بزرگ مقیاس روزمره تفاوت‌های بنیادی دارد.

علاوه بر بحث باکتری‌ها، شاخه‌ی نوظهور ریزشارش نیز در رده‌ی مسائلی قرار می‌گیرد که در آنها پدیده‌های اتلافی نقش اساسی ایفا می‌کنند. یکی از اهداف این رشته‌ی علمی، ساخت یک آزمایش‌گاه شیمی در اندازه‌ی میکرومتر است. در این آزمایش‌گاه قرار است تا محصولات گران‌قیمت شیمیایی با خواص دارویی متفاوت، به‌دست آیند. در آزمایش‌های ریزشارش، حجم بسیار اندکی از شاره‌هایی با خواص شیمیایی متفاوت در کانالهایی با اندازه‌ی چند میکرومتر با هم ترکیب می‌شوند تا محصول مورد نظر به‌دست آید. بدیهی است که برای کنترل بهتر آزمایش‌های ریزشارش، باید شناخت کافی از خواص شارشی آنها داشته باشیم [۹].

فیزیک کلوئیدها، شاخه‌ای دیگر از علم است که در آن حوزه، با شارش‌های بدون لختی

سروکار داریم. کلوئیدها، ذرات معلق در شاره‌ها هستند که عموماً دارای اندازه‌ای از مرتبه‌ی چند میکرومتر هستند. ذرات مه (قطرات آب معلق در هوا)، کف صابون، شیر (گلبول‌های چربی معلق در آب) و گلبول‌های خون از مهم‌ترین مثال‌ها هستند [۲۵].

در این فصل به معرفی و بررسی مفاهیم هیدرودینامیکی در شرایط عدد رینولدز صفر می‌پردازیم. با معرفی جواب‌های تکیه‌ی معادله‌ی استوکس و بسط میدان سرعت بر حسب چند قطبی‌های نیرو، ابزاری کارآمد، برای مطالعه‌ی مسائل هیدرودینامیکی را ارائه می‌کنیم. در ادامه جزئیات حرکت شناگرهای ریزمقیاس را بررسی می‌کنیم.

۱.۶ معادله‌ی استوکس

در فصل گذشته، با معرفی عدد بدون بعد رینولدز نشان دادیم که در شرایط عدد رینولدز بسیار کوچک، حرکت شاره کاملاً اتلافی است و لختی نقشی در تحول این شارش‌ها ندارد. در این شرایط، معادلات استوکس و پیوستگی، معادلاتی هستند که تحول شارش را بیان می‌کنند^۱. این معادلات حرکت بصورت زیرند:

$$\eta \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \nabla P(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.6)$$

که در آن $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ، نیروی اعمال شده بر واحد حجم شاره است. منشأ این نیرو در مسائل مختلفی که در آغاز فصل به آنها اشاره شد، متفاوت است. در مورد ریزشناگرها، نیرو از طریق اندامک‌های حرکتی آنها به شاره وارد می‌شود. کلوئیدها نیز به سبب افت‌وخیزهای گرمایی، با ذرات شاره به مبادله‌ی نیرو می‌پردازند. البته در مورد کلوئیدها، از آنجا که معمولاً بار الکتریکی هم دارند، نیروهایی با منشأ الکتروستاتیکی هم به شاره وارد می‌شوند. توجه کنید که روابط بالا را برای شارهی تراکم ناپذیر نوشته‌ایم و در سراسر این فصل شارش را تراکم ناپذیر در نظر می‌گیریم. پیش از مطالعه‌ی معادله‌ی استوکس برای نیروی عمومی، اجازه دهید برخی جواب‌های خاص‌تر معادله‌ی استوکس را بررسی کنیم. نیروی نقطه‌ای یکی از این موارد است.

^۱ علاوه بر کوچک بودن عدد رینولدز، شارش را ناپایا نیز فرض می‌کنیم. دقت کنید که کوچک بودن عدد رینولدز به معنی پایا بودن شارش نیست. عدد بدون بُعد مانایی، که در فصل‌های آینده معرفی می‌شود، معیاری برای پایا بودن شارش است.

نیروی نقطه‌ای

نیروی نقطه‌ای و میدان سرعت وابسته به آن، از ابزارهای ریاضی بسیار کارآ در مطالعه‌ی مسائل شماره‌ها هستند. نیروی نقطه‌ای، نیرویی است که فقط در یک نقطه به شاره اعمال می‌شود. بصورت ریاضی، نیروی نقطه‌ای نیروی نقطه‌ای را با کمک تابع دلتای دیراک می‌توان تعریف کرد:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}\delta(\mathbf{x}),$$

که در آن $\mathbf{F}$ ، اندازه‌ی نیروی نقطه‌ای است که در مبدأ مختصات به شاره وارد می‌شود. از خطی بودن معادله‌ی استوکس، می‌توانیم نتیجه بگیریم که میدان سرعت این نیروی نقطه‌ای بصورت خطی با اندازه‌ی نیرو متناسب است. کلی‌ترین رابطه‌ی خطی‌ای که می‌توانیم در نظر بگیریم بصورت زیر است:

$$u_i^\circ(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^3 G_{ij}(\mathbf{x}) F_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.6)$$

در این رابطه $G_{ij}(\mathbf{x})$ ، مؤلفه‌های یک تانسور وابسته به مکان را می‌سازند. G_{ij} تابع گرین تانسوری معادله‌ی استوکس است. معادله‌ی بالا را بصورت برداری $\mathbf{u}^\circ = \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}$ نیز می‌توان نوشت. ارائه‌ی یک حل ریاضی دقیق برای معادله‌ی استوکس با نیروی نقطه‌ای امکان پذیر است، ولی در اینجا می‌خواهیم با یک روش ریاضی ساده و با کمک اطلاعات فصل قبلی، جواب را به دست آوریم. نکته‌ی مهمی که توجه به آن بررسی مسأله را ساده‌تر می‌کند این است که نیروی نقطه‌ای را می‌توان به صورت نیروی وارد شده از طرف یک کره‌ی بی‌نهایت کوچک و متحرک در نظر گرفت. میدان شارشی یک کره به شعاع R که با سرعت $\mathbf{V}$ حرکت می‌کند، در فصل پیشین به دست آمد. میدان سرعت ناشی از این کره‌ی متحرک بصورت $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{V}$ ، نیز قابل بیان است. مطابق قانون استوکس، این کره‌ی متحرک به اندازه‌ی $\mathbf{F} = 6\pi\eta R\mathbf{V}$ به شاره نیرو وارد می‌کند. با ترکیب دو رابطه‌ی اخیر و بررسی حد $R \rightarrow 0$ ، می‌توانیم جواب معادله‌ی استوکس برای نیروی نقطه‌ای رابه‌دست آوریم:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\eta r} (\mathbf{I} + \hat{r}\hat{r}), \quad (3.6)$$

که در آن $r = |\mathbf{x}|$ و $\hat{r} = \mathbf{x}/r$. در این رابطه $\mathbf{I}$ ، تانسور واحد است. میدان سرعت نیروی نقطه‌ای را بر حسب مؤلفه‌های آن می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u_i^*(\mathbf{x}) = \sum_j G_{ij} F_j, \quad G_{ij} = \frac{1}{4\pi\eta r} (\delta_{ij} + \hat{r}_i \hat{r}_j). \quad (4.6)$$

دوقطبی نیرو

با استفاده از مسأله‌ی نیروی نقطه‌ای، اکنون می‌توانیم پاسخ معادله‌ی استوکس برای دوقطبی نیرو را به دست آوریم. دوقطبی نیرو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}[\delta(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - \delta(\mathbf{x})],$$

در اینجا شاره تحت اثر دو نیروی نقطه‌ای است که به فاصله‌ی $\mathbf{d}$ از هم واقع شده‌اند و نیروی کل نیز صفر است. به سهولت و با استفاده از خطی بودن معادله‌ی استوکس، می‌توان میدان سرعت دوقطبی را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{u}^D = (\mathbf{G}(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - \mathbf{G}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{F}.$$

این میدان در فواصل بسیار دور از بسط تیلور برای d ی کوچک به صورت زیر درمی‌آید:

$$u_i^D = \sum_{j,k} G_{ijk}^D P_{kj},$$

که در آن $P_{kj} = d_k F_j$ ، تانسور دوقطبی نیرو است و G_{ijk}^D به صورت زیر داده می‌شود:

$$G_{ijk}^D = \frac{\partial}{\partial x_k} G_{ij} = \frac{1}{4\pi\eta r^2} (\delta_{ij} \hat{r}_k - \delta_{ik} \hat{r}_j + \delta_{jk} \hat{r}_i + 3\hat{r}_i \hat{r}_j \hat{r}_k).$$

توزیع دلخواه نیرو

اکنون می‌خواهیم در مورد میدان سرعت وابسته به یک توزیع دلخواه نیرو بحث کنیم. در برخی مسائل، نیروی وارد بر شاره در یک ناحیه‌ی متناهی از فضا به شاره اعمال می‌شود. به عنوان مثال، یک باکتری متحرک را در نظر بگیرید. در این مورد، نیروی وارد بر شاره از طریق سطح خارجی

باکتری به شاره اعمال می‌شود. پس در نواحی دور از باکتری، نیرویی به شاره اعمال نمی‌شود. در نواحی خارج از محدوده‌ی نیرو، می‌توانیم میدان سرعت را بر حسب چند قطبیه‌ای توزیع نیرو بسط دهیم. معادله‌ی استوکس با توزیع دلخواه نیروی خارجی بصورت $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ را در نظر بگیرید. میدان سرعت تولید شده توسط توزیع دلخواه نیرو در فواصل دور را بر حسب چندقطبیه‌ای نیرو بصورت زیر بسط می‌دهیم:

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_j G_{ij} b_j + \sum_{j,k} G_{ijk}^D p_{jk} + \sum_{j,k,l} G_{ijkl}^Q t_{jkl} + \text{چند قطبی‌های مراتب بالاتر}. \quad (5.6)$$

که در آن b_j نیروی خالص، p_{jl} گشتاور اول یا دوقطبی نیرو و t_{jlm} چهارقطبی نیرو است. این کمیات بصورت زیر از توزیع نیرو به دست می‌آیند:

$$b_j = \int d^3x' f_j(\mathbf{x}'), \quad (6.6)$$

$$p_{jk} = - \int d^3x' x'_k f_j(\mathbf{x}'), \quad (7.6)$$

$$t_{jkl} = \int d^3x' x'_k x'_l f_j(\mathbf{x}'). \quad (8.6)$$

چندقطبی‌های مراتب بالاتر به صورت مشابه تعریف می‌شوند. میدان سرعت وابسته به چهارقطبی نیرو به صورت زیر می‌شود:

$$G_{ijlm}^Q = \frac{\partial}{\partial x_m} G_{ijl}^D = \frac{1}{8\pi\eta r^3} [(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} - \delta_{ij}\delta_{lm}) - 3(\delta_{lm}\hat{r}_i\hat{r}_j + \delta_{jm}\hat{r}_i\hat{r}_l + \delta_{jl}\hat{r}_i\hat{r}_m + \delta_{im}\hat{r}_j\hat{r}_l + \delta_{il}\hat{r}_j\hat{r}_m - \delta_{ij}\hat{r}_l\hat{r}_m) + 15\hat{r}_i\hat{r}_j\hat{r}_l\hat{r}_m]. \quad (9.6)$$

میدان سرعت چندقطبیه‌ای مراتب بالاتر، با مشتق‌گیری پیاپی از نیروی نقطه‌ای بدست می‌آید. از روش بالا برای حل مسائل مقادیر مرزی استوکس می‌توان استفاده کرد. در این مسائل، توزیع نیرو داده شده نیست و حرکت شاره تنها از طریق حرکت مرزها داده می‌شود. برای مطالعه‌ی میدان سرعت یک مسأله‌ی مرزی، ابتدا میدان سرعت را بر حسب چند قطبیه‌ها (جواب تکنیکی

معادله‌ی استوکس و مشتق‌های آن) بسط می‌دهیم. سپس ضرایب بسط را با اعمال شرایط مرزی مسأله به‌دست می‌آوریم. در این مورد، ضرایب بسط، گشتاورهای نیرو هستند. در حل مسائل مرزی، علاوه بر جواب‌های تکیه‌ی معادله‌ی استوکس که در بالا شرح دادیم، باید جواب‌های تکیه‌ی معادله‌ی لاپلاس را نیز در نظر بگیریم. جواب‌های تکیه‌ی معادله‌ی لاپلاس که بصورت چشمه یا چاهک بودند، در فصل شارش پایستار بررسی شدند. در بسط بر حسب چندقطبیه‌ها، باید جملات زیر را در هم نظر بگیریم:

$$u_i(\mathbf{x}) = Qu_i^s + \sum_j P_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i^s + \sum_{j,k} T_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u_i^s + \dots, \quad (10.6)$$

که در آن Q ، P_j و T_{jk} به ترتیب قدرت چشمه یا چاه، دوقطبی چشمه یا چاه و چهارقطبی چشمه یا چاه را می‌رسانند. میدان سرعت یک چشمه جریان با قدرت واحد بصورت زیر است:

$$u_i^s = \frac{\hat{r}}{4\pi r^2}.$$

مشتق آن نیز بصورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} u_i^s = \frac{1}{4\pi r^3} (\delta_{ij} - 3\hat{r}_i \hat{r}_j).$$

کلی‌ترین جواب معادله‌ی استوکس با شرایط مرزی دلخواه، از ترکیب جواب‌های ۵.۶ و ۱۰.۶ به‌دست می‌آیند.

کره‌ی متحرک و نیروی استوکس

ساده‌ترین مسأله‌ی مرزی، مسأله‌ی حرکت یک کره با شعاع R و سرعت یکنواخت $\mathbf{V}$ است.^۱ برای یافتن میدان شارشی این کره‌ی متحرک، از بسط چندقطبیه‌ها استفاده می‌کنیم. با بسط میدان سرعت و اعمال شرایط مرزی، ثابت‌های بسط را به‌دست می‌آوریم. در میدان سرعت ناشی از کره نباید هیچ چشمه یا چاهی بصورت خالص سهم داشته باشد ولی دوقطبی چشمه یا چاه چگونه؟

^۱ شارش ناشی از کره‌ی متحرک، در فصل پیشین با حل مستقیم معادله‌ی استوکس به‌دست آمد. دقت کنید، در این فصل با استفاده از یک ترفند ریاضی جواب نیروی نقطه‌ای را نیز از این مسأله به‌دست آوردیم. ولی به هر حال به صورت مستقیم هم می‌توان جواب معادله‌ی استوکس برای نیروی نقطه‌ای را به‌دست آورد.

اجازه دهید فرض کنیم، در بسط میدان سرعت کره‌ی متحرک تنها یک جمله‌ی نیروی نقطه‌ای و دوقطبی چشمه یا چاه حضور دارد:

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_j \left(b_j G_{ij} + P_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_i^s \right),$$

اکنون ضرایب عددی b_j و P_j ، با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند. در مورد کره‌ی متحرک، باید میدان سرعت، شرط مرزی زیر را برآورده کند:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=R} = \mathbf{V}_0.$$

در صورتی که بتوانیم با یک انتخاب خاص از ثابت‌ها، شرایط مرزی را برآورده کنیم، جواب مسأله را یافته‌ایم. این موضوع از یکتایی جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل استوکس نتیجه گرفته می‌شود. در این مسأله به سهولت می‌بینیم که انتخاب:

$$\mathbf{P} = \pi R^3 \mathbf{V}_0, \quad \mathbf{b} = 6\pi\eta R \mathbf{V}_0,$$

شرایط مرزی را کاملاً برآورده می‌کند. اگر در بسط میدان سرعت، علاوه بر نیروی نقطه‌ای و دوقطبی چشمه-چاه، چند قطبی‌های دیگری را نیز می‌افزودیم، به سهولت می‌دیدیم که چند قطبیهای دیگر سهمی در میدان سرعت ندارند. بررسی کنید که جواب به دست آمده با جوابی که در فصل قبلی برای میدان سرعت کره به دست آمد تطابق دارد.

۲۰۶ کره‌ی صلب در شارش برشی

شارش برشی ساده‌ای به شکل $\mathbf{u}^\infty = \Gamma \cdot \mathbf{x}$ در نظر بگیرید. این شارش توسط مرزهای شاره که در بی‌نهایت قرار دارند تولید می‌شود. اکنون فرض کنید کره‌ی صلبی به شعاع R وارد این سامانه می‌شود. با فرض اینکه ورود کره شارش بی‌نهایت را تغییر ندهد، میدان شارشی اطراف کره تغییر می‌کند. میدان شارشی مسأله‌ی جدید را با $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ نشان می‌دهیم. با قرار دادن $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\infty + \mathbf{u}'$ می‌خواهیم شکل میدان $\mathbf{u}'$ را بدست آوریم. این میدان شارشی در شرایط مرزی زیر صدق می‌کند:

$$\mathbf{u}'(x \rightarrow \infty) = 0, \quad \mathbf{u}'(x \rightarrow R) = -R\Gamma \cdot \hat{\mathbf{x}}.$$

از بسط چند قطبها برای یافتن میدان شارشی استفاده می‌کنیم. حدس می‌زنیم که میدان شارشی از ترکیب یک دوقطبی نیرو و یک چهارقطبی چشمه‌وچاه مناسب به دست آید:

$$u'_i = G_{ijl}^D d_{jl} + Q_{ijl} T_{jl}$$

که در آن $Q_{ijl} = \partial_j \partial_l u_i^s$ میدان شارشی چهارقطبی و d_{jl} و T_{jl} به ترتیب قدرت دوقطبی و قدرت چهارقطبی را نشان می‌دهند. به سهولت با اعمال شرایط مرزی می‌بینیم که حدس بالا شرایط مرزی را برآورده می‌کند، کافیت قرار دهیم:

$$\mathbf{d} = -\frac{5}{R^3} \mathbf{T} = -\frac{R^3}{6} (\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}^T).$$

۳.۶ ویسکوزیته‌ی موثر سوسپانسیون رقیق

سوسپانسیونی رقیق از N کلویید کروی شکل به شعاع R را در نظر بگیرید. این محلول درون حجم V که توسط سطح A مشخص می‌شود محبوس است. آزمایش نشان می‌دهد که اگر این محلول تحت اثر نیروی خارجی باشد، اتلاف انرژی بیشتر از اتلاف انرژی محلول خالص بدون کلویید است. در صورتی که اندازه‌ی کلوییدها و فاصله‌ی مشخصه‌ی بین آنها خیلی کوچکتر از اندازه‌ی سامانه‌ی ماکروسکوپی که روی آن آزمایش انجام می‌شود باشد، می‌توانیم سوسپانسیون را به صورت یک محلول یکنواخت با ویسکوزیته‌ی موثری که بزرگتر از ویسکوزیته‌ی محلول است در نظر بگیریم. در صورتی که فاصله‌ی بین کلوییدها از اندازه‌ی آنها خیلی بزرگتر باشد، از برهمکنش بین آنها می‌توان صرف‌نظر کرد. پس اجازه دهید سیستم تک کلوییدی را در نظر بگیریم. حجم سامانه V و حجم و سطح کلویید را به ترتیب با V_0 و A_0 نشان می‌دهیم. اگر کلوییدی در سامانه نباشد، میدان شارشی خطی ساده‌ای به شکل $\mathbf{u}^\infty = \mathbf{e} \cdot \mathbf{x}$ از طریق مرز A به محلول اعمال می‌شود. در این صورت تانسور تنش به صورت $\sigma^\infty = -p^\infty \mathbf{I} + \eta \mathbf{e}$ می‌شود که در آن η ویسکوزیته‌ی محلول است. اکنون با ورود کلویید، میدان شارشی و تانسور تنش به صورت زیر تغییر خواهند کرد:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^\infty + \mathbf{u}', \quad \sigma = \sigma^\infty + \sigma', \quad \sigma' = -p' \mathbf{I} + \eta (\nabla \mathbf{u}' + [\nabla \mathbf{u}']^T),$$

که در آن، میدان شارشی $\mathbf{u}'$ با اعمال شرایط مرزی مناسب ورود کلویید، به دست خواهد آمد. اگر اندازه‌ی کلویید کوچکتر از اندازه‌ی سامانه باشد، با میان‌گیری روی مکان‌های مختلفی که کلویید می‌تواند در آنجا حضور یابد، می‌توان تصور کرد که شارش در این سامانه به صورت متوسط برابر با شارش در سامانه‌ای با محلولی خالص ولی با وشکسانی موثر η^* است. در این صورت تانسور تنش این سامانه‌ی معادل را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\sigma = -p^\infty \mathbf{I} + 2\eta^* \mathbf{e}.$$

جایگزینی سوسپانسیون کلوییدی رقیق با یک محلول موثر یکنواخت، با این قید انجام می‌شود که محاسبه‌ی میزان اتلاف انرژی در سامانه‌ی واقعی و سامانه‌ی موثر به یک اندازه باشد. با توجه به اینکه شارش از طریق نیروهایی در مرز ایجاد می‌شود، آهنگ انجام کار روی شاره از طریق زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_A \mathbf{u}^\infty \cdot d\mathbf{f} = e_{ij} \int_A x_j \sigma_{ik} ds_k,$$

که در آن $d\mathbf{f} = \sigma \cdot d\mathbf{s}$ نیروی وارد بر سطح است. برای محاسبه‌ی آهنگ اتلاف انرژی، ابتدا از توصیف سامانه‌ی کلوییدی استفاده می‌کنیم و قرار می‌دهیم: $\sigma = \sigma^\infty + \sigma'$ با این جایگزینی، آهنگ انجام کار می‌شود:

$$-e_{ij} \int_A p^\infty x_j ds_i + 2\eta e_{ij} e_{ik} \int_A x_j ds_k + e_{ij} \int_A x_j \sigma'_{ik} ds_k.$$

روش دوم این است که از توصیف محلول موثر استفاده کنیم و تانسور تنش را از طریق رابطه‌ی تنش موثر قرار دهیم. داریم:

$$-e_{ij} \int_A p^\infty x_j ds_i + 2\eta^* e_{ij} e_{ik} \int_A x_j ds_k.$$

از مساوی قرار دادن نتیجه‌ی دو روش بالا به دست می‌آید:

$$2(\eta - \eta^*) e_{ij} e_{ik} V = -e_{ij} \int_A x_j \sigma'_{ik} ds_k.$$

که در آن، از اتحاد $\int_A x_j ds_k = \delta_{jk} V$ استفاده شده است.

انترال روی سطح خارجی شماره یعنی A را می‌توان به صورت زیر تغییر داد. اگر به این انتگرال، انتگرال روی سطح کلویید (با فرض بردار نرمال روی کلویید به سمت داخل کلویید) را بیفزاییم، سطح بسته‌ای که کل شماره را محصور می‌کند به دست می‌آید. پس:

$$\int_A + \int_{A_0} - \int_{A_0} = \oint - \int_{A_0} = \oint + \int_{A_0},$$

که در آخرین عبارت، با در نظر گرفتن جهت خارج کلویید برای بردار عمود بر سطح آن، علامت منفی را حذف کرده‌ایم. با استفاده رابطه‌ی بالا و تبدیل انتگرال سطحی به انتگرال حجمی داریم:

$$\oint_A x_j \sigma'_{ik} ds_k = -\delta_{ij} \int_{V-V_0} p' dv + \eta \int_{V-V_0} (\partial_i u'_j + \partial_j u'_i) dv.$$

که در آن از اتحاد $\nabla \cdot \sigma' = 0$ استفاده شده است. با توجه به شکل خاص انتگرال حجمی دوم، آن را می‌توانیم مجدداً به انتگرال سطحی تبدیل کنیم. انتگرال روی سطح A سهمی ندارد، چون میدان سرعت $\mathbf{u}'$ در بی‌نهایت افت می‌کند. با استفاده از رابطه‌ی به دست آمده داریم:

$$2(\eta^* - \eta) \text{Tre} V = -\text{Tre} \int_{V-V_0} p' dv + e_{ij} \oint_{A_0} [x_j \sigma'_{ik} - \eta(u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik})] ds_k.$$

دقت کنید که در محاسبات بالا هیچ فرضی در مورد صلب یا کروی بودن کلویید انجام نشده است. کلویید مورد نظر می‌تواند قطره‌ای از یک شاره‌ی ویسکوزتر باشد. در این صورت همه‌ی روابط بالا قابل استفاده‌اند و مشخصات درونی کلویید از طریق شرط مرزی مربوطه وارد مساله شده و میدان شارشی $\mathbf{u}'$ را تغییر می‌دهد. اکنون محاسبات را برای یک کلویید صلب ادامه می‌دهیم. در قسمت قبلی میدان شارشی اطراف کلویید کروی واقع در میدان برشی را به دست آورده‌ایم. داریم:

$$u'_i = -\frac{5}{6} R^3 G_{ijk}^D e_{jk} + \text{Quadrupole}.$$

با جایگذاری میدان سرعت و فشار مربوطه می‌توانیم با انتگرال‌گیری مستقیم به دست آوریم:

$$\int_{V-V_0} p' dv = 0, \quad \oint_{A_0} [x_j \sigma'_{ik} - \eta(u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik})] ds_k = \frac{20}{3} \pi R^3 \eta e_{ij}.$$

در سامانه‌ی بسیار رقیق کلوییدی، کافیت نتیجه‌ی محاسبات بالا را در تعداد کلوییدها ضرب

کنیم. در این صورت داریم؛

$$\eta^* = \eta(1 + \frac{5}{4}\phi),$$

که در آن $\phi = NV_0/V$ کسر حجمی کلویدها را مشخص می‌کند.

۴.۶ برهمکنش هیدرودینامیکی

یک مجموعه‌ی کلئیدی متشکل از N کلئید واقع در مکان‌های $\mathbf{r}_i(t)$ را در نظر بگیرید. حرکت هر ذره‌ی کلئیدی با اعمال نیرو به شار همدوره همراه است. حرکت یک کلئید خاص باعث تولید میدان شارشی می‌شود. این میدان شارشی منتشر شده و کلئیدهای دیگر را تحت تاثیر قرار می‌دهد. به این اثر متقابل که در حرکت کلئیدها دیده می‌شود، برهمکنش هیدرودینامیکی گفته می‌شود. مطالعه و بررسی برهمکنش‌های هیدرودینامیکی یکی از مسائل چالشی مکانیک شار هاست.

برای بررسی برهمکنش‌های هیدرودینامیکی، اجازه دهید سرعت حرکت کلئید $\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{V}_i$ و نیروی هیدرودینامیکی وارد بر آن را با $\mathbf{F}_i$ نشان دهیم. خطی بودن معادله‌ی استوکس و همچنین خطی بودن تانسور تنش نسبت به میدان سرعت، به ما اجازه می‌دهد تا یک رابطه‌ی کلی و خطی بصورت زیر بین سرعت و نیروهای هیدرودینامیکی وارد بر هر کلئید بنویسیم:

$$V_{i,\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \sum_{j=1}^N O_{ij}^{\alpha\beta} F_{j,\beta}, \quad i = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (11.6)$$

که در آن $V_{i,\alpha}$ ، مؤلفه‌ی α سرعت ذره‌ی i ام است. در اینجا $O_{ij}^{\alpha\beta}$ ، تانسور برهمکنش هیدرودینامیکی بین کلئیدهای i ام و j ام است. تانسور برهمکنش هیدرودینامیکی علاوه بر فاصله‌ی بین ذرات به شکل هندسی آنها نیز وابسته است.

در بحث بالا فرض کرده‌ایم که ذرات کلئیدی تنها حرکت انتقالی دارند. در حالت کلی‌تر، ذرات کلئیدی علاوه بر حرکت خطی، حرکت‌های چرخشی نیز دارند. برای این موارد، باید روابط خطی‌ای که سرعت‌های زاویه‌ای را به گشتاورها مربوط می‌کنند، به روابط بالا افزوده شوند. در این موارد، همبستگی بین سرعت‌های خطی و گشتاور و همبستگی بین چرخش و نیرو نیز امکان پذیر است. در ادامه ما تنها سرعت و نیروهای خطی را در نظر می‌گیریم.

مدل اُسین^۱ یکی از ساده‌ترین مدل‌ها برای برهمکنش هیدرودینامیکی است. این مدل برای ذرات کلوئیدی بسیار کوچک کروی شکل قابل استفاده است. برای ذرات کروی شکل به شعاع a ، تانسور برهمکنش اُسین بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{ii}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{6\pi\eta a} \delta_{\alpha\beta}, \\ \mathcal{O}_{ij}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{8\pi\eta|\mathbf{r}|} (\delta_{\alpha\beta} + \hat{\mathbf{r}}_{\alpha}\hat{\mathbf{r}}_{\beta}), \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (12.6)$$

که در آن $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ بردار مکان نسبی دو کلوئید i و j است. ایده‌ی اصلی اُسین، در به‌دست آوردن روابط بالا به‌صورت زیر است. اگر فاصله‌ی بین ذرات بسیار بزرگتر از اندازه‌ی آنها باشد، در اولین تقریب می‌توان از اثرات متقابل بین آنها صرف‌نظر کرد. در این صورت، برهمکنش هر ذره‌ی کروی شکل با قانون استوکس که رابطه‌ای بین نیرو و سرعت همان ذره است، داده می‌شود. این تقریب، اولین رابطه در معادله‌ی ۱۲.۶، را به دست می‌دهد. اکنون اگر بخواهیم اندکی تقریب را بهتر کنیم، می‌توانیم به اثرات متقابل بین دو ذره‌ای که به فاصله‌ی r از یکدیگر قرار دارند، فکر کنیم. البته همچنان فاصله‌ی بین ذرات را بزرگتر از شعاع آنها در نظر می‌گیریم. دو ذره‌ی دور از هم i و j را در نظر بگیرید. از نظر ناظر همراه ذره‌ی j ، ذره‌ی دیگر بصورت یک نیروی نقطه‌ای با اندازه‌ی $\mathbf{F}_i$ دیده می‌شود. میدان سرعت این نیروی نقطه‌ای، در مکان ذره‌ی j ، باید با سرعت این ذره برابر باشد. به بیان دیگر:

$$\mathbf{V}_{i,\alpha} = \sum_{\beta} G_{ij} \mathbf{F}_{j,\beta}.$$

از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{O}_{ij}^{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta},$$

این رابطه نیز، دومین رابطه در معادله‌ی ۱۲.۶، است.

تقریب اُسین برای کلوئیدهای بسیار دور از هم قابل استفاده است. برای کلوئیدهایی که نزدیک‌تر هستند باید روابط بالا را بصورت یک بسط اختلالی بر حسب کمیت کوچک (a/r) تصحیح کرد. این تصحیح توسط رُتنه و پراگه انجام شده است [۴۱].

Oseen^۱

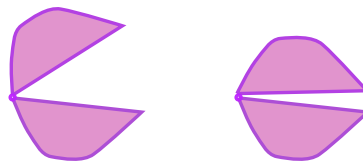
۵.۶ شناگرهای ریز مقیاس

توصیف حرکت باکتری‌ها یکی از موارد کاربرد معادلات استوکس است. باکتری‌ها برای زنده ماندن مجبورند همواره در حرکت باشند [۱۸]. جست‌وجو برای یافتن غذای بیشتر و تلاش برای تولید مثل، دلایل اساسی و کافی برای جنب‌وجوش باکتری‌ها را شامل می‌شوند [۳۵]. هرچند حرکت‌های ناشی از افت‌وخیز گرمایی، باکتری‌ها را در محیط پخش می‌کنند، ولی به دو دلیل این نوع از حرکت‌ها معمولاً پاسخگوی نیاز باکتری‌ها نیستند. از طرفی قدرت این حرکت‌ها کم و از طرف دیگر راستای آنها نیز بی‌نظم و تصادفی است. به این سبب باکتری‌ها با سازوکارهای شیمیایی و فیزیکی مجبورند حرکت‌های مکانیکی مورد نیاز را ایجاد کرده و در محیط جابجا شوند. از آنجا که حرکت باکتری‌ها، عموماً در آب یا محیط‌هایی است که از نظر خواص فیزیکی بسیار شبیه به آب هستند، این پرسش به نظر مهم می‌رسد که آیا اصطکاک و چسبندگی آب، نقشی در حرکت آنها دارد؟ برای اینکه برآوردی از مرتبه‌ی بزرگی نیروی اصطکاک داشته باشیم، اجازه دهید آنرا کمی بیشتر با عدد و رقم بررسی کنیم. از نظر ظاهری، یک باکتری نوعی مانند باکتری ای‌گلای را می‌توانیم بصورت کره‌ای با شعاع تقریباً ۱ تا ۱۰ میکرومتر در نظر بگیریم. سرعت مشخصه‌ی باکتری‌ها از مرتبه‌ی ۱ میکرومتر بر ثانیه است. وشکسانی آب نیز برابر با ۱ میلی پاسکال ثانیه است. اکنون با استفاده از قانون استوکس، مقدار نیرو برابر با $10^{-14} N$ ، می‌شود. آیا این نیرو کوچک است؟ در واقع این نیرو باید با نیروی لختی مقایسه شود. از بحث‌های پیشین می‌دانیم که عدد رینولدز معیار این مقایسه است.

یک برآورد ساده مقدار عدد رینولدز را حدوداً برابر با 10^{-6} می‌دهد. این نتیجه، بسیار عجیب به نظر می‌رسد. در حرکت باکتری، اصطکاک بسیار زیاد است و لختی هیچ نقشی ندارد. این نکته تفاوتی اساسی بین دنیای بزرگ مقیاس ما و دنیای ریزمقیاس باکتری ایجاد می‌کند. در مسائل روزمره، ما همواره با کمک و امید به لختی، راحت‌تر حرکت می‌کنیم. مثلاً یک شناگر درون آب، با یک حرکت در دست یا پا و تولید یک حرکت اولیه‌ی رو به جلو، به علت وجود لختی مقدار زیادی به سمت جلو سوق پیدا می‌کند. شناگرهای ماهر استفاده‌ی بهینه‌ای از لختی می‌کنند تا به سرعت‌های بیشتر برسند. در دنیای باکتری‌ها لختی هیچ اهمیتی ندارد و هر چه هست اصطکاک است. باکتری‌ها شناگرهای بسیار ماهری هستند که در شرایط بدون لختی به



شکل ۱.۶ تاژک و مژک اندامک‌های حرکت ساز در باکتری‌ها و دیگر موجودات ریزمقیاس هستند. تاژک یک دنباله‌ی شبیه مارپیچ است. باکتری با چرخاندن تاژک می‌تواند شنا کند. مژک یک دنباله‌ی منعطف است که با به ارتعاش در آمدن، باکتری را به پیش می‌راند.



شکل ۲.۶ صدف، موجودی خیالی که یک درجه‌ی آزادی درونی دارد، نمی‌تواند شنا کند.

اندازه‌ای برابر با طول خود در هر ثانیه جابجا می‌شوند. اگر بخواهیم با یک شبیه‌سازی، شرایط شناکردن باکتری‌ها را در ابعاد ماکروسکوپی ایجاد کنیم، می‌توانیم وشکسانی محیط را افزایش دهیم. یک فرد شناگر که درون یک مایع بسیار وشکسان مثل عسل شنا می‌کند، همان تجربه‌ای را کسب می‌کند که باکتری درون آب. اکنون واضح است که چرا باکتری‌ها مجبورند شناگرهای بسیار ماهری باشند.

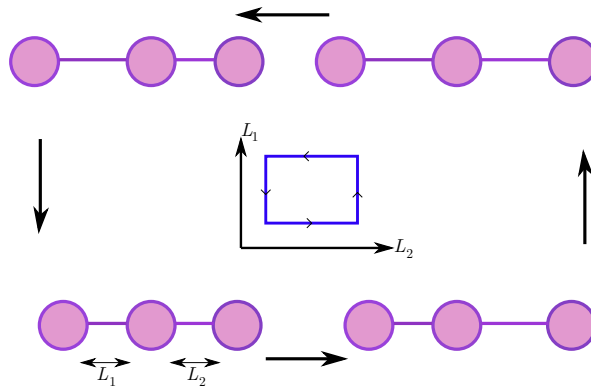
علاوه بر موضوع بالا که حرکت در دنیای باکتری‌ها را سخت می‌کند، مسأله‌ی دیگری نیز هست که بر پیچیدگی شرایط حرکتی در دنیای ریزمقیاس باکتری‌ها می‌افزاید. اجازه دهید پیش از شرح این موضوع، ساختار یک شناگر را کمی ساده‌تر کنیم. در واقع هر شناگر از اجزای کوچکتری تشکیل شده که هر کدام از آنها را می‌توانیم بصورت یک قسمت هندسی صلب در نظر بگیریم. مثلاً بدن یک فرد شناگر از اجزای دست‌ها، پاها و بدنه ساخته شده است. مطابق شکل ۱.۶، یک باکتری، معمولاً از یک بدنه‌ی کروی یا بیضی‌گون به همراه تعدادی تاژک یا مژک، ساخته شده است. شکل ۲.۶، تصویری از یک صدف را نشان می‌دهد. دو کفه که به هم لولا شده‌اند ساختار صدف را تشکیل می‌دهند. با توجه به بحث‌های قبلی، حرکت هر جز از این سامانه، از معادلاتی مشابه معادله‌ی ۱۱.۶ تبعیت می‌کند. اکنون بازگردیم به مسأله‌ی شناگر. اگر یک شناگر بخواهد با حرکت‌های تناوبی در اجزای خود به جلو منتقل شود، باید معادلات حرکت نیز این اجازه را بدهند. برای حرکت خالص روبه‌جلو، تقارن وارونی زمان شکسته می‌شود پس

معادلات حرکت نیز باید اجازه‌ی شکسته شدن تقارن وارونی زمان را بدهند. مطابق معادلات ۱۱.۶، ناوردایی معادلات حرکت تحت وارونی زمان، به شکل نیروها وابسته است. از طرف دیگر، چون نیروهای هیدرودینامیکی توسط حرکت‌های داخلی تولید می‌شوند، پس نباید سلسله حرکات تناوبی درونی که سامانه انجام می‌دهد، نسبت به وارونی زمان ناوردا باشند. تنها در این صورت جابجایی خالصی تولید شود. به این حرکت‌ها، حرکت‌های غیربازگشتی می‌گوییم. این موضوع دومین پیچیدگی شناگرهای ریزمقیاس است که برای تولید حرکت انتقالی خالص، شناگر باید مهارت در انجام حرکت‌های درونی غیربازگشتی را داشته باشد.

موضوع بالا را به صورتی دیگر نیز می‌توان دید. اجازه دهید به معادلات اساسی شارشی در شرایط بی‌لختی، یعنی معادلات استوکس و تراکم ناپذیری، بازگردیم. چون واگرایی سرعت صفر است، اگر واگرایی طرفین معادله‌ی استوکس را محاسبه کنیم به این نتیجه می‌رسیم که فشار در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند. اکنون لاپلاسی طرفین معادله‌ی استوکس را محاسبه می‌کنیم تا به نتیجه‌ی زیر برسیم:

$$\nabla^4 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (13.6)$$

این معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه ۴، تمام اطلاعات معادله‌ی استوکس و شرط تراکم ناپذیری را دارد. معادله‌ی تحولی شاره که به صورت بالا نوشته شده است، به وضوح تحت تبدیل وارونی زمان ناورداست. پس تنها راه برای شکستن این تقارن و تولید جابجایی خالص برای شناگر، در نوع شرط مرزی است. تغییرات قسمت‌های مختلف بدن شناگر، بصورت شرط مرزی به معادلات حرکتی شاره اضافه می‌شوند. این حرکات طوری باید باشند که تقارن وارونی زمان را بشکنند. همان‌طور که پیش از این نیز اشاره شد، سلسله حرکت‌های غیر بازگشتی پاسخ مسأله هستند. برای مثال آیا یک صدف خیالی که مطابق شکل ۲.۶، از دو کفه‌ی صلب تشکیل شده، می‌تواند با بازوبسته کردن دهان خود شنا کند؟ پاسخ منفی است. برای این سامانه هیچ راهی برای تولید حرکات داخلی غیربازگشتی (حرکاتی که تقارن وارونی زمان را ندارند) وجود ندارد. در واقع با تبدیل $t \rightarrow -t$ ، همیشه نیم‌دوره‌های بازکردن و بستن دهان به یکدیگر تبدیل می‌شوند. در این صورت سلسله حرکات درونی نسبت به تبدیل وارونی زمان ناوردا هستند. برای واضح شدن بحث، صدفی را در نظر بگیرید که به‌طور پیوسته و تناوبی، دو کفه‌ی خود را باز و بسته



شکل ۳.۶ یک شناگر متشکل از سه کره که توسط دو بازو به هم وصل شده‌اند. این سامانه با تغییر دادن طول بازوهای خود می‌تواند شنا کند. یک دورهی کامل از سلسله حرکات بازگشتی در شکل نشان داده شده است.

می‌کند. اگر یک فیلم از این صدف تهیه شود، هیچ راهی برای شناخت این فیلم از همان فیلم، ولی هنگامی که در جهت انتها به ابتدا نمایش داده می‌شود، نیست. آیا اهمیتی دارد صدف، با چه سرعتی دو کفهی خود را باز و بسته کند؟ اگر سرعت‌های باز و بسته کردن برابر نباشند، چه اتفاقی می‌افتد؟ از آنجا که در معادله‌ی حرکت شاره، یعنی رابطه‌ی ۱۳.۶، هیچ اثری از زمان نیست، پس سرعت‌های حرکت اهمیتی ندارند. در هر صورت صدف نمی‌تواند جابجایی خالصی تولید کند. صدف، تنها یک درجه‌ی آزادی درونی که زاویه‌ی بین دو کفه است، دارد. ساده‌ترین سامانه‌ای که می‌تواند شنا کند، باید دست‌کم دو درجه‌ی آزادی درونی داشته باشد. مثلاً سه کره که با دو بازو بصورت خطی به هم وصل شده‌اند را در نظر بگیرید. فرض کنید مطابق شکل ۳.۶، در لحظه‌ی اول (پائین شکل، سمت چپ) طول هر دو بازو یکسان باشد. ابتدا بازوی راست باز می‌شود، یعنی طول آن کمی افزوده می‌شود. سپس بازوی چپ هم باز می‌شود. در ادامه ابتدا بازوی راست و سپس بازوی چپ بسته می‌شوند. در طی این چهار مرحله، یک دورهی کامل از حرکات درونی انجام می‌شود تا سامانه به شکل اولیه‌ی خود بازگردد. دقت کنید این سلسله حرکات درونی غیر بازگشتی هستند. با تبدیل $t \rightarrow -t$ ، به سلسله حرکاتی می‌رسیم که کاملاً از سلسله حرکات اصلی قابل تمایز هستند. به این سبب این سامانه با تکرار این حرکات شنا کرده و به جلو منتقل می‌شود.

طبیعت در مورد باکتری‌ها، پاسخ هوشمندانه‌ای به مسأله تقارن و حرکت در دنیای نالخت داده است. مطابق شکل ۱.۶، همان‌طور که قبلاً اشاره شد، تاژک و مژک دو ابزار اساسی حرکت ساز در بیشتر باکتری‌ها هستند. برخی از باکتری‌ها با تاژک، برخی با مژک و برخی هم ممکن است با سازوکارهای ترکیبی چند تاژک و مژک حرکت کنند. یک فنر مارپیچ شکل صلب در بسیاری از موارد مدلی مناسب برای یک تاژک است. اگر یک سر این فنر را به بدنه‌ی باکتری وصل کنیم و آنرا در نقطه‌ی اتصال با روشی بچرخانیم، باکتری شنا می‌کند. این سامانه مشابه یک پیچ که با چرخاندن به درون چوب فرو می‌رود، به جلو منتقل می‌شود. در مقابل، مژک یک دنباله‌ی انعطاف پذیر است که به برخی از ریز موجودات متصل است. حرکت‌های موجی که از ابتدا به انتهای مژک منتشر می‌شوند، نقش یک حرکت درونی غیر بازگشتی را ایفا می‌کنند تا سامانه را به پیش برانند.

شناگر سه کره‌ای

سامانه شناگر سه-کره‌ای که در شکل ۳.۶ معرفی شد را در نظر بگیرید. می‌خواهیم معادلات حرکت این سامانه را بررسی کنیم [۸، ۵۱، ۳۳]. از آنجا که این سامانه یک بعدی است، طبق تقارن، حرکت آن روی یک خط ادامه پیدا می‌کند. پس برای سهولت هر سه کره را روی محور x ، قرار می‌دهیم. در این صورت مکان لحظه‌ای کره‌ها را با x_1 ، x_2 و x_3 نشان می‌دهیم. کره‌ی اولی در وسط و دو کره‌ی دیگر در جانب آن قرار گرفته‌اند. نیروهای هیدرودینامیکی وارد بر این کره‌ها را با f_1 ، f_2 و f_3 نشان می‌دهیم. اگر فاصله‌ی بین کره‌ها را از شعاع آنها بسیار بزرگتر بگیریم، می‌توانیم از برهمکنش هیدرودینامیکی اُسین استفاده کنیم. معادلات حرکت کره‌ها به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{f_1}{6\pi\eta a} + \frac{f_2}{4\pi\eta x_{21}} + \frac{f_3}{4\pi\eta x_{31}}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{f_1}{4\pi\eta x_{21}} + \frac{f_2}{6\pi\eta a} + \frac{f_3}{4\pi\eta x_{23}}, \\ \dot{x}_3 &= \frac{f_1}{4\pi\eta x_{31}} + \frac{f_2}{4\pi\eta x_{23}} + \frac{f_3}{6\pi\eta a},\end{aligned}\quad (14.6)$$

که در آن x_{12} ، فاصله‌ی بین دو کره‌ی ۱ و ۲ است. برای توصیف حرکت‌های داخلی این سامانه،

فرض کنید که یک موتور مولکولی روی کره‌ی ۱ (کره‌ی وسطی) قرار دارد. این موتور می‌تواند به توالی طول بازوهای راست و چپ را تغییر دهد. برای سهولت، فرض می‌کنیم حرکت بازوها بصورت پیوسته انجام شوند. برای اینکه از تقریب اُسین دور نشویم، فرض می‌کنیم طول بازوها حول یک مقدار متوسط L با دامنه‌ی u_0 و با شروط $u_0 \ll L$ و $a \ll L$ نوسان کنند. فرکانس نوسان‌ها را برابر با ω می‌گیریم. در این صورت:

$$x_{12} = L + u_0 \cos(\omega t), \quad x_{13} = L + u_0 \cos(\omega t + \Phi), \quad (15.6)$$

که در اینجا فرض کرده‌ایم، یک اختلاف فاز Φ بین حرکت دو بازو باشد. از آنجا که سامانه‌ی شناگر با حرکت‌های درونی حرکت می‌کند، پس هیچ نیروی خالصی به آن وارد نمی‌شود. در این صورت داریم:

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0. \quad (16.6)$$

حالت حرکتی سامانه سه-کره‌ای با شش متغیر مشخص می‌شود، سه متغیر مربوط به سرعت کره‌ها و سه متغیر مربوط به نیروی وارد بر آنها. سه معادله‌ی ۱۴.۶، دو معادله‌ی ۱۵.۶ و یک معادله‌ی ۱۶.۶، شش معادله‌ی لازم برای یافتن تمامی مجهول‌ها هستند. با حل همزمان این معادلات حرکتی می‌توانیم تمامی مشخصات دینامیکی سامانه‌ی سه کره‌ای را به دست آوریم. مهم‌ترین کمیت، سرعت جابجایی یا سرعت شناکردن است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_S = \frac{1}{3} (\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3).$$

با اندکی محاسبه، شکل دقیق سرعت شناکردن بر حسب متغیرهای حرکات درونی این سامانه به دست می‌آید. حرکت مرکز جرم این سامانه، یک حرکت نوسانی است که به صورت متوسط به یک سو سوق پیدا می‌کند. در واقع در هر دوره‌ی نوسان درونی، کره‌ی مرکزی کمی جابجا می‌شود. شکل ریاضی رابطه‌ی سرعت کمی بزرگ است، ولی برای حالت حدی $a \ll L$ و $u_0 \ll L$ ، سرعت متوسط شناگر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\langle V_S \rangle = \frac{\gamma}{24} \left(\frac{u_0}{L} \right)^2 a \omega \sin \Phi.$$

در رابطه‌ی بالا مقدار متوسط سرعت، با متوسط گیری زمانی روی یک دوره‌ی کامل از حرکت‌های درونی انجام شده است. همانطور که انتظار داشتیم، سرعت متوسط، تنها برای حالتی که بین دو بازو اختلاف فاز وجود دارد، غیر صفر است. در واقع در این صورت است که حرکات درونی این سامانه، مجموعه‌ای از حرکات بازگشتی هستند. برای $\Phi \neq 0$ ، مسیر بسته‌ای که در شکل ۳.۶، نشان داده شده است، یک مسیر بیضی شکل است.

متوسط نیروهای هیدرودینامیکی نیز به صورت زیر است:

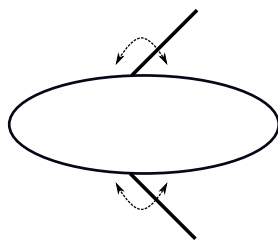
$$\langle f_1 \rangle = -2\langle f_2 \rangle = -2\langle f_3 \rangle = \frac{5}{4}\pi\eta\left(\frac{u_0}{L}\right)^2 a^2 \omega \sin \Phi.$$

جالب توجه است که این شناگر، شبیه یک چهار قطبی نیرو رفتار می‌کند. میدان سرعت یک شناگر سه-کراهی در فواصل دور، شبیه میدان سرعت یک چهار قطبی نیرو است. اگر مجموعه‌ای از شناگرهای ریز مقیاس در کنار هم حرکت کنند، هر کدام از آنها را می‌توانیم شبیه یک چهار قطبی نیرو تصور کنیم. این چهار قطبی‌های نیرو، همدیگر را تحت اثر قرار می‌دهند. این موضوع می‌تواند سرآغازی باشد برای توصیف اثرهای متقابل بین باکتری‌ها و طرح‌های منظمی که آنها تشکیل می‌دهند. جزئیات حرکت دسته‌ی دیگری از شناگرها در مراجع [۳۴، ۳۵] ارائه شده است.

در این فصل سعی کردیم بطور مختصر مبانی ریاضی و فیزیکی شارش نالخت را ارائه کنیم. مبحث شارش نالخت امروزه و با اهمیتی که مسائل شاخه‌ی ماده‌ی چگال نرم پیدا کرده‌اند، مجدداً مورد توجه قرار گرفته است. به خواننده‌ی علاقه‌مند توصیه می‌شود برای آشنایی با روش‌های ریاضی دقیق‌تر به مرجع [۳۹] مراجعه کند.

پرسش‌ها

- ۱.۶ یک نیروی نقطه‌ای به قدرت F ، به فاصله‌ی d از یک صفحه‌ی صلب واقع شده است. میدان سرعت این نیروی نقطه‌ای را بدست آورید. راهنمایی: می‌توانید از روش بسط بر حسب چند قطبیه‌ها و روش تصویر مشابه مسائل الکتروستاتیک استفاده کنید.
- ۲.۶ یک نیروی نقطه‌ای در مجاورت یک صفحه و روی یک مسیر دایره‌ای شکل با سرعت ثابت v ، حرکت می‌کند. شعاع مسیر دایره‌ای برابر با R و موازی با صفحه است. فاصله‌ی مرکز دایره از صفحه را نیز برابر با h بگیرید. متوسط میدان سرعت شار در فواصل دور از صفحه چه شکلی دارد؟
- ۳.۶ یک کره‌ی صلب را در نظر بگیرید که در مجاورت یک صفحه‌ی صلب حرکت می‌کند. نیروی هیدرودینامیکی وارد این کره برای حرکت موازی صفحه بیشتر است یا برای حرکت عمود بر صفحه؟ از استدلال‌های کیفی استفاده کنید.
- ۴.۶ مطابق شکل ۴.۶، یک قایق با دو پارو را در نظر بگیرید. برای حرکت این قایق در شرایط بدون لختی، پاروها چگونه باید حرکت کنند؟



شکل ۴.۶ طرحی از یک قایق با دو پاروی صلب.

- ۵.۶ در مسأله‌ی صدف گفته شد که سرعت باز و بسته شدن مهم نیست و در هر صورت صدف جابجایی خالص ندارد. آیا طول زمان‌های باز و بسته شدن نیز بی‌اهمیت هستند؟
- ۶.۶ برای شناگر سه کره‌ای عبارت‌هایی تحلیلی برای نیروی وارد بر کره‌ها پیش از متوسط

گیری زمانی به دست آورید. دامنه‌ی نوسان و اندازه‌ی کره‌ها را بسیار کوچک بگیرید و از بسط تیلور استفاده کنید.

۷.۶ با استفاده از نتایج مسأله‌ی قبلی، انرژی تلف شده در یک دوره‌ی نوسان داخلی را به دست آورید. راهنمایی: با در دست داشتن نیروی وارد بر هر کره، انرژی تلف شده در یک دوره‌ی نوسان از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\int_0^T dt f_i(t) \dot{x}_i(t),$$

۸.۶ که در آن i معرف شماره‌ی کره است. آیا می‌توانید در مورد بازده این شناگر بحث کنید؟ شارش اطراف کره‌ای با شعاع R که با سرعت ثابت V در شرایط $Re \ll 1$ حرکت می‌کند، در این فصل بررسی شد. علی‌رغم کوچک بودن عدد رینولدز در مجاورت کره، یک استدلال ساده نشان می‌دهد در نواحی خیلی دور از کره جمله‌ی اینرسی هم سهم دارد. میدان شارش اطراف کره به صورت $\mathbf{u} \sim \frac{R}{r} V$ با دور شدن از کره اُفت می‌کند. نشان دهید در نقاط خیلی دور از کره، نسبت نیروی ناشی از اینرسی به نیروی وiskسسانی برابر است با:

$$Re \frac{r}{R},$$

بنابراین اگر آنقدر از کره دور شویم که نسبت R/r از عدد رینولدز کوچکتر یا هم‌مرتبه با آن باشد ($O(Re)$)، آنگاه نسبت بالا از مرتبه‌ی یک می‌شود و اینرسی تأثیر گذار خواهد بود. اُسین نشان داد که این تصحیحات نیروی اصطکاک را اندکی تغییر می‌دهد [۲]. نشان دهید ضریب اصطکاک به صورت زیر می‌شود:

$$C_D = \frac{12}{Re} \left(1 + \frac{3}{8} Re \right).$$

راهنمایی: جمله‌ی اینرسی را بصورت $\rho V \cdot \nabla \mathbf{u}$ تخمین بزنید.

۹.۶ نیرویی با توزیع زیر را در نظر بگیرید که روی شاره اعمال می‌شود:

$$\mathbf{f}(\delta(\mathbf{x} - \mathbf{d}/2) - \delta(\mathbf{x} + \mathbf{d}/2)).$$

با انتگرال‌گیری مستقیم نشان دهید:

$$\oint_A [\sigma_{ik} x_j - \eta(u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik})] ds_k = f_i d_j,$$

که در آن انتگرال‌گیری روی سطحی انجام می‌شود که تکینگی‌ها را در بر می‌گیرد. محاسبات در شرایط بدون لختی انجام شود.



پی‌یرژیل دُرن (۲۴ اکتبر ۱۹۳۲ – ۱۸ می ۲۰۰۷)، فیزیک‌دان فرانسوی و برنده‌ی جایزه‌ی نوبل فیزیک در سال ۱۹۹۱ برای کشفیاتی مربوط به نظم‌گیری مولکول‌ها در بلورهای مایع و پلیمرها است. وی از پدری فیزیک‌دان زاده شد و در دانشگاه اکُل نورمال سوپریور فرانسه به تحصیل پرداخت. بین سال‌های ۱۹۵۵ تا ۱۹۶۱ به‌عنوان یک مهندس در کمیسیون انرژی اتمی فرانسه مشغول به کار شد. سپس از سال ۱۹۶۱ تا ۱۹۷۱ استاد گروه بلورهای مایع دانشگاه پاریس شد. وی بین سال‌ها ۱۹۷۱ تا ۱۹۷۶ در کالج دُفرانس تدریس می‌کرد. در همین دانشگاه، یک گروه شیمی فیزیک صنعتی را تأسیس کرد. ریاست این گروه تا سال ۲۰۰۲ بر عهده‌ی خود او بود. کتاب‌های دُرن در ابرسانایی، فیزیک پلیمرها، بلورهای مایع و ترکندگی شاره‌ها از شاخص‌ترین کتاب‌های فیزیک هستند. دُرن علاوه بر کتاب‌های تخصصی، سعی زیادی در ارائه‌ی سخنرانی‌ها و نگارش کتاب‌هایی داشت تا افراد غیر متخصص را با زبانی ساده با موضوعات علمی آشنا کند.

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان



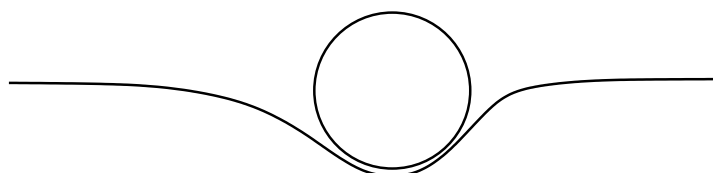
مرز مشترک شارها

دو شارهای ترکیب نشدنی وقتی کنار هم و در یک ظرف قرار می‌گیرند، یک مرز مشترک دارند. این مرز مشترک جایی است که مولکول‌های دوشاره کنار هم قرار گرفته‌اند. مرز مشترک آب با هوا و آب با روغن مثال‌هایی هستند که در تجربه‌های روزمره بسیار با آنها برخورد می‌کنیم. پدیده‌های جالب زیادی در مرز مشترک شارها اتفاق می‌افتند [۱۰، ۱۲، ۱۱]. قطره‌ی باران که روی شیشه‌ی اتومبیل یا شیشه‌ی عینک می‌افتد را در نظر بگیرید. شکل قطره و رفتار ترکندگی آن بسیار مورد توجه ما است. معمولاً تمایل داریم شیشه تر نشود. خواص فیزیکی مرز مشترک، نوع ترکندگی را تعیین می‌کند. در مرز مشترک شارها، انرژی کشش سطحی، نقش اساسی و تعیین کننده‌ای در رفتار تعادلی و دینامیکی پدیده‌ها دارد. در این فصل با معرفی کشش سطحی، برخی از پدیده‌های سطحی را بررسی می‌کنیم. پدیده‌های مویینگی، ترکندگی قطره‌ها، شکل قطره‌ها و نحوه‌ی انتشار امواج سطحی، از مواردی هستند که در این فصل مطالعه می‌کنیم.

۱.۷ کشش سطحی

مهم‌ترین شاهد برای وجود نیروی کشش سطحی، باقی ماندن اجسام سبک مثل سنجاقک و دیگر

حشرات روی آب است. این اجسام بدون فرو رفتن داخل آب، روی سطح آن به حالت تعادل قرار می‌گیرند. مطابق شکل ۱.۷، و به علت وجود کشش سطحی با قرار گرفتن یک جسم سبک روی آب، شکل سطح آب تغییر کرده و سطح کشیده می‌شود. به نظر می‌رسد که نیرویی از طرف سطح آب وجود دارد که با نیروی وزن به تعادل می‌رسد. به صورت پدیده شناختی به سطح آب (مرز مشترک آب با هوا)، انرژی سطحی متناسب با اندازه‌ی سطح A نسبت می‌دهیم. انرژی سطحی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:



شکل ۱.۷ یک جسم سبک به علت وجود کشش سطحی روی سطح آب می‌ماند. نیرویی از طرف سطح کشیده شده در جهت رو به بالا به جسم وارد می‌شود. این نیروی ناشی از کشش سطحی، تعادل جسم را برقرار می‌کند.

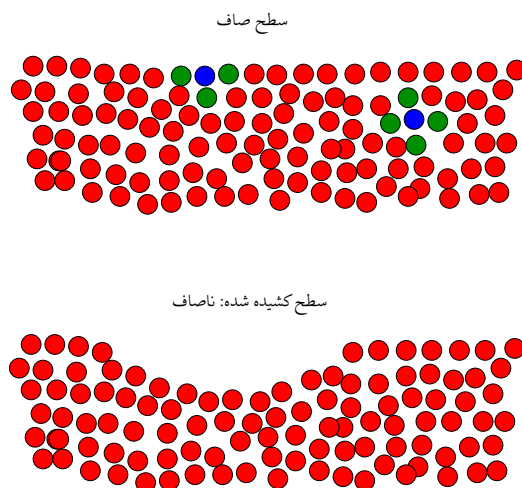
$$E = \sigma A, \quad (۱.۷)$$

که در آن ضریب تناسب σ ، معرف کشش سطحی شاره است. با قرار گرفتن جسم سبک روی آب، سطح آب کشیده شده و A افزایش می‌یابد. در این صورت انرژی سامانه افزوده شده و از حالت تعادل دور می‌شود. پس سامانه تمایل دارد با کم کردن سطح و هل دادن جسم به سمت بالا به حالت انرژی کمتر باز گردد.

از نظر ریز مقیاس، منشأ نیروهای کشش سطحی، انرژی برهمکنش‌های بین مولکولی است که در فواصل بین مولکولی اثر می‌کنند. در تصویر ریز مقیاس (شکل ۲.۷)، تعداد مولکولهای روی سطح را با N_s و تعداد مولکولهای داخل حجم را با N_b نشان می‌دهیم. انرژی آزاد متوسط هر مولکول روی سطح را با ϵ_s و انرژی آزاد متوسط هر مولکول درون حجم را با ϵ_b نشان می‌دهیم.^۱

برای مطالعه‌ی تعادل سامانه‌های ترمودینامیکی، از کمیتی به نام انرژی آزاد استفاده می‌شود. علاوه بر نیروهای بین	مولکولی، آنتروپی هم در انرژی آزاد یک سامانه سهم دارد. افزایش آنتروپی، کاهش انرژی آزاد را در پی دارد. حالت تعادل یک	سامانه‌ی ترمودینامیکی با کمینه کردن انرژی آزاد آن به دست می‌آید.
--	--	--

در این صورت انرژی سامانه در دو وضعیت ۱ (سطح صاف) و ۲ (سطح کشیده شده‌ی ناصاف) بصورت زیر است:



شکل ۲.۷ ساختار ریز مقیاس یک سطح صاف و سطح کشیده شده‌ی ناصاف. با کشیده شدن سطح، تعداد مولکولهای سطحی افزوده می‌شود.

$$\begin{aligned} E_1 &= N_b^1 \epsilon_b + N_s^1 \epsilon_s, \\ E_2 &= N_b^2 \epsilon_b + N_s^2 \epsilon_s, \end{aligned} \quad (2.7)$$

که در آن $N_{s(b)}^{1,2}$ ، تعداد مولکولها سطحی (حجمی) در دو حالت صاف و کشیده را مشخص می‌کنند. با توجه به پایداری تعداد کل ذرات داریم:

$$N_b^1 + N_s^1 = N_b^2 + N_s^2 = N. \quad (3.7)$$

اکنون اختلاف انرژی دو حالت برابر می‌شود با:

$$E_2 - E_1 = (N_s^2 - N_s^1)(\epsilon_s - \epsilon_b). \quad (4.7)$$

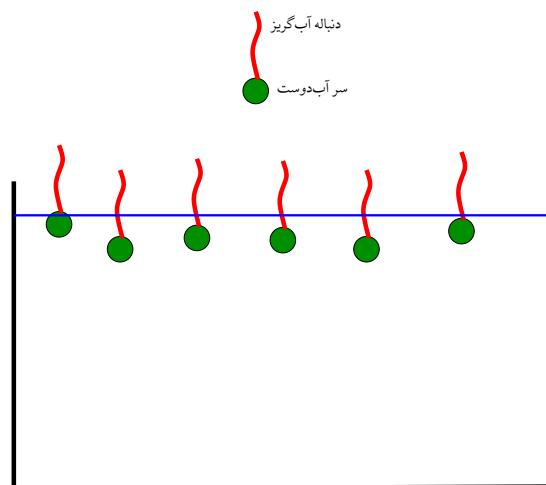
در این رابطه $(N_s^2 - N_s^1)$ ، اختلاف تعداد مولکولهای روی سطح برای دو حالت سطح کشیده

و سطح صاف است. این کمیت همواره مثبت و البته متناسب با اندازه‌ی افزایش سطح است. آیا $(\epsilon_s - \epsilon_b)$ کمیتی با علامت مشخص است؟

فضای اطراف مولکولهای درون حجم، فضایی همسانگرد است. این مولکولها، از هر طرف بصورت یکسان تحت اثر مولکولهای دیگر هستند. ولی مولکولهای روی سطح این طور نیستند، این مولکولها در حرکت خود، فضایی ناهمسانگرد را تجربه می‌کنند. به بیان دیگر، حرکت‌های بی‌نظم مولکولهای درون حجم در مقایسه با مولکولهای سطحی با سهولت بیشتری انجام می‌شوند و این مولکولها آنتروپی بیشتری دارند. از آنجا که آنتروپی سهم مهمی در انرژی آزاد مولکولها دارد، بیشتر بودن آنتروپی در مورد مولکولهای درون حجم به کمتر شدن انرژی آزاد آنها می‌انجامد. پس مولکولهای درون حجم وضعیت پایدارتری نسبت به مولکولهای سطحی دارند و $\epsilon_s > \epsilon_b$. بدین سان $E_1 > E_2$ ، و بنابراین سطح صاف، حالت پایدارتری نسبت به سطح کشیده است. تصویر ریزمقیاس بالا، یک تصویر بسیار ساده شده از این سامانه‌ی فیزیکی است. این تصویر با وجود سادگی، منشأ نیروی کشش سطحی را بسیار خوب نشان می‌دهد. جزئیات دقیق‌تر این نوع نگرش در مکانیک آماری بررسی می‌شود.

ماده‌ی فعال سطحی

برخی از مواد، به عنوان مثال مواد شوینده، مواد فعال سطحی هستند. با افزودن مواد فعال سطحی به آب، کشش سطحی آن به میزان قابل ملاحظه‌ای کم می‌شود. برای درک علت این موضوع لازم است که مختصری در مورد خصوصیات مولکولهای ماده‌ی شوینده توضیح دهیم. مطابق شکل ۳.۷، مولکولهای مواد شوینده پلیمرهای بلندی هستند که از یک سر قطبی و یک دنباله‌ی غیر قطبی تشکیل شده‌اند. از آنجا که مولکولهای آب قطبی هستند، سر قطبی مولکول شوینده تمایل به حل شدن در آب دارد. به این دلیل به سر قطبی مولکولهای شوینده، سر آب‌دوست نیز گفته می‌شود. به دلیل مشابه به دنباله‌های غیر قطبی این مولکولها، آب‌گریز گفته می‌شود. با افزودن این مولکولها به آب، سرهای آب‌دوست این مولکولها در آب حل می‌شوند ولی قسمت آب‌گریز آنها ترجیحاً از آب دور می‌شوند. نتیجه‌ی این وضعیت دوگانه، تجمع این مولکولها در روی سطح آب است، که به این سبب به این مواد، مواد فعال سطحی گفته می‌شود. همانطور که



شکل ۳.۷ مولکولهای ماده‌ی شوینده، در سطح خارجی آب جمع می‌شوند.

قبلاً توضیح داده شد، در مرز مشترک آب خالص با هوا، تمایل مولکولها به کاهش سطح است. افزوده شدن مواد فعال سطحی چطور این تمایل را تغییر می‌دهد؟ برای یافتن پاسخ به این سؤال، کمی اطلاعات مکانیک آماری کمک می‌کند. با افزودن مقدار خیلی کمی ماده‌ی فعال سطحی، مولکولهای آن بصورت تقریباً یکنواخت روی سطح توزیع می‌شوند. سؤال اساسی که باید پاسخ دهیم این است که انرژی آزاد سامانه جدید، افزایش می‌یابد یا کاهش؟ اگر مقدار ماده‌ی شوینده کم باشد، مولکول‌های آن تغییر محسوسی در انرژی آزاد مولکول‌های آب ایجاد نمی‌کنند. اکنون باید سهم انرژی آزاد مولکولهای ماده‌ی شوینده را اضافه کنیم. در مورد این مولکولها نیز بیشترین سهم انرژی آزاد از آنتروپی و حرکت‌های بی‌نظم آنها ناشی می‌شود. افزوده شدن آنتروپی همواره انرژی آزاد را کاهش می‌دهد. بنابراین به علت آنتروپی مولکولهای شوینده که روی سطح آب آزادانه حرکت می‌کنند، انرژی آزاد سامانه جدید کمتر از سامانه قبلی است. درواقع این مولکولها مانند یک گاز دوبعدی خیلی رقیق، به مرزهای خود نیرو وارد کرده و سعی در افزودن مقدار سطح دارند. پس مولکولهای آب و مولکولهای ماده‌ی شوینده در اثرهای مربوط به سطح با هم رقابت می‌کنند. در این صورت با افزودن ماده‌ی شوینده، کشش سطحی به‌طور موثر کاسته می‌شود. نمود عملی این کاهش کشش سطحی در تولید کف است. با افزودن ماده‌ی شوینده به آب،

کشش سطحی کاهش یافته و سطح مشترک آب و هوا راحت تر کشیده می شود. با حرکت دادن این سامانه به راحتی تعداد زیادی حباب تولید می شود.

برآورد مرتبه‌ی بزرگی σ

از نظر ابعادی، کشش سطحی (σ)، از نسبت بین یک انرژی مشخصه و یک سطح مشخصه‌ی ریزمقیاس در سامانه بدست می آید. در نگاه ریزمقیاس، انرژی مشخصه در واقع انرژی برهمکنشی مولکولهای مجاور هم است [۴۲]. در مورد آب این انرژی برابر است با انرژی پیوندهای هیدروژنی که بزرگی آن از مرتبه‌ی $k_B T$ است^۱. در دمای اتاق این انرژی از مرتبه‌ی $0.025 eV$ است. در ابعاد ریزمقیاس، فاصله‌ی متوسط بین مولکولهای مجاور، یک طول مشخصه در سامانه است. از توان دوم این طول می توانیم سطح مشخصه را بدست آوریم. فاصله‌ی متوسط بین مولکولهای مجاور در آب از مرتبه‌ی $1 \text{ \AA}$ است. پس:

$$\sigma \sim \frac{k_B T}{(10^{-10})^2} \sim \frac{0.025 eV}{10^{-20} m^2} \sim 0.2 J/m^2. \quad (5.7)$$

مرتبه‌ی بزرگی عدد بدست آمده بسیار نزدیک به مقادیر واقعی است. به عنوان نمونه، برخی از مقادیر دقیق کشش سطحی که نتیجه‌ی آزمایش های تجربی هستند، عبارتند از:

$$\sigma_{\text{آب-هوا}} = 0.072 J/m^2,$$

$$\sigma_{\text{جیوه-هوا}} = 0.487 J/m^2,$$

$$\sigma_{\text{استون-هوا}} = 0.023 J/m^2,$$

$$\sigma_{\text{آب-جیوه}} = 0.415 J/m^2.$$

با زیاد شدن دما، انرژی گرمایی زیاد می شود. از طرف دیگر فاصله‌ی متوسط بین مولکول ها در بیشتر شارها با افزایش دما زیاد می شود. اکنون به نظر شما با زیاد شدن دما، کشش سطحی چه تغییری می کند؟

^۱ این نتیجه‌ای از مکانیک آماری است که در آن k_B ثابت بولتزمن و T دمای مطلق سامانه است.

۲.۷ قانون یانگ-لاپلاس

مرز مشترک شاره‌ها تحت اثر نیروهای خارجی تغییر شکل می‌دهد. می‌خواهیم به صورت پدیده‌شناختی و بزرگ‌مقیاس، رفتار مرز مشترک شاره‌ها را مطالعه کنیم. مرز مشترک بین دو شاره را در نظر بگیرید که خمیده شده است. نشان می‌دهیم که این خمیدگی با اختلاف فشار دو سوی سطح ارتباط دارد. مطابق شکل ۴.۷ و برای سهولت یک صفحه (مرز مشترک) را در نظر بگیرید که تنها در یک راستا خمیده شده است. مقطع این صفحه بصورت یک خم دو بعدی نشان داده شده است. یک سطح بی‌نهایت کوچک روی این مرز مشترک خمیده به طول Δl و عرض L را در نظر بگیرید. بردارهای $\hat{t}$ و $\hat{n}$ به صورت موضعی و در یک سر سطح بی‌نهایت کوچک بر این خم مماس و عمود هستند. بردار عمود طوری انتخاب شده که بر سطح خمیده نیز عمود است. نیروی کشش سطحی f از دو سو به این سطح وارد می‌شود. جهت‌های این دو نیرو در راستای بردارهایی هستند که به صورت موضعی بر آن خم مماس هستند. چون Δl را بسیار کوچک گرفته‌ایم پس این دو بردار مماس، زاویه‌ی بسیار کوچک $\Delta\phi$ را با یکدیگر می‌سازند. برای $\Delta\phi$ خیلی کوچک، تصویر نیروی برآیند در راستای $\hat{t}$ با هم به تعادل می‌رسند ولی تصویر آن در راستای $\hat{n}$ با هم به تعادل نمی‌رسند و برابر با $-f\Delta\phi\hat{n}$ است^۱. اگر سطح مشترک بین دو شاره در حالت تعادل باشد، باید این نیروی عمودی با نیروی دیگری به تعادل برسد. اختلاف فشار دوسوی مرز مشترک، منشأ این نیروی اضافی است. پس:

$$f\Delta\phi = \Delta P \times \Delta l \times L, \quad (6.7)$$

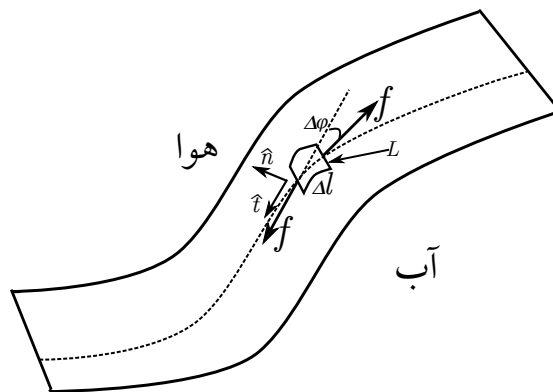
که $\Delta P = P_2 - P_1$ اختلاف فشار دو سوی سطح خمیده است. از طرف دیگر نیروی کشش سطحی از مشتق انرژی سطحی به دست می‌آید، پس $f = (\sigma L \Delta l) / \Delta l$. در این صورت داریم:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta l} = \frac{\Delta P L}{f} = \frac{\Delta P L}{\sigma L} = \frac{\Delta P}{\sigma}, \quad (7.7)$$

و از آنجا:

$$\Delta P = \sigma \times \frac{\Delta\phi}{\Delta l}. \quad (8.7)$$

^۱ برای زوایای بسیار کوچک داریم: $\sin \Delta\phi \approx \Delta\phi$ و $\cos \Delta\phi \approx 1$.



شکل ۴.۷ نیروهای وارد بر یک عنصر بی نهایت کوچک سطح از یک مرز مشترک بین دو شار که خمیده شده است.

ترکیب $\frac{\Delta\phi}{\Delta l}$ را در نظر بگیرید. تغییرات زاویه‌ی مماس بر خم وقتی در راستای خم حرکت می‌کنیم، از نظر هندسی به عکس شعاع انحنای خم بستگی دارد. به عنوان مثال، فرض کنید خم مورد نظر یک دایره به شعاع R باشد. در این صورت طول کمان l ، به زاویه‌ی کمان ϕ ، بصورت $l = R\phi$ بستگی دارد. در نتیجه:

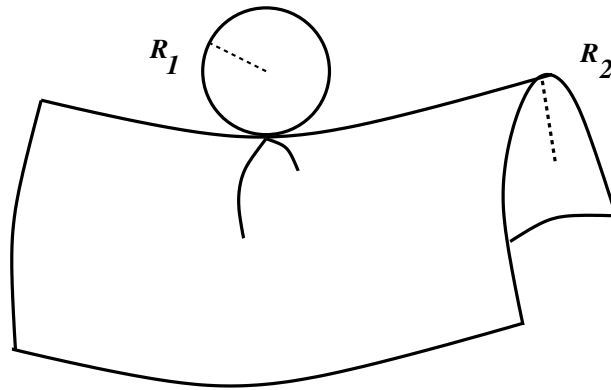
$$\frac{\Delta\phi}{\Delta l} = \frac{d}{dl}\phi = \frac{1}{R}.$$

اکنون اگر خم مورد نظر ما یک شکل کلی و غیر دایره‌ای داشته باشد، $\frac{\Delta\phi}{\Delta l}$ به عنوان عکس شعاع انحنای موضعی خم تعریف می‌شود. مقدار شعاع انحنای موضعی برابر با شعاع انحنای دایره‌ای است که در آن نقطه به صورت موضعی به خم مماس است.

اکنون می‌توانیم اختلاف فشار دو سوی مرز مشترک خمیده را به عکس شعاع انحنای سطح ارتباط دهیم:

$$\Delta P = \sigma \times \frac{1}{R}. \quad (9.7)$$

این صورت قانون یانگ-لاپلاس است. در حالت کلی تر که مرز مشترک در هر دو جهت خمیده شده است، قانون لاپلاس بر حسب دو شعاع انحنای اصلی خم یعنی R_1, R_2 ، بصورت زیر می‌شود:



شکل ۵.۷ سطح زینی مثالی از سطحی با انحنا در دو سو می‌باشد. در این مورد علامت دو انحنا نیز با هم متفاوت است.

$$\Delta P = \sigma \times \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (10.7)$$

یک سطح کروی، مثالی از یک سطح خمیده است که دو شعاع انحنای اصلی آن با هم برابر هستند. نقطه‌ی زینی، نشان داده شده در شکل ۵.۷، مثالی از یک رویه با دو شعاع انحنای متفاوت (یکی مثبت و دیگری منفی) است.

حباب صابون

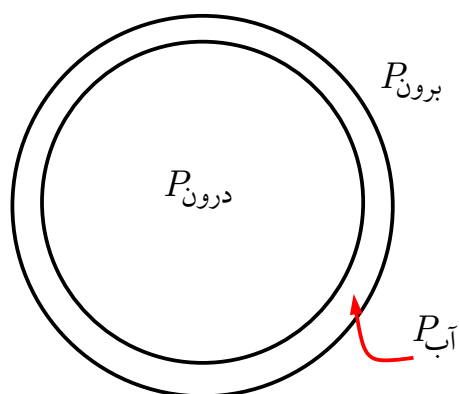
مطابق شکل ۶.۷، یک حباب کروی صابون را در نظر بگیرید. این حباب صابون از دو مرز مشترک درست شده است. یکی مرز بین لایه‌ی آب با هوای درون و دیگری بین لایه‌ی آب با هوای خارج. در این صورت خواهیم داشت:

$$P_{\text{درون}} - P_{\text{برون}} = 4 \frac{\sigma}{R}. \quad (11.7)$$

توجه کنید که شعاع‌های انحنای اصلی رویه‌ی کروی با هم برابرند.

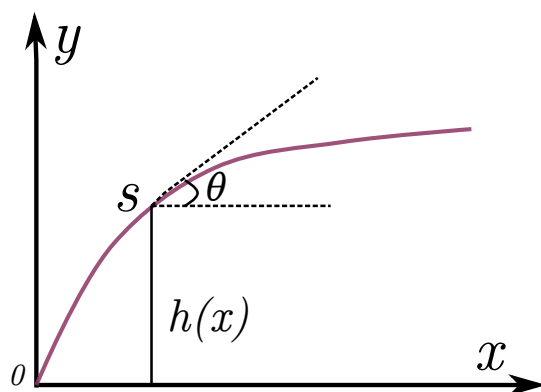
لایه‌ی صابون روی قاب باز

می‌خواهیم یک لایه‌ی حباب صابون را روی یک قاب قرار دهیم. در واقع یک سطح باز با مرز



شکل ۶.۷ فشار داخل حباب صابون از فشار خارج بیشتر است.

خمیده به شکل قاب اولیه تشکیل می‌شود. با توجه به این‌که در هر دو سوی سطح، هوا داریم و فشار هوا تقریباً ثابت است پس اختلاف فشار دوسوی مرز مشترک صفر است: $\Delta P = 0$. در این صورت باید داشته باشیم:



شکل ۷.۷ یک خم دلخواه در صفحه‌ی دو بعدی.

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0. \quad (12.7)$$

این معادله یک جواب بدیهی $R_1 = R_2 = \infty$ دارد. این جواب فقط برای قابی صادق است که روی یک صفحه‌ی صاف درست شده است. در این صورت یک لایه‌ی کاملاً صاف صابون

تشکیل می‌شود. ولی در حالت کلی جواب $R_1 = -R_2$ نیز اختلاف فشاری تولید نمی‌کند. در این صورت لایه‌ی صابون در هر نقطه یک نقطه‌ی زینی کامل است.

خمیدگی کم

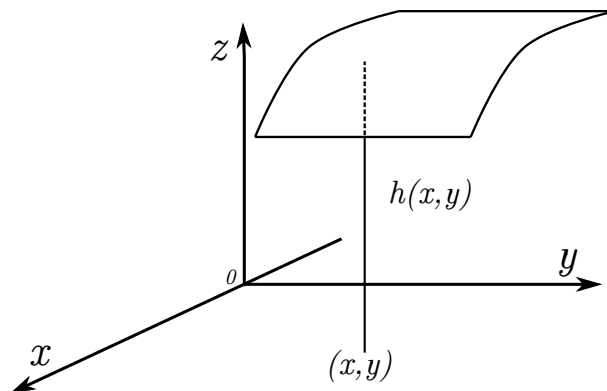
هندسۀ دیفرانسیل شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن به مطالعه‌ی خم‌ها و رویه‌ها پرداخته می‌شود. در این قسمت می‌خواهیم اندکی در مورد ریاضیات خم‌ها و رویه‌ها بحث کنیم. مطابق شکل ۷.۷، یک خم دلخواه در صفحه‌ی دوبعدی (x, y) را در نظر بگیرید. مختصات مونث، یک روش ساده برای نشان دادن شکل پارامتری این خم است. در این روش شکل هندسی خم با بردار مکان نقاط آن و به شکل زیر مشخص می‌شود:

$$\mathbf{R} = (x, h(x)). \quad (۱۳.۷)$$

طبق تعریف برای شعاع انحنای موضعی خم داریم:

$$R^{-1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d}{ds} \arctan\left(\frac{d}{dx}h(x)\right) \quad (۱۴.۷)$$

اگر خمیدگی زیاد نباشد، خم کُند تغییر است. برای خم کُند تغییر، $1 \ll h(x) \frac{d^2}{dx^2}h(x)$ و



شکل ۸.۷ یک رویه‌ی خمیده غوطه‌ور در فضای ۳ بعدی.

$s \approx x$ بنابراین:

$$R^{-1} \approx \frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{d}{dx}h(x)\right) \approx \frac{d^2}{dx^2}h(x). \quad (۱۵.۷)$$

این رابطه شعاع انحنا خم‌هایی با انحنای کم را بدست می‌دهد. پس از بررسی انحنای خم‌ها اکنون می‌توانیم در مورد رویه‌های ۲ بُعدی خمیده که در فضای ۳ بُعدی غوطه‌ور هستند بحث کنیم. مطابق شکل ۸.۷، مختصات نقاط روی سطح را بصورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{R} = (x, y, h(x, y)),$$

به سهولت می‌توانید نشان دهید که برای یک رویه‌ی کُند تغییر، مجموع دو شعاع انحنای اصلی بصورت زیر است:

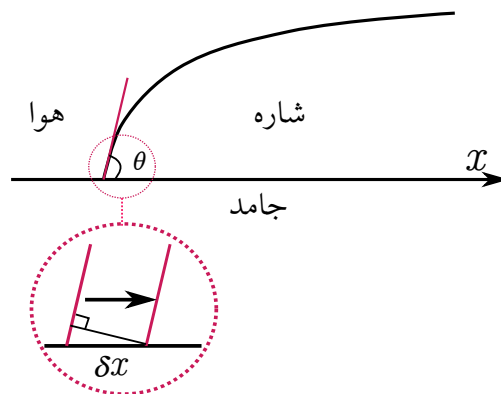
$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \approx \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} h(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} h(x, y)\right). \quad (۱۶.۷)$$

از روابط ریاضی این قسمت در قسمت‌های بعدی استفاده می‌کنیم.

۳.۷ ترکنندگی

شکل هندسی قطرات وقتی که روی یک سطح قرار می‌گیرند، یکی از نمودهای تجربی کشش سطحی است. قطرات بسته به شرایط، شکل متفاوتی دارند. در بعضی شرایط قطره پخش شده و سطح را کاملاً تر می‌کند. ولی در شرایط دیگر ممکن است قطره تمایلی به تر کردن نداشته باشد. در مورد قطره‌ای که روی یک سطح جامد قرار می‌گیرد، سه نوع مرز مشترک داریم. مرز مشترک بین شاره‌ی درون قطره با هوا، مرز مشترک شاره با سطح جامد و در نهایت مرز مشترک بین هوا با سطح جامد. شکل و رفتار قطره‌ی شاره که روی سطح جامد قرار می‌گیرد، تحت تأثیر مقدار کشش‌های سطحی‌ای است که به هر کدام از این مرز مشترک‌ها نسبت می‌دهیم. اندازه‌ی زاویه‌ی تماس معیار مناسبی برای تفکیک حالت‌های متفاوت با یکدیگر است. در شکل ۹.۷، یک مقطع دو بعدی از نقطه‌ی تلاقی سه فاز مختلف با یکدیگر را نشان داده‌ایم. این نقطه روی خط تماس مشترک قطره با سطح جامد و هوا قرار دارد. زاویه‌ی تماس θ ، زاویه‌ای است که خط مماس بر قطره در نقطه‌ی تماس با سطح جامد می‌سازد. در اینجا فرض کرده‌ایم که شعاع انحنای قطره، یعنی شعاع مقطع دایره‌ای شکل آن روی سطح جامد، بسیار بزرگتر از ارتفاع قطره باشد. در این صورت می‌توان از انحنای خط تماس در مقابل انحنای مقطع قطره صرف‌نظر کرد. برای $\theta \approx 0$ ترکنندگی کامل داریم و برای $\theta > \pi/2$ سطح جامد، تر نمی‌شود. مقدار تعادلی زاویه‌ی تماس

چه ارتباطی با خواص فیزیکی سامانه دارد؟ برای مطالعه‌ی این پدیده، کشش سطحی مربوط به مرز مایع و جامد را با σ_{SL} ، کشش سطحی مایع-هوا را با σ و کشش سطحی جامد-هوا را با σ_{SV} نشان می‌دهیم. مطابق شکل ۹.۷، یک قطره‌ی ساکن که در حالت تعادل روی یک سطح قرار دارد را در نظر بگیرید. اکنون فرض کنید، با اعمال یک نیروی خارجی بی‌نهایت کوچک خط تماس را به اندازه‌ی بسیار کوچک δx ، حرکت دهیم. در این صورت از اندازه‌ی مرز مشترک شاره-جامد و اندازه‌ی مرز مشترک شاره-هوا کاسته و به اندازه‌ی مرز مشترک جامد-هوا افزوده می‌شود. انرژی کل سامانه به اندازه‌ی زیر تغییر می‌کند:



شکل ۹.۷ یک قطره‌ی ساکن روی یک سطح جامد. زاویه تماس در شکل مشخص شده است.

$$\delta E = (-\sigma \cos \theta + \sigma_{SV} - \sigma_{SL}) \delta x L = 0. \quad (17.7)$$

که در آن L ، اندازه‌ی گسترده‌ی خط تماس در راستای عمود بر صفحه‌ی شکل است. اگر حالت اولیه، حالت تعادلی باشد، تغییرات مرتبه‌ی اول انرژی باید صفر باشد. پس برای حالت تعادل، زاویه‌ی تماس بصورت زیر به کشش سطحی مرزهای مشترک بستگی دارد:

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{SV} - \sigma_{SL}}{\sigma}. \quad (18.7)$$

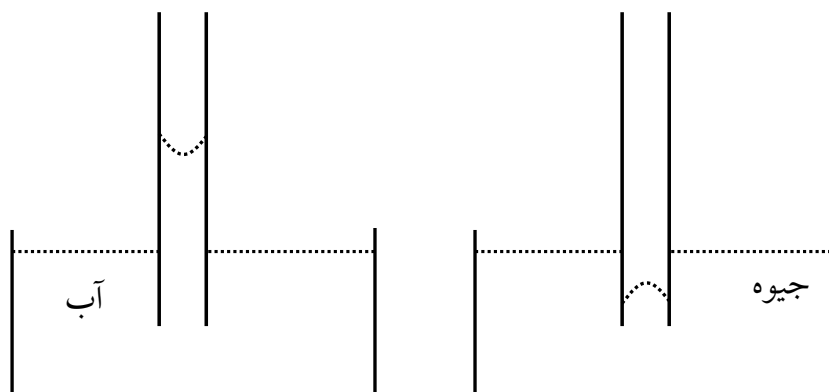
این رابطه صورت قانون یانگ برای زاویه‌ی تماس است. در حالت $\cos \theta > 0$ سطح کاملاً تر می‌شود و در حالت $\cos \theta < 0$ سطح تر نمی‌شود. در مورد مسأله‌ی قطره‌ی باران روی شیشه،

چطور می‌توانیم میزان ترشوندگی را کنترل کنیم؟ کشش سطح شار و سطح شیشه به جنس شیشه بستگی دارد. با تغییر جنس می‌توانیم به حالت دلخواه برسیم. با نشان دادن یک لایه‌ی بسیار نازک (چند لایه‌ی اتمی) از ماده‌ای با جنس دیگر نیز می‌توانیم خواص ترکندگی شیشه را تغییر دهیم.

خاصیت موینگی

لوله‌های بسیار باریکی را در نظر بگیرید که در شارهای مختلف فرو رفته‌اند. برخی از شارها از لوله‌های باریک بالا رفته و برخی دیگر پایین می‌روند. به این اثر، پدیده‌ی موینگی گفته می‌شود. در شکل ۱۰.۷، وضعیت آب و جیوه را نشان داده‌ایم. آب درون لوله‌ی موین صعود می‌کند ولی سطح جیوه درون لوله‌ی موین پایین تر از سطح مایع درون ظرف اصلی قرار می‌گیرد. بالا یا پایین رفتن شار در لوله‌های باریک به چه عواملی بستگی دارد؟ و حد باریک بودن لوله‌های موین را چگونه می‌توان تعیین کرد؟

در این پدیده کشش‌های سطحی مرزهای مشترک، نقش اساسی و تعیین کننده دارند [۲۳]، [۱۹]. برای بررسی پدیده‌ی موینگی و برای سهولت فرض کنید به جای لوله‌ی باریک دو صفحه‌ی



شکل ۱۰.۷ آب در لوله‌ی موین بالا می‌رود ولی سطح جیوه در لوله‌ی موین پایین تر از سطح آزاد ظرف قرار می‌گیرد.

موازی خیلی نزدیک به هم را در شار قرار داده‌ایم. شکل ۱۱.۷، یک مقطع دو بُعدی از این سامانه را نشان می‌دهد. می‌توانیم فرض کنیم مرز مشترک شار و هوا بین این دو صفحه، تقریباً کمانی

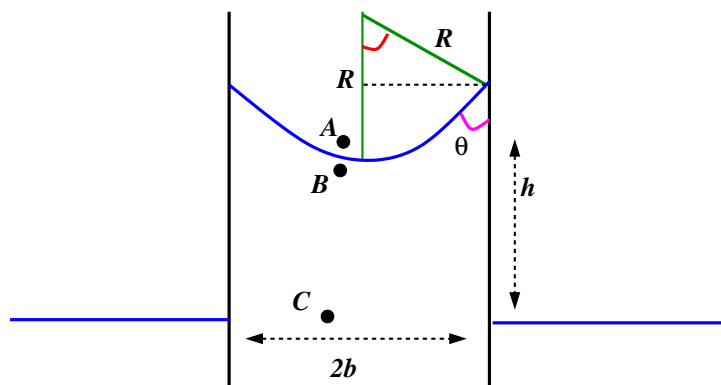
از یک دایره به شعاع R است. اگر فاصله دو صفحه را با $2b$ نشان دهیم، می‌بینیم که:

$$R \approx \frac{b}{\cos \theta},$$

که در آن θ زاویه‌ی تماسِ شاره و دیواره‌ی لوله است. اکنون با توجه به قانون لاپلاس، اختلاف فشار بین دو نقطه‌ی A و B (مطابق شکل) برابر می‌شود با:

$$P_A - P_B = \frac{\sigma}{R},$$

که σ کشش سطحی شاره مورد نظر است. این اختلاف فشار باید برابر باشد با اختلاف فشار مربوط به ستون شاره که تا ارتفاع h بالا آمده است (در صورتی که شاره پایین رفته باشد این طول منفی می‌شود). درواقع فشار در نقاط A و C برابر با فشار هوا است. حالا با در نظر گرفتن قانون زاویه‌ی تماس می‌توانیم ارتفاع بالا رفتن شاره را بصورت زیر بدست آوریم:



شکل ۱۱.۷ مشخصات هندسی پدیده‌ی موئینگی.

$$h = \frac{\ell^x}{b} \times \left(\frac{\sigma_{SV} - \sigma_{SL}}{\sigma} \right), \quad (19.7)$$

که در آن طول موئینگی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\ell = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \quad (20.7)$$

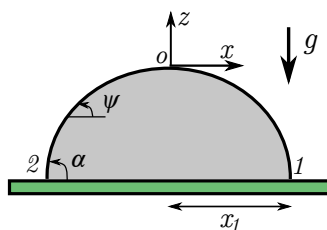
با قرار دادن مقادیر عددی مربوط به شیشه و آب می‌بینیم که $h > 0$. در این صورت آب از لوله‌ی موئین بالا می‌رود. برای جیوه این طول منفی است که پایین رفتن ستون جیوه را توصیف می‌کند. طول موئینگی مقیاس طولی مناسبی برای بیان پدیده‌ی موئینگی است. اگر شعاع لوله‌ها از مرتبه‌ی طول موئینگی و یا کمتر باشد پدیده‌ی موئینگی دیده می‌شود و برای لوله‌ها با مقطع بزرگتر، اثر موئینگی دیده نمی‌شود. مقدار طول موئینگی برای مرز مشترک آب-هوا از مرتبه‌ی میلیمتر است. هرچند در محاسبات بالا، لوله‌ی موئین را با دو صفحه‌ی موازی و نزدیک به هم جایگزین کردیم، ولی انتظار داریم نتیجه‌ی به دست آمده دست کم از نظر مرتبه‌ی بزرگی برای لوله‌های واقعی نیز درست باشد.

۴.۷ قطره روی سطح جامد

شکل قطره‌ی باران روی شیشه یا برگ درخت با هم متفاوت است. درواقع خاصیت ترکندگی متفاوتی که هر زیرلایه دارد شکل نهایی قطره را تعیین می‌کند. در اینجا قصد داریم شکل دقیق قطره‌ای که روی یک سطح تخت جامد افقی در حالت تعادل قرار دارد را به دست آوریم. برآیند نیروهای وارد بر قطره صفر و شکل آن کاملاً متقارن است. برای بدست آوردن شکل تعادلی قطره، انرژی قطره را بصورت تابعی از شکل قطره بیان می‌کنیم. با کمینه کردن تابعی انرژی، شکل تعادلی قطره را بدست می‌آوریم. انرژی قطره‌ی ساکن، از سهم انرژی‌های کشش سطحی و گرانشی بدست می‌آید. حجم قطره V ، کشش سطحی مایع-هوا σ ، کشش سطحی جامد-هوا σ_{SV} و کشش سطحی مایع-جامد σ_{SL} ، تمام اطلاعات لازم برای یافتن شکلی یکتا برای قطره هستند.

مطابق شکل ۱۲.۷، یک قطره را در نظر بگیرید که روی سطح جامد قرار گرفته است. دستگاه مختصات را مطابق شکل طوری در نظر می‌گیریم که بالاترین نقطه‌ی قطره، یعنی نقطه‌ی O ، مبدأ دستگاه مختصات باشد. پس مختصات نقطه‌ی O برابر با $(0, 0)$ است. مختصات نقطه‌ی انتهایی قطره (نقطه‌ی ۱) که در تماس با سطح جامد است را بصورت (x_1, z_1) در نظر می‌گیریم. در دستگاه مختصات نشان داده شده، شکل هندسی قطره را با تابع ریاضی $x = x(z)$ مشخص می‌کنیم. برای یافتن شکل قطره، باید علاوه بر تابع $x(z)$ مقدار x_1 ، یعنی اندازه‌ی کشیدگی قطره

نیز بدست آید. انرژی سطحی این قطره، با اندازه‌ی سطوح مشترک شاره، هوا و جامد ارتباط دارد. این انرژی سطحی و همین‌طور انرژی گرانشی قطره تابعی پیچیده از شکل قطره هستند. عناصر بی‌نهایت کوچک سطحی (روی سطح قطره) و حجمی (درون قطره) را بصورت زیر در نظر بگیرید:



شکل ۱۲.۷ مقطعی از یک قطره که روی یک سطح صلب و افقی در حالت تعادل قرار گرفته است. مبدأ دستگاه مختصات در بالاترین نقطه‌ی قطره انتخاب شده است.

$$dA = 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz, \quad dV = \pi x^2 dz. \quad (21.7)$$

مجموع انرژی‌های سطحی و گرانشی برابر است با:

$$E = \sigma \int_0^{z_1} 2\pi x \sqrt{1 + \dot{x}^2} dz + \sigma_{SL} \pi x_1^2 + (A_0 - \pi x_1^2) \sigma_{SV} \\ + \rho g \int_0^{z_1} \pi x^2 z dz + \lambda (V - \int_0^{z_1} \pi x^2 dz), \quad (22.7)$$

که در آن $\dot{x} = \frac{dx}{dz}$ ، ρ چگالی شاره و A_0 اندازه‌ی کل سطح جامد است. از ضریب لاگرانژ λ برای ثابت نگاه داشتن حجم قطره استفاده کرده‌ایم. یافتن شکل تابعی که به‌ازای آن انتگرال انرژی کمینه شود، مشابه روش اویلر-لاگرانژ و اصل کمترین کنش در مکانیک کلاسیک است.

کمینه کردن انتگرال انرژی

اجازه دهید مسأله کمینه کردن انرژی را در حالت کلی‌تری پی‌گیری کنیم. انتگرالی بصورت زیر را در نظر بگیرید:

$$E[x(z), \dot{x}(z), x_1] = \int_0^{z_1} \mathcal{E}[x(z), \dot{x}(z), z] dz + e(x_1), \quad (23.7)$$

مسئله یافتن تابع $x(z)$ و عدد $x_1 = x(z_1)$ است، به صورتی که نتیجه‌ی نهایی انتگرال، کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. برای این منظور وردش انتگرال را برای تغییرات دلخواه تابع $x(z)$ و عدد x_1 محاسبه کرده و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\delta E = \delta \int_0^{z_1} \mathcal{E} dz + \delta e. \quad (24.7)$$

اکنون تغییرات دیفرانسیلی انتگرال بصورت زیر می‌شود:

$$\delta E = \int_0^{z_1} \delta \mathcal{E} dz + \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{z_1} \mathcal{E} dz \delta x_1 + \frac{\partial e}{\partial x_1} \delta x_1, \quad (25.7)$$

که در آن، جمله‌ی اول پس از تساوی، وردش انرژی ناشی از وردش تابعی $\mathcal{E}$ است و بصورت زیر است:

$$\int_0^{z_1} \left(\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta x} \delta x + \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \dot{x}} \delta \dot{x} \right) dz = \int_0^{z_1} \left(\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta x} - \frac{d}{dz} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \dot{x}} \right) \delta x dz + \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \dot{x}} \Big|_{x_1} \delta x_1, \quad (26.7)$$

که در آن قرار داده‌ایم: $\delta \dot{x} = \frac{d}{dz}(\delta x)$ و سپس با روش جزء‌به‌جزء انتگرال‌گیری کرده‌ایم. از طرف دیگر داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{z_1} \mathcal{E} dz = \frac{dz}{dx} \Big|_{x_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \int_0^{z_1} \mathcal{E} dz = \dot{z}(x_1) \mathcal{E} \Big|_{x_1}, \quad (27.7)$$

اکنون با جایگذاری عبارتهای ۲۵.۷، ۲۶.۷ و ۲۷.۷ در ۲۴.۷، وردش انتگرال انرژی به‌دست می‌آید. این انتگرال زمانی کمینه است که برای هر δx و δx_1 دلخواه، وردش انرژی صفر شود. با صفر قرار دادن وردش انرژی به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta x} - \frac{d}{dz} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \dot{x}} &= 0, \\ \dot{z}(x_1) \mathcal{E} \Big|_{x_1} + \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \dot{x}} \Big|_{x_1} + \frac{\partial e}{\partial x_1} &= 0. \end{aligned} \quad (28.7)$$

رابطه‌ی اول، معادله‌ی اوایلر-لاگرانژ و رابطه‌ی دوم، شرط مرزی را مشخص می‌کند. با حل معادله‌ی دیفرانسیلی اوایلر-لاگرانژ با شرط مرزی مربوطه، شکل تابع کمینه کننده‌ی $x(z)$ بدست می‌آید.

برای مسأله‌ی قطره دقت کنید که داریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[x(z), \dot{x}(z), x_1] &= 2\pi\sigma x\sqrt{1+\dot{x}^2} + \pi\rho g x^2 z - \pi\lambda x^2, \\ e(x_1) &= \pi(\sigma_{SL} - \sigma_{SV})x_1^2 + \lambda V + A_0\sigma_{SV}.\end{aligned}\quad (29.7)$$

با قرار دادن این روابط در معادلات ۲۸.۷، به معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{2\sigma}{(1+\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} + 2\rho g x z - 2\lambda x - \frac{2\sigma x \ddot{x}}{(1+\dot{x}^2)^{\frac{5}{2}}} = 0, \quad (30.7)$$

$$\frac{\sigma \dot{x}_1}{(1+\dot{x}_1^2)^{\frac{3}{2}}} + (\sigma_{SL} - \sigma_{SV}) = 0, \quad (31.7)$$

معادله‌ی اخیر، رابطه‌ی لاپلاس-یانگ برای زاویه‌ی تماس است. بر حسب زاویه‌ی تماس این رابطه به شکل $\cos \alpha = \frac{\sigma_{SV} - \sigma_{SL}}{\sigma}$ درمی‌آید. دقت کنید که پیش از این با استدلالی ساده‌تر این رابطه را بدست آورده بودیم. معادله‌ی ۳۰.۷ به همراه معادله‌ی حجم قطره:

$$V = \int_0^{z_1} \pi x^2 dz,$$

روابط اساسی برای یافتن شکل قطره هستند. پیش از حل این معادلات بهتر است آنها را بدون بعد کنیم. از طول موئینگی $\ell = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$ که پیش از این تعریف شد برای بدون بعد کردن استفاده می‌کنیم. با تعریف کمیات بدون بعد به صورت: $\tilde{z} = z/\ell$ و $\tilde{x} = x/\ell$ معادلات بالا به شکل زیر در می‌آیند:

$$-\frac{\tilde{x}\ddot{\tilde{x}}}{(1+\dot{\tilde{x}}^2)^{\frac{3}{2}}} + (\tilde{z} - B)\tilde{x} + \frac{1}{(1+\dot{\tilde{x}}^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \quad \int_{-D}^{\tilde{z}_1} \tilde{x}^2 d\tilde{z} = E, \quad (32.7)$$

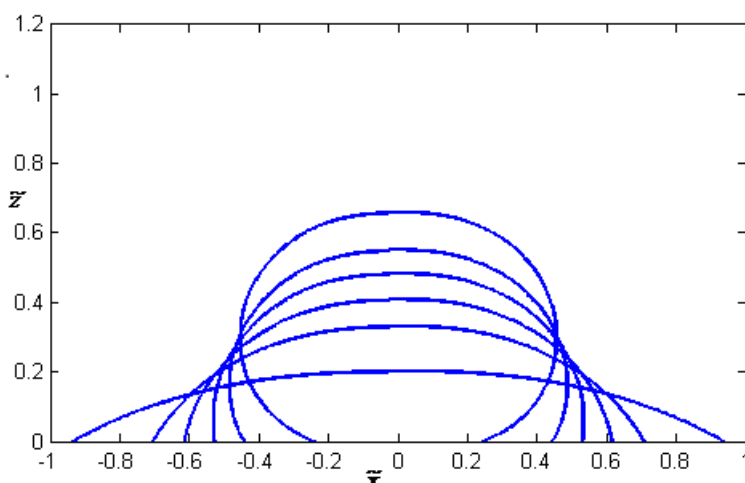
که در آن $B = \frac{\lambda\ell}{\sigma}$ ، $D = \tilde{z}_1$ و $E = V/(\pi\ell^3)$ ثابت‌های بدون بعد هستند. ثابت E از داده‌های مسأله است ولی مقدار اعداد D و B از حل معادلات به دست می‌آید. معادله‌ی اول از معادلات ۳۲.۷، یک معادله درجه دوم است. این معادله‌ی درجه‌ی دوم را می‌توانیم به دو معادله درجه اول تفکیک کنیم. اگر $\psi(x)$ شیب قطره در هر نقطه باشد، داریم:

$$\tilde{x} = \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{z}} = -\cot\psi, \quad \ddot{\tilde{x}} = \frac{1}{\sin^2\psi} \frac{d\psi}{d\tilde{z}},$$

با جایگذاری در معادله ۳۲.۷، به دسته معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{d\tilde{z}}{d\psi} = \frac{\sin \psi}{\frac{\sin \psi}{\tilde{x}} + (\tilde{z} - B)}, \quad \frac{d\tilde{x}}{d\psi} = -\frac{\cos \psi}{\frac{\sin \psi}{\tilde{x}} + (\tilde{z} - B)}, \quad (33.7)$$

این معادلات حل تحلیلی ندارند. برای حل عددی آنها، از نقطه‌ی o (شکل ۱۲.۷) شروع به



شکل ۱۳.۷ شکل قطره‌ی روی یک سطح افقی به ازای زاویه‌های تماس مختلف و $E = 0.8$ [۵۳].

انتگرال‌گیری عددی می‌کنیم. دقت کنید که مقدار زاویه‌ی ψ در نقطه‌ی ابتدایی برابر با صفر است: $\psi(0) = 0$. از طرف دیگر چون مقدار زاویه‌ی تماس قطره در نقطه‌ی ۲ داده شده و برابر با α است، پس انتگرال‌گیری عددی را آنقدر ادامه می‌دهیم تا به این زاویه‌ی مطلوب برسیم. با این روش، شکل نیمه‌ی سمت چپ قطره به دست می‌آید. مشکل اساسی که در این روش با آن مواجه هستیم، ثابت B است. درواقع این ثابت باید با شرط حجم قطره به دست آید. از آنجا که حل همزمان این معادلات پیچیده است، روش حدس اولیه کارآیی بیشتری دارد. با شروع از یک حدس اولیه برای ثابت B ، می‌توانیم محاسبات را تا انتها انجام داده و در نهایت با محاسبه‌ی انتگرال مربوط به حجم، شرط حجم را بررسی کنیم. بدیهی است با شروع از یک حدس اولیه‌ی مناسب، می‌توانیم زودتر به جواب مطلوب برسیم.

برای بدست آوردن یک حدس اولیه مناسب برای ثابت B ، فرض کنید که شکل قطره قسمتی از یک کره به شعاع R باشد. در این صورت تابع $\psi(x) \approx x/R$ که دایره را مشخص می‌کند تقریب خوبی برای شکل واقعی قطره است. بنابراین انتظار داریم: $dx/d\psi = R$. از طرف دیگر و از معادلات دیفرانسیلی شکل قطره در نقطه‌ی ۰ داریم:

$$\left. \frac{d\tilde{x}}{d\psi} \right|_0 = \frac{1}{B-1}.$$

با برابر قرار دادن این دو مقدار داریم:

$$B = 1 + \frac{\ell}{R}.$$

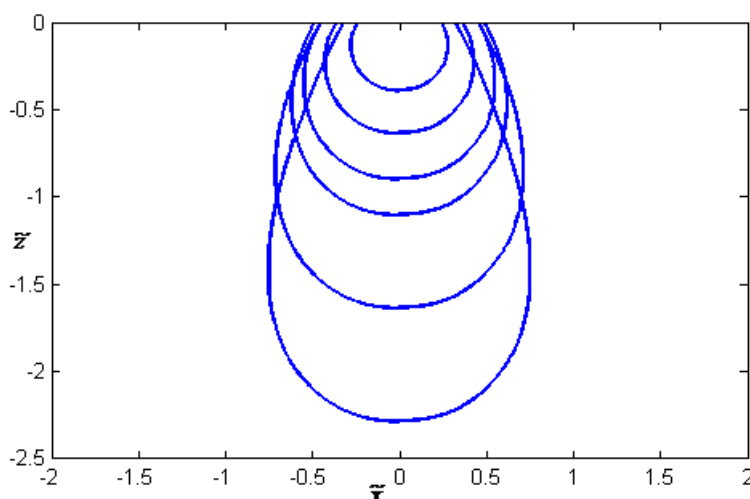
پس برای حل معادلات کافیت از این حدس اولیه شروع کنیم که در آن $R = (3V/4\pi)^{1/3}$ ، شعاع کره‌ای است که حجم آن تقریباً برابر با حجم قطره است.

نتیجه‌ی حل عددی معادلات با استفاده از روش رانگ-کوتا^۱ مرتبه‌ی ۴، در شکل ۱۳.۷ نشان داده شده است. در این شکل، برای زوایای تماس مختلف شکل قطره را نشان داده‌ایم. با افزایش زاویه‌ی تماس، ارتفاع مرکزی قطره نیز افزوده می‌شود. مورد جالب دیگر، قطره‌های آویزان است. برای قطرات سبک، حالت تعادل قطره‌ی آویزان از معادلات بالا با جانشانی $-g \rightarrow g$ ، به دست می‌آید. در شکل ۱۴.۷، حالت تعادل قطره‌های آویزان با حجم‌های متفاوت نشان داده شده است.

۵.۷ امواج مرزی

وقتی که یک سنگ کوچک روی سطح آب دریاچه پرتاب می‌کنید، چه اتفاقی می‌افتد؟ بسته به اندازه‌ی سنگ و نوع ضربه، یک آشفتگی روی سطح آب ایجاد می‌شود و این آشفتگی بصورت موج روی سطح آب منتشر می‌شود. موج ایجاد شده بعد از مدتی انرژی خود را از دست داده و سطح آب از حرکت می‌ایستد. انرژی ممکن است به مولکولهای هوا (شاره‌ی که در مجاورت آب قرار دارد) منتقل شود یا به سبب اثرهای اتلافی درون آب به گرما تبدیل شود. خواص انتشاری موج‌های تولید شده، علاوه بر عامل محرک اولیه، به نوع شار نیز وابسته است. کشش

^۱Rung-Kutta



شکل ۱۴.۷ شکل قطره‌ی آویزان از یک سطح افقی. حجم قطره‌ها متفاوت است ولی زاویه‌ی تماس ثابت و برابر با $\frac{2\pi}{3}$ است [۵۳].

سطحی، گرانش و وشکسانی مهم‌ترین مشخصاتی از محیط هستند که رفتار موج را تعیین می‌کنند. فرض کنید در لحظه‌ی اول، سطح آب کاملاً صاف است. با اعمال نیروی خارجی (نشستن یک سنجاقک روی آب یا برخورد سنگ)، سطح آب کشیده می‌شود. در این صورت انرژی گرانشی و کشش سطحی سامانه تغییر می‌کند. به سبب کشش سطحی، مرز مشترک تمایل به بازگشت به حالت اولیه دارد و بسته به تغییرات انرژی گرانشی، هر دو حالت تمایل به بازگشت یا ادامه‌ی کشیدگی سطح، ممکن است. با رقابتی که بین این پدیده‌ها برقرار می‌شود، آشفتگی روی سطح بصورت یک موج منتشر می‌شود. نقش وشکسانی هم البته همیشه ایجاد تمایل در میرایی حرکت است.

در حالت کلی، شکل موج ایجاد شده به صورت یک بسته‌ی موج جایگزیده است. بسته‌ی موج، تنها در یک ناحیه‌ی متناهی روی سطح آب وجود دارد و با گذر زمان این بسته حرکت می‌کند. به دو دلیل مهم می‌خواهیم آشفتگی‌هایی که بصورت امواج سینوسی یا کسینوسی ساده هستند را مطالعه کنیم. از طرفی بنا به قضیه‌ی فوریه، هر نوع آشفتگی کلی را می‌توانیم بصورت ترکیبی خطی از امواج سینوسی یا کسینوسی ساده با دامنه‌ها و طول موج‌های مختلف در نظر

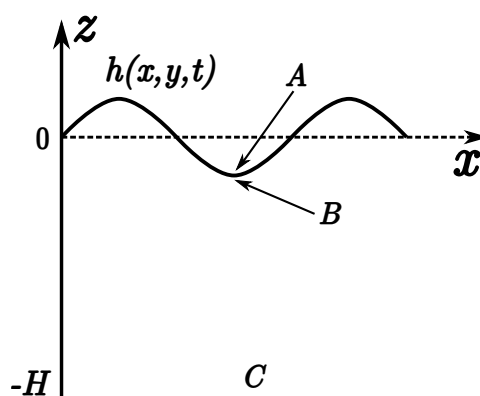
بگیریم. علاوه بر این، مطالعه‌ی انتشار امواج تناوبی ساده ابزاری را به دست می‌دهد که با آن می‌توان به بررسی مشخصاتی از انتشار پرداخت که فقط به خواص شاره‌هایی که مرز مشترک را می‌سازند، بستگی دارند و به خصوصیات عامل خارجی بستگی ندارند.

موج رونده ساده

برای اینکه انتشار امواج روی سطح را مطالعه کنیم، مطابق شکل ۱۵.۷، یک فصل مشترک و دستگاه مختصات دکارتی را در نظر بگیرید. مطابق این شکل، محور z را طوری انتخاب کرده‌ایم که $z = -H$ ، کف ظرف حاوی شاره و $z = h(x, y, t)$ ، مکان هندسی نقاط فصل مشترک را نشان می‌دهد. اگر هیچ موجی روی فصل مشترک نداشته باشیم، سطح آزاد شاره با $z = 0$ مشخص می‌شود. یک موج تناوبی ساده با تابعی بصورت زیر مشخص می‌شود:

$$h(x, y, t) = h_0 \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (34.7)$$

که در آن بردار موج دو بعدی، بصورت $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ تعریف می‌شود و ω بسامد موج است. در این رابطه از بردار مکان دو بعدی بصورت $\mathbf{r} = (x, y)$ استفاده شده است. به عنوان مثال برای حالت $\mathbf{q} = (k, 0)$ ، یک موج رونده‌ی ساده داریم که در راستای $\hat{x}$ با طول موج $2\pi/k$ ، بسامد ω و دامنه‌ی h_0 منتشر می‌شود.



شکل ۱۵.۷ فصل مشترک دو شاره و موج روی آن.

در انتشار امواج مرزی، طول موج و بسامد چگونه کنترل می‌شوند؟ آیا هر دو با عوامل خارجی تعیین می‌شوند یا هر دو از مشخصات شار هستند؟ برای پاسخ به این سؤال تصور کنید که با اعمال ضربه‌های متناوب و کوچک با فاصله‌های زمانی ثابت τ ، روی آب موج ایجاد می‌کنید. واضح است که بسامد موج تولید شده برابر با $\omega = 2\pi/\tau$ است که شما تعیین کرده‌اید. در مورد طول موج چگونه؟ نوع شار و شرایط مرزی آن اندازه‌ی طول موج را تعیین می‌کنند. عکس این آزمایش هم امکان پذیر است. به این صورت که طول موج توسط عوامل خارجی تنظیم شود. در این صورت بسامد مجاز انتشار توسط سامانه برگزیده می‌شود. آیا مثالی برای این مورد سراغ دارید؟ در حالت کلی خواص سامانه توسط رابطه‌ی پاشندگی مشخص می‌شود. رابطه‌ی پاشندگی ارتباط بین بردار موج (یا طول موج) و بسامد است:

$$\omega = \omega(\mathbf{q}).$$

در بحث انتشار موج در محیط‌های مختلف، بررسی شکل رابطه‌ی پاشندگی اهمیت اساسی دارد. در اینجا ما رابطه‌ی پاشندگی را برای فصل مشترک دو شار به دست می‌آوریم.

امواج کم دامنه و بدون اتلاف

در این بحث می‌خواهیم از اثرهای اتلافی صرفنظر کنیم و انتشار امواج در سامانه‌هایی را بررسی کنیم که اتلاف در آنها نقش مهمی ندارد^۱. علاوه بر تقریب بالا می‌خواهیم امواج با دامنه‌ی کوچک را در نظر بگیریم. در صورتی که طول موج‌های راستاهای اصلی را با $\lambda_x = 2\pi/q_x$ و $\lambda_y = 2\pi/q_y$ نشان دهیم، کم دامنه بودن امواج با شرط $\lambda_x, \lambda_y \ll h_0$ بر آورده می‌شود. برای بررسی نحوه‌ی انتشار امواج در فصل مشترک، میدان سرعت بوجود آمده در شار را مطالعه می‌کنیم. می‌خواهیم میدان سرعت ایجاد شده در شار را متناظر با حرکت تناوبی سطح که توسط رابطه‌ی ۳۴.۷ توصیف می‌شود بدست آوریم. با توجه به این که از اثرهای اتلافی صرفنظر کرده‌ایم، میدان سرعت شار به صورت یک شارش پتانسیلی است:

$$\mathbf{u} = \nabla\phi.$$

^۱ میزان درستی این تقریب به میزان بزرگ بودن عدد رینولدز بستگی دارد.

پتانسیل از حل معادله‌ی لاپلاس با اعمال شرایط مرزی مناسب مسأله بدست می‌آید. از آنجا که چگالی هوا (شاره بالایی)، بسیار کمتر از آب (شاره‌ی زیری) است، تمایل داریم حرکت شاره‌ی زیری را مطالعه کنیم. در واقع از سهم انرژی مربوط به حرکت هوا صرف‌نظر می‌کنیم. در $z = -H$ شاره با کف ظرف در تماس است و در $z = h(x, y, t)$ شاره با هوا در تماس است. با توجه به جامد بودن کف ظرف، شرط مرزی بدون لغزش بصورت زیر است:

$$u_x(x, y, z = -H) = u_y(x, y, z = -H) = u_z(x, y, z = -H) = 0, \quad (35.7)$$

سرعت شاره در فصل مشترک برابر با سرعت حرکت فصل مشترک است. به بیان دقیق‌تر، از دید ناظری که در مرز و با سرعتی برابر با سرعت شاره روی مرز و در راستای موازی فصل مشترک حرکت می‌کند، تغییرات زمانی ارتفاع فصل مشترک با مولفه‌ی عمودی سرعت در آن نقطه برابر است:

$$u_z(x, y, z = h(x, y)) = \frac{\partial}{\partial t} h(x, y, t) + (u_x \partial_x + u_y \partial_y) h(x, y, t),$$

در حد حرکت‌های کم دامنه، رابطه‌ی بالا به صورت تقریبی زیر می‌شود:

$$u_z(x, y, z = h(x, y)) \sim \frac{\partial}{\partial t} h(x, y, t). \quad (36.7)$$

برای حل معادله‌ی لاپلاس، با توجه به شکل موجی فصل مشترک، جوابی بصورت زیر را برای پتانسیل حدس می‌زنیم:

$$\phi(x, y, z, t) = \bar{\phi}(z) \cos(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega t + \Delta), \quad (37.7)$$

کافیست تحقیق کنیم این جواب در معادله‌ی لاپلاس صدق می‌کند و از آنجا $\bar{\phi}$ و Δ را بیابیم. با قرار دادن این حدس در معادله‌ی لاپلاس می‌بینیم که باید معادله‌ای بصورت زیر حل شود:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - q^2 \right) \bar{\phi} = 0,$$

که در آن $q^2 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$ است. کلی‌ترین جواب به شکل زیر است:

$$\bar{\phi} = A e^{qz} + B e^{-qz}.$$

با اعمال شرط مرزی ۳۵.۷، ثابتهای A و B بدست می‌آیند. اجازه دهید جوابها را برای حالت استخر بسیار عمیق که در آن $H \rightarrow \infty$ ، مطالعه کنیم. در این صورت $B = 0$ است. اکنون شرط مرزی در فصل مشترک شارها با هوا را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} h = A q e^{q h} \cos(\theta + \Delta) \approx A q (1 + \mathcal{O}(h)) \cos(\theta + \Delta), \quad (38.7)$$

که در آن: $\theta = \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ و جواب نهایی را بر حسب دامنه‌ی موج که بسیار کوچک است بسط داده‌ایم. برای اینکه این رابطه در هر زمانی برقرار باشد، ثابت‌های A و Δ باید مقادیر زیر را اختیار کنند:

$$A = q e^{q h} \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \Delta), \quad \Delta = -\frac{\pi}{2}. \quad (39.7)$$

بنابراین پتانسیل به شکل زیر در می‌آید:

$$\phi(x, y, z, t) \approx \frac{\omega h_0}{q} e^{q z} \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (40.7)$$

و از آنجا مؤلفه‌های مختلف میدان سرعت برابر می‌شوند با:

$$\begin{aligned} u_x &\approx \frac{\omega h_0}{q} q_x e^{q z} \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \\ u_y &\approx \frac{\omega h_0}{q} q_y e^{q z} \cos(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \\ u_z &\approx \omega h_0 e^{q z} \sin(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t). \end{aligned} \quad (41.7)$$

دقت کنید که نتایج بالا در حد امواج کم دامنه و برای شارهای عمیق بدست آمده است.

رابطه‌ی پاشندگی

برای بدست آوردن رابطه‌ی پاشندگی امواج مرزی، اختلاف فشار دوسوی مرز مشترک را با استفاده از معادله‌ی برنولی بررسی می‌کنیم. در اینجا چون شارش ناپایاست، طبق قانون تعمیم یافته‌ی برنولی برای دو نقطه‌ی C و B داریم:

$$P_C = P_B + \rho(g h(x, y, t) + \frac{1}{2} u_B^2 + \frac{\partial}{\partial t} \phi) + \rho g H,$$

از طرف دیگر، بنابر قانون یانگ-لاپلاس داریم:

$$P_B - P_A \approx -\sigma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} h + \frac{\partial^2}{\partial y^2} h \right) = \sigma h_0 q^2 \cos \theta.$$

با ترکیب دو رابطه‌ی اخیر داریم:

$$P_C - P_A - \rho g H = h_0 [\sigma q^2 + \rho g - \rho \frac{\omega^2}{q}] \cos \theta.$$

فشار در کف ظرف و در خارج شاره (یعنی فشار هوا)، ثابت است. در این صورت طرف راست تساوی بالا باید مستقل از زمان باشد. این موضوع برای امواج با دامنه‌های کوچک ولی دلخواه، تنها در حالت زیر امکان پذیر است:

$$\omega = \sqrt{q(g + \frac{\sigma}{\rho} q^2)}, \quad (42.7)$$

و این رابطه‌ی پاشندگی امواج سطحی است. مطالعه‌ی شکل رابطه‌ی پاشندگی برای عمق متناهی به خواننده واگذار می‌شود. نشان داده می‌شود برای عمق متناهی، رابطه‌ی پاشندگی به صورت زیر می‌شود:

$$\omega = \sqrt{\tanh(qH) q(g + \frac{\sigma}{\rho} q^2)}, \quad (43.7)$$

رابطه‌ی پاشندگی را با استفاده از طول موئینگی که پیش از این تعریف شده است، بصورت $\omega = \sqrt{\tanh(qH) g q (1 + (\ell q)^2)}$ بازنویسی می‌کنیم. بسته به این که اندازه‌ی عدد موج در مقایسه با عکس طول موئینگی بزرگ یا کوچک است، می‌توانیم حالت‌های حدی مختلفی را تشخیص دهیم. در شاره‌ی بسیار عمیق و در حالت حدی $1 \ll \ell q$ ، رابطه‌ی پاشندگی شکل ساده‌تر $\omega = \sqrt{qg}$ را دارد. از نظر شهودی در این حد، اثرهای گرانشی غالب و کشش سطحی ناچیز است. این حالت مربوط به امواج با طول موج‌های بسیار بلندتر از طول موئینگی است. در حدی که طول موج از طول موئینگی بسیار کوچکتر باشد ($1 \gg \ell q$)، از اثرهای گرانشی می‌توان صرف‌نظر کرد. در این صورت رابطه‌ی پاشندگی شکل ساده‌تر $\omega = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} q^3}$ را دارد. در قسمت بعدی نشان می‌دهیم که در یک شاره‌ی عمیق با مطالعه‌ی تجربی رابطه‌ی پاشندگی، می‌توان کشش سطحی مرز مشترک شاره را به دست آورد.

شکل تقریبی رابطه‌ی پاشندگی را در سه حالت مختلف بصورت زیر خلاصه می‌کنیم:

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{gq}, & qH \gg 1, \quad ql \ll 1 \quad \text{رژیم گرانشی عمیق} \\ \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}q^3}, & qH \gg 1, \quad ql \gg 1 \quad \text{رژیم موینگی عمیق} \\ \sqrt{gH}q(1 - \frac{1}{6}(qH)^2 + \dots), & qH \ll 1, \quad ql \ll 1 \quad \text{رژیم گرانشی کم عمق} \end{cases}$$

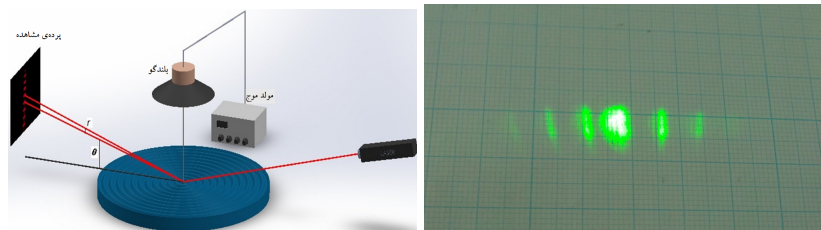
سرعت فاز که بصورت $v_{ph} = \omega/q$ تعریف می‌شود، سرعت انتشار یک موج دوره‌ای ساده است. در مورد امواج مرزی، سرعت فاز آنها به عدد موج بستگی پیدا می‌کند. موج‌ها با طول‌موجهای متفاوت با سرعت‌های مختلفی منتشر می‌شوند. شکل تقریبی سرعت فاز برای برخی حالت‌های حدی در زیر آورده می‌شود:

$$v_{ph} = \begin{cases} \sqrt{\frac{g}{q}}, & qH \gg 1, \quad ql \ll 1 \quad \text{رژیم گرانشی عمیق} \\ \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}q}, & qH \gg 1, \quad ql \gg 1 \quad \text{رژیم موینگی عمیق} \\ \sqrt{gH}(1 - \frac{1}{6}(qH)^2 + \dots), & qH \ll 1, \quad ql \ll 1 \quad \text{رژیم گرانشی کم عمق} \end{cases}$$

توجه کنید که تمام نتایج بالا به حالت امواج با دامنه‌ی بسیار کوچک محدود است.

روش تجربی

با استفاده از روش‌های اپتیکی، رابطه‌ی پاشندگی امواج سطحی را می‌توان بررسی کرد. شکل ۱۶.۷، طرح یک آزمایش تجربی برای تعیین رابطه‌ی پاشندگی امواج موئینگی را نشان می‌دهد. ته یک سوزن بسیار باریک به صفحه‌ی مرتعش یک بلندگو وصل شده است و از این طریق نوسانهای بلندگو به سطح آب منتقل می‌شود. بسامد موج ایجاد شده روی آب با بسامد ولتاژ الکتریکی متصل به بلندگو برابر است. برای اندازه‌گیری طول موج، از یک باریکه‌ی لیزر استفاده می‌کنیم. امواج موئینگی تشکیل شده روی آب مانند یک توری پراش، باریکه‌ی لیزر تابیده به سطح را پراشیده و طرح پراش روی دیوار تشکیل می‌شود. طول موج امواج با اندازه‌گیری گامهای طرح پراش تولید شده، بدست می‌آیند. با تغییر بسامد، طول موج امواج اندازه‌گیری می‌شود. در این صورت، می‌توانیم رابطه‌ی پاشندگی امواج را به صورت تجربی مطالعه کنیم. با استفاده از رابطه‌ی پاشندگی می‌توان مشخصات فیزیکی سامانه را هم به دست آورد. مثلاً اگر چگالی شار را داشته باشیم با کمک رابطه‌ی پاشندگی ۴۳.۷ می‌توانیم مقدار کشش سطحی آن را اندازه‌گیری کنیم. در

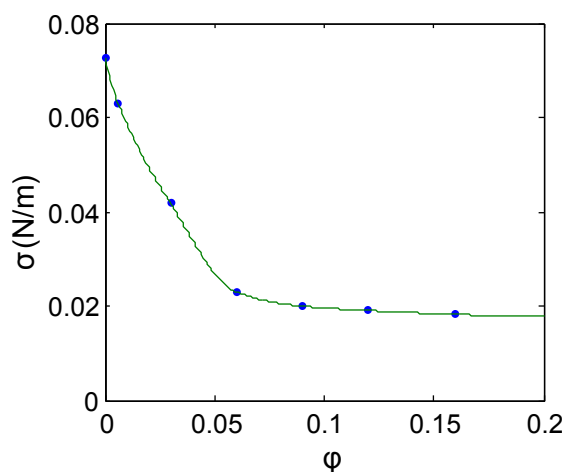


شکل ۱۶.۷ چپ: طرح یک آزمایش برای اندازه‌گیری رابطه‌ی پاشندگی امواج مرزی. ته یک سوزن بسیار باریک به صفحه‌ی مرتعش یک بلندگو وصل شده است و از این طریق نوسانهای بلندگو به سطح آب منتقل می‌شود. امواج مویینیگی تشکیل شده روی آب مانند یک توری پراش، باریکه‌ی لیزر تابیده به سطح را پراشیده و طرح پراش روی دیوار تشکیل می‌شود. در این آزمایش بسامد امواج با منبع تغذیه‌ی متصل به بلندگو و طول موج امواج نیز با گامهای طرح پراش اندازه‌گیری می‌شوند. راست: نمونه‌ای از طرح پراش تشکیل شده از باریکه لیزر منعکس شده از امواج سطحی نشان داده شده است [۵۴].

شکل ۱۷.۷، با استفاده از این روش تجربی، وابستگی کشش سطحی آب به درصد حجمی یک ماده‌ی فعال سطحی که به آب افزوده شده، اندازه‌گیری شده است. ماده‌ی فعال سطحی، توین ۸۰ است و درصد حجمی را با ϕ نشان داده‌ایم. همانطور که انتظار داشتیم، با افزودن ماده‌ی فعال سطحی، کشش سطحی آب به میزان قابل توجهی کم می‌شود.

۶.۷ انتشار آشفته‌گی‌های مرزی با شکل عام

آنچنان که گفته شد، مطالعه‌ی امواج مرزی دوره‌ای ساده‌ی راه را برای بررسی انتشار آشفته‌گی‌های مرزی با شکل دلخواه هموار می‌سازد. تنها چیزی که باید خود را بدان مقید کنیم، کوچک بودن دامنه‌ی آشفته‌گی‌هاست. وابستگی سرعت فاز به طول موج، به پدیده‌ی پاشندگی معروف است و مهم‌ترین نتیجه‌اش این است که آشفته‌گی‌هایی که از نظر مکانی جایگزیده هستند، به مرور زمان دچار تغییر شکل می‌شوند. این تغییر شکل ممکن است بصورت باز شدن بسته‌های موج (پالس‌های جایگزیده) نمود پیدا کند. برای بررسی این موضوع تبدیل فوریه ابزار ریاضی مناسبی است. برای یک آشفته‌گی مرزی با شکل دلخواه که با تابع $h(\mathbf{r}, t)$ داده می‌شود، تبدیل فوریه‌ی



شکل ۱۷.۷ تغییرات کشش سطحی آب بر حسب درصد جرمی یک ماده‌ی فعال سطحی، با روش مطالعه‌ی امواج سطحی به دست آمده است. در این آزمایش از تویین ۸۰ ($T\lambda^\circ$)، به عنوان یک ماده‌ی فعال سطحی استفاده شده است [۵۴]

فضایی-زمانی و وارونش بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$h(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \bar{h}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \quad \bar{h}(\mathbf{q}, \omega) = \int d^3\mathbf{r} dt h(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega t)},$$

تبدیل فوری‌ی تابعی که حقیقی است، یک تابع مختلط با قید $\bar{h}^*(\mathbf{q}, \omega) = \bar{h}(-\mathbf{q}, -\omega)$ است. تبدیل فوری‌ی، هر آشفتگی مرزی با شکل دلخواه را به ترکیب خطی از امواج دوره‌ای با بردار موج‌های مختلف تبدیل می‌کند. محاسبات بخش‌های پیشین نشان داده است که هر آشفتگی دوره‌ای با بردار موج داده شده با چه فرکانسی منتشر می‌شود. نتایج این محاسبات در رابطه‌ی پاشندگی خلاصه شده است. می‌خواهیم ببینیم رابطه‌ی پاشندگی بدست آمده چطور کمک می‌کند تا انتشار یک آشفتگی دلخواه را مطالعه کنیم. صورت سوال را کمی واضح‌تر بیان کنیم. فرض کنید شکل آشفتگی مرزی در لحظه‌ی $t = 0$ با تابع دلخواه $h(\mathbf{r}, 0)$ داده شده باشد. سوال این است که شکل مرز در لحظه‌ی دلخواه t که با تابع $h(\mathbf{r}, t)$ بیان می‌شود، چگونه است. پاسخ این است که با در دست داشتن شکل مرز و مشتق زمانی آن در لحظه‌ی صفر، یعنی $h(\mathbf{r}, 0)$ و

$\partial_t h(\mathbf{r}, \circ)$ تبدیل فوریه‌ی آنها را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{h}(\mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{r} \left(h(\mathbf{r}, \circ) + \frac{i}{\omega(\mathbf{q})} \partial_t h(\mathbf{r}, \circ) \right) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}},$$

سپس با در دست داشتن $\bar{h}(\mathbf{q})$ می‌توانیم شکل مرز در لحظه‌ی دلخواه را با تبدیل وارون بدست آوریم:

$$h(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \bar{h}(\mathbf{q}) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{q})t)} + \text{c.c.}.$$

اجازه دهید از اینجا به بعد آشفته‌گی‌های مرزی را مطالعه کنیم که تنها در یک راستای x تغییر می‌کنند. این ساده سازی به ما اجازه می‌دهد تا انتگرال‌های فضایی که ۲ بعدی بودند را به انتگرال‌های یک بعدی کاهش دهیم. مثلاً فرض کنید در لحظه‌ی اول آشفته‌گی مرزی بصورت یک بسته‌ی موج جایگزیده به شکل زیر باشد:

$$h(x, \circ) = h_0 e^{iq_0 x - \frac{x^2}{L^2}} + \text{c.c.},$$

یک آشفته‌گی دوره‌ای ساده با بردار موج q_0 داریم که با یک تابع گاوسی در ناحیه‌ای به اندازه‌ی حدودی L جایگزیده شده است. مثلاً فرض کنید در لحظه‌ی اول با یک جسم خارجی که اندازه‌اش L است، روح سطح آب را کمی جابجا می‌کنیم. شاید علاقه‌مند باشیم سنگی با اندازه‌ی L روی آب پرت کنیم. در لحظه‌ی اول شکل مرز شاره را بصورت یک بسته‌ی موج جایگزیده آشفته کرده‌ایم. چه پیش می‌آید؟ در لحظات بعدی، آشفته‌گی بصورت یک موج دایره‌ای از نقطه‌ی شروع دور می‌شود. در واقع در هر لحظه یک بسته‌ی موج دو بعدی دایروی داریم که بصورت شعاعی از مرکز دور می‌شود. برای سهولت و در ادامه‌ی محاسبات، مشتق زمانی در لحظه‌ی اول را هم صفر فرض می‌کنیم. برای اینکه بتوانیم محاسبات را پیش ببریم به رابطه‌ی تابع پاشندگی نیاز داریم. فرض کنید تابع پاشندگی را بتوانیم بصورت زیر بسط دهیم:

$$\omega = \omega_0 + (q - q_0)\omega' + \frac{1}{2}(q - q_0)^2\omega'' + \dots,$$

کمی محاسبه نشان می‌دهد که:

$$\bar{h}(q) = \sqrt{\pi} h_0 L e^{-\frac{(q - q_0)^2}{2/L^2}} + (q_0 \rightarrow -q_0),$$

و از آن نتیجه می‌شود:

$$h(x, t) = \frac{1}{2} h_0 L \left(\frac{e^{i(q_0 x - \omega_0 t)}}{\sqrt{L^2/4 + i(t/2)\omega''}} e^{-\frac{(x - \omega' t)^2}{L^2 + 2it\omega''}} + q_0 \rightarrow -q_0 \right) + c.c..$$

نتایج بالا تفسیر شهودی ساده‌ای دارند. با در نظر گرفتن تقارن $\omega(-q) = \omega(q)$ ، می‌بینیم که آشفتگی بصورت دو پالس تقریباً جایگزیده در دو نقطه‌ی قرینه است که در دوسوی مختلف حرکت می‌کنند. میزان جایگزیدگی هر کدام از این پالس‌ها با گذشت زمان تغییر می‌کند. برای بسته‌ی موجی که در فضای مکان در محدوده‌ای به اندازه‌ی L جایگزیده است، در فضای فوریه بردار موجهایی سهم دارند که در محدوده‌ای از طول موج‌ها به اندازه‌ی $1/L \sim \Delta q$ گسترده شده‌اند. این موضوع از شکل تابع $\bar{h}(q)$ نتیجه شده است. گستردگی فضایی بسته‌ی موج با گذشت زمان تغییر می‌کند. برای دیدن این موضوع توجه کنید که:

$$\frac{L^2/4 - i(t/2)\omega''}{L^4/16 + (t^2/4)\omega''^2} + c.c. \rightarrow 2 \frac{1}{L^2/4 + t^2\omega''^2/L^2},$$

که از آنجا می‌توانیم عرض بسته‌ی موج در زمان دلخواه را بصورت $L(t) \sim \sqrt{L^2 + 4(\omega''^2/L^2)t^2}$ بدست آوریم. توجه کنید که پاشندگی همواره باعث پهن‌شدگی می‌شود و علامت ω'' در این موضوع نقشی ندارد. برای زمان‌های بسیار بزرگ $t \rightarrow \infty$ ، می‌توانیم ببینیم که عرض بسته‌ی موج بصورت خطی $L(t) \sim (|\omega''|/L)t$ با زمان رشد می‌کند. سرعت بازشدن بسته‌ی موج را بصورت $\delta v_{\text{dis}} = dL(t)/dt = \omega''/L$ تعریف می‌کنیم. این پدیده‌ی باز شدن بسته‌ی موج را می‌توانیم به اختلاف سرعت انتشار موج‌های مختلفی که در شکل‌دهی یک بسته‌ی موج سهم دارند، نسبت دهیم. موج‌های سازنده‌ی یک بسته‌ی موج، دارای عدد موج‌هایی هستند که در بازه‌ی $1/L \sim \Delta q$ قرار می‌گیرند. در نتیجه اختلاف سرعت مربوط به این موج‌ها را می‌توانیم بصورت زیر هم تخمین بزنیم:

$$\delta v_{\text{dis}} \sim \frac{v_{\text{ph}}(q + \Delta q) - v_{\text{ph}}(q)}{\Delta q} \Delta q \sim \frac{\omega''}{L}.$$

این پهن‌شدن آشفتگی‌های جایگزیده، خصوصیت عمومی محیط‌های پاشنده است و در مورد انواع موج‌ها دیده می‌شود.

در آب‌های کم‌عمق، اثر دیگری هم وجود دارد که ممکن است در شرایطی با اثر بالا رقابت کنید. فرض کنید یک آشفته‌گی مرزی با گستردگی L و دامنه‌ی A داریم. هر چند نتایج مربوط به رابطه‌ی پاشندگی، برای حالت $A \ll H$ بدست آمده ولی فرض کنید، بتوانیم از آنها برای برخی تخمین‌ها استفاده کنیم. آنطور که دیده می‌شود در آب‌های کم‌عمق، سرعت فاز بصورت $v_{ph} \sim \sqrt{gH}$ است. به نظر می‌رسد سرعت فاز موج‌های مرکز بسته‌ی موج می‌تواند کمی بیشتر از بقیه‌ی موج‌ها و برابر با $v_{ph} \sim \sqrt{g(H+A)}$ باشد. این اثر باعث می‌شود که موج‌های مرکزی بسته‌ی موج از دیگر موج‌ها پیشی بگیرند. اختلاف سرعت ناشی از این اثر بصورت تقریبی زیر برآورد می‌شود:

$$\delta v_{nL} \sim \sqrt{g(H+A)} - \sqrt{gH} \sim \sqrt{\frac{g}{H}} A.$$

آیا می‌توان شرایطی را تصور کرد که گسترده شدن ناشی از پاشندگی با این اثر اخیر رقابت کند. در این صورت ممکن است شرایطی ایجاد شود که یک بسته‌ی موج جایگزیده بدون تغییر شکل منتشر شود. این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که $\delta v_{dis} \sim \delta v_{nL}$. با استفاده از شکل رابطه‌ی پاشندگی برای آب‌های کم‌عمق خواهیم داشت:

$$\sqrt{\frac{g}{H}} A \sim \frac{1}{L} \times \sqrt{gH} q H^2 = \frac{1}{L} \times \sqrt{gH} \frac{1}{L} H^2 \rightarrow A \sim \frac{H^3}{L^2}.$$

در رابطه‌ی بالا از این موضوع که مرتبه‌ی بزرگی عدد موج با عکس اندازه‌ی بسته‌ی موج متناسب است، استفاده شده است. موضوع بالا که بصورت کیفی و تقریبی بررسی شد، در عمل واقعا اتفاق می‌افتد. در آب‌های بسیار کم‌عمق اگر اثرهای غیرخطی را با دقت وارد کنیم، جواب‌هایی برای آشفته‌گی‌های جایگزیده می‌توان یافت که بدون تغییر شکل منتشر می‌شوند. مشخصه‌ی این آشفته‌گی مرزی موسوم به سالیتون، رابطه‌ای است که بصورت $A \sim H^3/L^2$ بین دامنه و گستردگی آن برقرار است. سالیتون‌های مربوط به آب‌های کم‌عمق در رژیم گرانشی، ساده‌ترین مثال از آشفته‌گی‌های جایگزیده‌ای هستند که بدون تغییر شکل منتشر می‌شوند. اثرهای غیرخطی نقش اساسی در دینامیک سالیتون‌ها دارند.

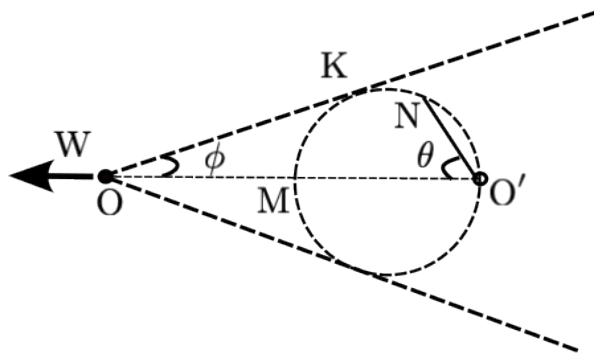
اولین گزارش مربوط به مشاهده‌ی سالیتون‌ها توسط آقای جان اسکات راسل در قرن نوزدهم ارائه شده است. یک کشتی که درون یک کانال حرکت می‌کند، اگر بصورت آبی متوقف شود، یک

آشفستگی جایگزیده روی سطح آب تولید می‌کند که در راستای اولیه‌ی حرکت قایق منتشر می‌شود. آقای راسل که سوار بر اسب بود، متوجه شد این آشفستگی در سطح آب کیلومترها منتشر می‌شود بدون اینکه تغییر شکل دهد. البته مشاهده‌ی سالیتون احتیاج به اسب و قایق ندارد. یک کانال نسبتاً طولانی که آب آرامی به عمق مثلاً ۱۰ cm دارد را در نظر بگیرید. سعی کنید با جسم صلب و دیواره شکلی که می‌تواند قسمت قابل توجهی از مقطع کانال را بگیرید یک حرکت سریع با دامنه‌ی چند سانتی متری در راستای طولی کانال ایجاد کنید. یک آشفستگی نسبتاً جایگزیده ایجاد می‌شود که منتشر می‌شود. مشاهده می‌کنید که این آشفستگی با سرعت حدودی $v \sim \sqrt{gH} \sim 1 \text{ m/s}$ طول کانال را طی می‌کند بدون اینکه دچار تغییر شکل شود. آقای راسل این پدیده را با رها کردن یک وزنه درون کانال‌های آزمایشگاهی آزمود تا مشخصات عمومی آنها را بصورت دقیق بررسی کند. ایشان علاوه بر اندازه گیری سرعت حرکت سالیتون، نشان دادند که حجم سالیتون تشکیل شده برابر با حجم آب جابجا شده است. پس از مشاهدات آقای راسل، تلاش‌های زیادی برای بدست آوردن معادلات حرکت امواج مرزی در کانالهای کم عمق شد. در بخش‌های جلوتر، به این موضوع باز می‌گردیم.

۷.۷ طرح پشت کشتی‌ها

مطابق شکل ۱۸.۷، کشتی‌های متحرک در پشت خود طرح یک ناحیه‌ی مثلث شکل با زاویه‌ی راس $39^\circ \sim 2 \arcsin(1/3)$ ایجاد می‌کنند. هر جسم صلبی که در سطح آب و موازی آن حرکت می‌کند، در جلوی خود امواج مرزی تولید می‌کند. مثلاً یک توپ بزرگ که روی آب کشیده می‌شود، امواجی را تولید می‌کند که بصورت موضعی در راستی عمود بر سطح توپ و با سرعت فازی برابر با سرعت عمودی سطح توپ منتشر می‌شوند. در مورد کشتی همین اتفاق می‌افتد. کشتی روبروی خود موجهایی را منتشر می‌کند که در راستاهای مختلف و به جلو منتشر می‌شوند. در یک لحظه‌ی خاص که طرح پشت کشتی را می‌بینیم، لبه‌های طرح، جبهه‌های امواجی است که در لحظات قبلی توسط کشتی ایجاد شده و به آن نقطه رسیده‌اند. از آنجا که سرعت گروه امواج تولید شده از سرعت خود کشتی کوچکتر است، لبه‌های موج از کشتی عقب افتاده و طرح مذکور شکل گرفته است. کشتی را در نظر بگیرید که با سرعت W پیش می‌رود. دور از واقعیت نیست

که فرض کنیم سرعت روبه جلوی کشتی به آب منتقل می‌شود و البته بیشترین انتقال سرعت در نقطه‌ی دقیقاً روبرو صورت می‌گیرد و نقاط جانبی به نسبت زاویه‌ی آنها با راستای حرکت، سرعت کشتی را می‌گیرند. این انتقال حرکت به آب، باعث ایجاد موج‌هایی می‌شود که بسوی جلو منتشر می‌شوند. سرعت فاز موج‌هایی که کشتی در راستاهای مختلف (روبرو) منتشر می‌کند بصورت $v_{ph} = W \cos \theta$ به زاویه‌ی جانبی انتشارشان یعنی θ وابسته است. نکته‌ی دیگری که باید به آن توجه شود این است که برای یافتن طرح پشت کشتی به سرعت گروه یعنی سرعت انتشار انرژی نیاز داریم. در رژیم گرانشی و آبهای عمیق هستیم، در این حالت رابطه‌ی پاشندگی بصورت $\omega = \sqrt{gq}$ است که نتیجه می‌شود: $v_g = \frac{1}{2} v_{ph}$. فرض کنید در لحظه‌ی مورد نظر کشتی در نقطه‌ی O قرار دارد. در زمان T ثانیه قبل تر کشتی در نقطه‌ی O' قرار داشت و در آن نقطه آشفتگی‌هایی را در راستاهای جلوی خود منتشر کرده بود. با توجه به سرعت کشتی داریم: $OO' = WT$. سوال این است، آشفتگی که در راستای θ منتشر شده بود الان به کجا رسیده است؟ این آشفتگی با سرعت گروه $\frac{1}{2} W \cos \theta$ منتشر شده و به نقطه‌ی N رسیده بطوریکه: $O'N = \frac{1}{2} WT \cos \theta$. دیده می‌شود که تمام نقاط N روی دایره‌ای به شعاع $R = \frac{1}{2} OO'$ واقع شده‌اند. آن چیزی که به صورت طرح پشتی کشتی دیده می‌شود، منحنی پوشاننده‌ی همه‌ی



شکل ۱۸.۷ کشتی که با سرعت W حرکت می‌کند، طرحی پشتش شکل می‌گیرد که با زاویه‌ی راس $\arcsin \phi = 1/3$ مشخص می‌شود. این کشتی T ثانیه قبل در نقطه‌ی O' بوده و موج‌هایی در راستاهای مختلف منتشر کرده که جبهه‌های موجشان اکنون به نقاط روی دایره رسیده‌اند.

دایره‌هایی که با روش فوق در تمام لحظات قبلی ساخته می‌شوند. این منحنی خط صافی

است که از نقطه‌ی O به دایره‌ی بالا مماس می‌شود. با اندکی محاسبه می‌بینیم که زاویه‌ی راس طرح مذکور بصورت $\phi = \arcsin 1/3$ می‌شود. علت اصلی تشکیل طرح پشت کشتی‌ها که به الگوی کلون موسوم است، به این مربوط می‌شود که موج‌های سطحی ایجاد شده روبروی کشتی با سرعت گروهی که از سرعت کشتی کوچکتر است منتشر می‌شوند. درواقع بیشترین سرعت گروه مربوط به امواجی است که دقیقاً در راستای حرکت منتشر می‌شوند و آن هم البته نصف سرعت کشتی است. در نهایت توجه کنید که ما تنها شکل کلی طرح را بررسی کردیم و درون ناحیه‌ی مثلث شکل حتماً موج‌هایی با جبهه‌های پیچیده دیده می‌شوند. آموزنده است که توجه کنیم برای یک کشتی با سرعت $W = 10 \text{ m/s}$ موج‌هایی در راستاهای متفاوت با طول‌موجهای مختلف تولید می‌شوند. با قرار دادن $\lambda = (2\pi/g)W^2 \cos^2 \theta$ ، می‌بینیم که بیشترین طول موج مربوط به موج‌های منتشر شده در راستای حرکت است که حدوداً $\lambda \sim 60 \text{ m}$ می‌شود.

۸.۷ کانال کم عمق، معادله‌ی KdV و سالیتون

کانال عریض ولی با عمق بسیار کم H را در نظر بگیرید. هندسه‌ی مساله در شکل ۱۵.۷ قابل پیگیری است. راستای طولی کانال را با x و عمق را با z نشان می‌دهیم. می‌خواهیم انتشار امواج روی سطح آب این کانال را مطالعه کنیم. الگوی آشفتگی‌های مرزی را با تابع $h(x, t)$ نشان می‌دهیم. دامنه‌ی آشفتگی را با a و مقیاس طولی تغییرات سطح در راستای کانال را با L نشان می‌دهیم. بررسی خود را به حالتی محدود می‌کنیم که دامنه‌ی امواج در مقایسه با عمق کانال کم باشد یعنی $\epsilon = (a/H) \ll 1$. از طرف دیگر، کم عمق بودن کانال با نسبت عمق آن به مقیاس طولی آشفتگی‌های مرزی و با رابطه‌ای بصورت $\delta = (H/L) \ll 1$ تضمین می‌شود. ابتدا معادلات حرکتی سامانه که برحسب تابع پتانسیل $\phi(x, z, t)$ و تابع ارتفاع $h(x, y)$ نوشته می‌شود را بدون صرف نظر کردن از جملات غیر خطی بازنویسی می‌کنیم.

$$(\phi_{xx} + \phi_{zz}) = 0,$$

$$h_t + \phi_x h_x = \phi_z, \quad \text{برای } z = h(x, y),$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + gh + \frac{\sigma}{\rho} h_{xx} = C, \quad \text{برای } z = h(x, y). \quad (44.7)$$

که در آن برای سهولت مشتقات پاره‌ای را با اندیس نشان داده‌ایم، مثلاً $\phi_t = \partial_t \phi$. اینها مجموعه معادلات توصیف کننده‌ی حرکت مرز هستند که بصورت غیر خطی و جف شده با دینامیک شاره هستند. حل معادلات بالا در حالت غیر خطی کار سرراستی نیست. روابط بالا را می‌توانیم با انتخاب مناسبی از مقیاس‌ها بصورت بدون بعد بازنویسی کنیم. طول در راستاهای عمودی و موازی کانال را به ترتیب با $\bar{z} = z/H$ و $\bar{x} = x/L$ بدون بعد می‌کنیم. از دو کمیت $\phi_0 = \sqrt{gH} \sqrt{\epsilon} L$ و $t_0 = (1/\sqrt{gH}) \sqrt{\epsilon} L$ برای بدون بعد کردن پتانسیل و زمان استفاده می‌کنیم، همچنین سرعت مشخصه‌ی مساله نیز با $\sqrt{gH}$ داده می‌شود. در این صورت معادلات بدون بعد شده بصورت زیر می‌شوند:

$$\begin{aligned}(\delta^2 \bar{\phi}_{xx} + \bar{\phi}_{zz}) &= 0, \\ \delta^2 (\bar{h}_t + \epsilon \bar{\phi}_x \bar{h}_x) &= \bar{\phi}_z, \\ \bar{\phi}_t + \frac{1}{4} \epsilon (\bar{\phi}_x^2 + \delta^{-2} \bar{\phi}_z^2) + \epsilon \bar{h} + \epsilon (\ell/L)^2 \bar{h}_{xx} &= c.\end{aligned}\quad (45.7)$$

مقصود ما از نوشتن معادلات بالا این است که نشان دهیم رفتن به حد $\delta \ll 1$ و $\epsilon \ll 1$ و بررسی مساله در آن حد کار سرراستی نیست. توجه کنید که نحوه‌ی ظاهر شدن پارامترهای کوچک δ و ϵ اجازه نمی‌دهد تا به راحتی از نظریه‌ی اختلال متداول استفاده کنیم.

شکل دیگر معادلات

در برخی موارد تمایل داریم معادلات حرکت در کانال کم عمق را بصورتی دیگر بازنویسی کنیم. اجازه دهید مستقیماً از معادلات اوایلر شروع کنیم. با توجه به تقارن در راستای عرضی کانال، میدان سرعت سیال قاعدتاً دارای ۲ مولفه است که بصورت $\mathbf{u} = u\hat{x} + v\hat{z}$ در نظر می‌گیریم. اگر از مولفه‌ی عمودی سرعت بتوانیم در مقابل دیگر جمله‌های مولفه‌ی z در معادله‌ی اوایلر صرف نظر کنیم، می‌بینیم که فشار باید با ارتفاع بصورت خطی تغییر کند $\partial_z P = -\rho g$. با توجه به اینکه روی مرز، فشار با فشار هوا داده می‌شود، خواهیم داشت: $P = P_0 - \rho g(z - h(x, t))$. اکنون می‌توانیم مولفه‌ی x معادله‌ی اوایلر را بنویسیم:

$$\partial_t u + u \partial_x u = -g \partial_x h. \quad (46.7)$$

معادله‌ی پیوستگی را بدون صرفنظر کردن از مولفه‌ی z سرعت بصورت $\partial_x u + \partial_z v = 0$ نظر بگیرید. از طرفین این رابطه روی z و از $z = -H$ تا $z = h(x, t)$ انتگرال میگیریم. جملات مختلف بصورت زیر می‌شوند:

$$\int_{-H}^h dz \partial_x u \sim \partial_x (H + h) u, \quad \int_{-H}^h dz \partial_z v = v(z = h) = \partial_t h(x, t),$$

که از شرط مرزی سرعت در مرز استفاده شده است. در نتیجه معادله‌ی پیوستگی بصورت زیر می‌شود.

$$\partial_t h(x, t) + \partial_x (H + h(x, t)) u = 0. \quad (47.7)$$

دو معادله‌ی ۴۶.۷ و ۴۷.۷ که غیر خطی و جفت شده‌اند، معادلات توصیف کننده‌ی انتشار امواج مرزی در کانال‌های کم عمق هستند. آموزنده است که ابتدا معادلات را با صرفنظر کردن از جلات غیر خطی بازنویسی کنیم:

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = -g \partial_x h(x, t) + \text{جملات غیر خطی}, \\ \partial_t h(x, t) = -H \partial_x u(x, t) + \text{جملات غیر خطی}. \end{cases} \quad (48.7)$$

با محاسبه‌ی مشتق زمانی معادله‌ی دوم می‌بینیم که $(\partial_t^2 - gH \partial_x^2) h(x, t) = 0$. مطابق این رابطه امواج دوره‌ای ساده با رابطه‌ی پاشندگی $\omega = \sqrt{gH} q$ می‌توانند روی مرز منتشر شوند. توجه کنید که این همان رابطه‌ی پاشندگی است که در بخش‌های پیشین بدست آمده بود. برای بررسی اثرهای غیرخطی، قاعدتا باید با در نظر گرفتن حد $1 \ll \epsilon$ و $1 \ll \delta$ بتوانیم مساله را بررسی کنیم.

معادله‌ی کورته‌وگ و دُ وِرایز

کورته‌وگ و دُ وِرایز معادله‌ی غیر خطی ساده شده‌ای را معرفی کرده‌اند که می‌تواند بصورت همزمان اثرهای پاشندگی و غیرخطی را تا مرتبه‌ی اول δ^2 و ϵ در نظر بگیرد. معادله‌ی ساده‌شده‌ی KdV بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\partial_t h(x, t) = \pm \sqrt{gH} \partial_x \left(h(x, t) + \frac{1}{6} H^2 \partial_x^2 h(x, t) + \frac{3}{4} \frac{h^2(x, t)}{H} \right).$$

سمت راست، جمله‌ی وسط سهم اثرهای متناسب با δ^2 است و باعث پاشندگی موج می‌شود. جمله‌ی آخر متناسب با ϵ است و نقش این جمله‌ی غیر خطی بصورتی است که با پاشندگی و پهن‌شدگی بسته‌های موج رقابت می‌کند. آن‌چنانکه که پیش‌از این بصورت کیفی بحث کردیم، انتظار داریم معادله‌ی اخیر جواب‌های جایگزیده‌ای داشته باشد که بدون تغییر شکل منتشر شوند. تحقیق کنید که تابع زیر در معادله‌ی بالا صدق می‌کند:

$$h(x, t) = a \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x \pm ct}{L} \right), \quad c = \sqrt{gH} \left(1 + \frac{a}{2H} \right), \quad a = \frac{4}{3} \frac{H^3}{L^2}.$$

جواب بالا، یک سالیتون به ارتفاع a است که در ناحیه‌ای به اندازه‌ی L گسترده شده است و با سرعت c و بصورت بدون تغییر شکل منتشر می‌شود. به وابستگی ارتفاع با عرض آشفتگی توجه کنید که بصورتی است که پیش از این با استدلال کیفی بدست آمده بود. این ساده‌ترین مثال از سالیتون است که منحصر به کانال‌های کم عمق نیست و در قسمت‌های مختلف فیزیک مانند اپتیک و مکانیک کوانتومی، مثال‌های دیگری از سالیتون را می‌توان یافت. رفتار عمومی سالیتون‌ها به این صورت است که بدون تغییر شکل می‌توانند منتشر شوند. پراکندگی آنها از سالیتون‌ها یا مانع‌های دیگر نمی‌تواند باعث پاشندگی شود.

۹.۷ اثر مارانگونی

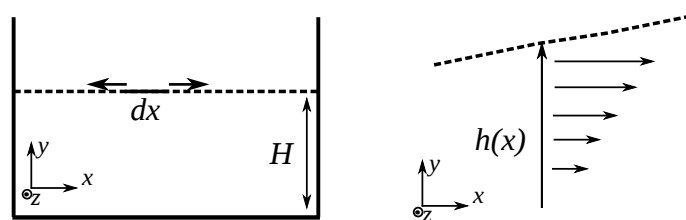
حالت تعادل مرز مشترک دو شاره از کمینه کردن انرژی سطحی به‌دست می‌آید. اثر مارانگونی مربوط می‌شود به شکل فصل مشترک دوشاره‌ای که کشش سطحی روی فصل مشترک آنها متغیر است. مطابق شکل ۱۹.۷، مرز مشترک یک شاره با هوا را در نظر بگیرید. فرض کنید که مقدار کشش سطحی در نقاط مختلف سطح متفاوت باشد. برای آسان شدن مسأله، فرض می‌کنیم که کشش سطحی تنها در راستای x تغییر می‌کند و مقدار آن با تابع $\sigma(x)$ داده می‌شود. یک سطح بی‌نهایت کوچک به شکل مستطیل، به عرض dx و طول L را در نظر بگیرید. این سطح از دو سو توسط نیروی کشش سطحی کشیده می‌شود. مقدار نیروی برآیند وارد بر این سطح برابر است با:

$$[\sigma(x + dx) - \sigma(x)]L.$$

بنابراین نیرو بر واحد سطح زیر به این مستطیل وارد می‌شود:

$$\frac{dF}{dA} = \frac{d\sigma}{dx},$$

این نیرو در راستای مماسی به سطح وارد می‌شود. پس مولفه‌ی مماسی تانسور تنش، درست روی



شکل ۱۹.۷ چپ: مرز مشترک دو شار با کشش سطحی متغیر. راست: کشش سطحی متغیر روی سطح، باعث کج شدن سطح مشترک می‌شود.

سطح باید برابر با نیروی ناشی از تغییرات کشش سطحی شود:

$$\sigma_{xy}(y = H) = \frac{d}{dx}\sigma(x).$$

با توجه به رابطه‌ی پدیده‌شناختی که برای تانسور تنش داریم، می‌بینیم که باید میدان سرعت شار در شرط مرزی زیر صدق کند: $\eta \frac{d}{dy}u_x|_{y=H} = \frac{d}{dx}\sigma(x)$. اکنون می‌خواهیم میدان سرعت شار را بدست آوریم. به علت نیروی ناشی از تغییرات کشش سطحی، یک جریان در شار وجود می‌آید. بنا به تقارن، سرعت شار در راستای x ، به صورت $\mathbf{u} = u_x(y)\hat{x}$ است. آیا سطح مشترک شار با هوا صاف می‌ماند؟ جریان‌های که نزدیک سطح و بصورت مماسی تولید می‌شوند با جریان‌های منعکس شده از دیواره‌ی ظرف ترکیب می‌شوند. به سهولت می‌بینیم که در این شرایط سطح صاف ناپایدار شده و سطح اندکی کج می‌شود. برای مطالعه‌ی شکل تعادلی سطح، فرض می‌کنیم سطح کج شده با تابع $h(x)$ توصیف شود. برای سهولت بررسی این مسأله، کشش سطحی را تابعی کُند تغییر از مکان می‌گیریم. در این صورت ارتفاع شار به طور متوسط تغییر زیادی نمی‌کند و از انحنای ایجاد شده (d^2h/dx^2) هم می‌توان صرف‌نظر کرد. در حالت پایا و با صرف‌نظر کردن از اثرهای اینرسی، معادله‌ی استوکس $\eta \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla P - \rho g \hat{y} = 0$ ، میدان

سرعت را به دست می دهد. از حل مؤلفه ی y معادله ی استوکس، فشار به صورت تابعی از ارتفاع به دست می آید:

$$P(x, y) = P_0 + \rho g(h(x) - y),$$

که در آن $h(x)$ ارتفاع ستون شاره در یک نقطه به مختصات x است. اکنون با قرار دادن نتیجه ی بالا که برای فشار به دست آمد در معادله ی استوکس، به معادله ی زیر برای میدان سرعت می رسم:

$$\eta \frac{d^2}{dy^2} u_x(y) = \rho g \frac{d}{dx} h(x).$$

شرایط مرزی برای حل این معادله ی دیفرانسیل به صورت زیرند:

$$\eta \frac{d}{dy} u_x(y=h) = \sigma'(x), \quad u_x(y=0) = 0.$$

چون تابع $h(x)$ هم مشخص نیست، برای یافتن آن به یک شرط دیگر احتیاج داریم. در حالت پایا، جریان تولید شده توسط نیروی سطحی با جریان برگشتی از دیواره ها ترکیب می شوند و نرخ شارش کل روی هر سطح فرضی واقع شده در یک x ثابت، صفر می شود. به بیان دیگر میدان سرعت مقید به شرط زیر است:

$$\int_0^H u_x(y) dy = 0,$$

که در آن برای سهولت ارتفاع شاره را به طور متوسط برابر با ارتفاع اولیه آن قبل از اعمال کشش سطحی متغیر گرفته ایم. این ارتفاع متوسط را با H نشان می دهیم. با حل معادله ی دیفرانسیل و اعمال شرایط مرزی داریم:

$$u_x(y) = \frac{\rho g}{\eta} h'(x) \left[\frac{y^2}{2} - \frac{Hy}{3} \right],$$

که یک جریان برشی به همراه یک جریان پوآزوی است. شیب ایجاد شده در سطح نیز به گرادیان کشش سطحی بستگی دارد:

$$\frac{d}{dx} h(x) \approx \frac{3}{2} (\rho g H)^{-1} \frac{d}{dx} \sigma(x).$$

در عمل، به دلایل مختلفی گرادیان کشش سطحی ایجاد می‌شود. لبه‌ی یک اتوی داغ را به سطح آب نزدیک کنید. در نقطه‌ای که بیشترین گرما را از اتو می‌گیرد، سطح آب کمی فرو می‌رود. در این پدیده به علت رسانندگی گرمایی آب، یک گرادیان سطحی دما روی آن ایجاد می‌شود. گرادیان دمایی باعث گرادیان در کشش سطحی شده و اثر مارانگونی دیده می‌شود. در ابتدای این فصل، نشان دادیم که مواد فعال سطحی کشش سطحی را تغییر می‌دهند. اندکی پودر فلفل روی سطح آب یک لیوان بریزید. اکنون یک قطره‌ی کوچک از ماده شوینده را به سطح لیوان اضافه کنید. دانه‌های فلفل از ناحیه‌ای که با ماده شوینده آغشته شده است دور می‌شوند. این‌جا نمود دیگری از اثر مارانگونی را داریم. با دور شدن از مرکز قطره‌ی شوینده، کشش سطحی بیشتر می‌شود، پس یک جریان به سمت خارج مرکز تولید می‌شود که دانه‌های فلفل را با خود می‌برد. آیا مثال‌های دیگری از اثر مارانگونی را در اتفاقات روزمره دیده‌اید؟

پرسش‌ها

۱.۷ رابطه‌ی پاشندگی را برای امواج کم‌دامنه روی سطح شاره‌ای که عمق متناهی H دارد، بدست آورید.

۲.۷ یک قطره‌ی روغن روی آب قرار دارد. زاویه‌ی تماس را بر حسب کشش سطحی سطوح دخیل در این مسأله، به‌دست آورید.

۳.۷ دو حباب صابون با شعاع‌های R_1 و R_2 را در نظر بگیرید که به هم می‌پیوندند. اگر حباب تولید شده در حالت تعادل ترمودینامیکی باشد، شعاع آن‌را بر حسب شعاع‌های اولیه، فشار هوای اطراف و کشش سطحی به‌دست آورید.

۴.۷ یک صفحه‌ی صلب را در نظر بگیرید که به‌صورت عمودی در شاره‌ای فرو رفته است. به علت خاصیت موینگی شاره در مجاورت سطح صعود می‌کند. نشان دهید که معادله دیفرانسیل زیر توصیف کننده‌ی شکل سطح آزاد شاره در مجاورت صفحه است:

$$2 \frac{z}{\ell^2} - \frac{z''}{(1 + z'^2)^{3/2}} = 0,$$

که در آن $z' = \frac{d}{dx} z(x)$ ، x فاصله از صفحه و z ارتفاع بالا آمده‌ی شاره است. با شرایط مرزی مناسب، شکل دقیق سطح آزاد شاره را به‌دست آورید.

۵.۷ از معادله‌ی دیفرانسیل مسأله‌ی قبلی استفاده کنید و شکل دقیق سطح آزاد شاره‌ی بین دو صفحه‌ی موازی را به‌دست آورید. فاصله‌ی بین صفحات را d بگیرید.

۶.۷ دو جسم کوچک روی سطح شاره‌ای شناورند. اگر فاصله‌ی بین این دو جسم قابل مقایسه با طول موینگی باشد، نیروی بین این دو جسم برقرار می‌شود. نشان دهید اگر دو جسم دارای جنس یکسانی باشند نیرو جاذبه است. ولی اگر جنس این دو جسم به صورتی باشد که یکی تمایل به ترشدن داشته باشد و دیگری نداشته باشد، نیرو دافعه است.

۷.۷ دو شاره به چگالی‌های ρ و ρ' و ارتفاع‌های h و h' را در نظر بگیرید که روی هم قرار گرفته‌اند. مرز بالای شاره‌ی بالایی و مرز پایینی شاره‌ی پایینی توسط دو صفحه‌ی صلب

محصور شده اند. رابطه‌ی پاشندگی را برای امواجی که در مرز مشترک این دو شار منتشر می‌شوند به دست آورید. گستردگی این شارها در راستای افقی را نامحدود بگیرید.

۸.۷ در مسأله‌ی اثر مارانگونی از انحنای ایجاد شده در سطح صرف نظر کردیم. در صورتی که انحنا زیاد باشد، باید نیروی عمودی ناشی از قانون لاپلاس را روی سطح در نظر بگیریم. این مسأله را بررسی کنید و توضیح دهید در چه شرایطی این پدیده مهم می‌شود.



تحلیل ابعادی

در مواجهه با مسائل فیزیک، توجه به مرتبه‌ی بزرگی و بُعد فیزیکی کمیاتِ مشخصه‌ی آن مسأله، از دو جهت مهم و لازم است. اول آنکه اطلاعات از مرتبه‌ی بزرگی اعداد، کمک می‌کند تا درک شهودی درست‌تری از فیزیکِ مسأله بدست آوریم. علاوه بر این، معادلات ریاضی توصیف کننده‌ی هر سامانه لزوماً حل دقیق ندارند و بررسی ابعادی مسأله کمک می‌کند تا اثرهای نامربوط و یا کم اهمیت را تشخیص داده و مسأله را ساده‌تر کنیم. با تحلیل ابعادی، دسته‌ای از اعداد بدون بُعد برای هر مسأله به دست می‌آید. اعداد بدون بُعد رینولدز، فرود، پکله و ماخ از مهم‌ترین مثال‌ها هستند. هرکدام از این اعداد، درجه‌ی اهمیت یک نیروی خاص در مقایسه با نیروهای دیگر را نشان می‌دهد. با توجه به پیچیدگی مسائل مربوط به مکانیک شاره‌ها، در بسیاری از موارد تحلیل ابعادی تنها راه حل است [۳۱]. به همین دلیل در این فصل، مفاهیم مربوط به تحلیل ابعادی را مطرح می‌کنیم. برای فهم بهتر موضوع از چند مثال ساده کمک می‌گیریم.

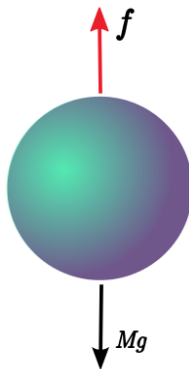
۱.۸ کره‌ی افتان

هر مسأله‌ی فیزیکی با تعدادی ثابت که مشخصات آن مسأله است، تعریف می‌شود. این ثابت‌ها

ابعاد مختلفی دارند. به عنوان مثال، آزمایش سقوط یک کره در هوا را در نظر بگیرید. ثابت‌های این مسأله عبارتند از: جرم کره M ، شعاع کره R ، شتاب گرانش g و ضریب اصطکاک کره در هوا ξ . هر چند که ثابت‌های ارائه شده ابعاد مختلفی دارند ولی بر حسب سه بعد اصلی طول L ، جرم M و زمان T قابل بیان هستند. برای مسائل پیچیده‌تر که ثابت‌های بیشتری دارند از ترکیب ثابت‌های مسأله، می‌توانیم برخی اعداد بدون بُعد را بسازیم. این اعداد بدون بعد عموماً در ساده کردن تحلیل مسأله کارآیی خواهند داشت. اجازه دهید برای روشن‌تر شدن بحث آزمایش سقوط کره را بیشتر بررسی کنیم. مطابق شکل ۱.۸، کره‌ای به شعاع R را در نظر بگیرید که تحت اثر نیروی خارجی وزن در یک شاره سقوط می‌کند. نیروی اصطکاک شاره در شرایط اصطکاک خیلی زیاد، بصورت زیر با سرعت حرکت کره v ، متناسب است^۱:

$$f = -\xi v. \quad (1.8)$$

که در آن ξ ، ضریب اصطکاک کره است. در این صورت معادله‌ی حرکت کره به صورت زیر



شکل ۱.۸ یک کره‌ی صلب تحت اثر نیروی خارجی حرکت می‌کند.

است:

$$M\dot{v} + \xi v = Mg. \quad (2.8)$$

^۱ دقت کنید که در فصول اصطکاک جسم صلب کروی شکل را بدست آورده‌ایم. قبل رابطه‌ای دقیق برای ضریب

قبل از حل دقیق، می‌خواهیم به تحلیل ابعادی پردازیم. در سمت چپ این معادله دو جمله وجود دارد. جمله‌ی اول معرف لختی و جمله‌ی دوم نشان دهنده‌ی اثرهای اتلافی و اصطکاک است. می‌خواهیم ببینیم تحت چه شرایطی می‌توانیم از اثرهای اتلافی صرف‌نظر کنیم و مسأله را ساده تر کنیم؟ برای این منظور باید در معادله‌ی حرکت، نیروی اصطکاک را با لختی مقایسه کنیم. مرتبه‌ی بزرگی نسبت جمله‌ی لختی به نیروی اصطکاک، یکی از اعداد بدون بُعد مشهور، یعنی عدد رینولدز است^۱:

$$Re = \frac{M}{\xi} \times \frac{|\dot{v}|}{|v|},$$

برای تخمین این عدد لازم است که برآوردی از مرتبه‌ی بزرگی نسبت شتاب و سرعت داشته باشیم. از آنجا که شتاب تغییرات سرعت در واحد زمان است، پس نسبت شتاب به سرعت برابر است با عکس زمان مشخصه‌ای که در آن سرعت تغییر می‌کند. بنابراین:

$$Re = \frac{M}{\xi} \times \frac{1}{\tau},$$

اگر سرعت مشخصه و طول مشخصه‌ی مربوط به مسأله را با V و R نشان دهیم، به سهولت می‌بینیم که نسبت R/V یک زمان مشخصه است. به این صورت برای تخمین عدد رینولدز کافیت نسبت زیر را برآورد کنیم:

$$Re = \frac{MV}{\xi R}.$$

عدد بدون بعد رینولدز یک معیار عددی برای اندازه‌گیری درجه‌ی اهمیت اثرهای اتلافی در مسائل شاره‌هاست. در واقع با در دست داشتن سرعت مشخصه‌ی V ، از ابتدا و پیش از حل تحلیلی مسأله، می‌توانیم عدد رینولدز را برآورد کنیم. ولی این عدد چه کمکی به تحلیل مسأله می‌کند؟ فرض کنید در مورد سامانه مورد نظر $Re \ll 1$. در این صورت، اثرهای لختی در مقابل نیروهای اتلافی و اصطکاک بسیار ناچیزند. پس کافیت معادله‌ی حرکت ساده‌تر زیر را بررسی کنیم:

$$\xi v = Mg, \quad (۳.۸)$$

^۱ معرفی شده بود.

^۱ عدد رینولدز قبلاً با روشی دیگر

که دارای جواب ساده‌ای است. در این حالت که لختی خیلی کم است حرکت کره با سرعت ثابت $v = \frac{Mg}{\xi}$ انجام می‌شود.

در مورد کره‌ی صلبی که در شاره حرکت می‌کند مسأله‌ی دیگری که اهمیت دارد مقدار ضریب اصطکاک و ارتباط آن با مشخصات فیزیکی شاره مثل وشکسانی است. از نظر ابعادی، وشکسانی دارای ابعاد پاسکال ثانیه است. ضریب اصطکاک کره‌ی درون شاره علاوه بر وشکسانی شاره به اندازهی شعاع آن نیز بستگی دارد: $\xi = \xi(R, \eta)$ ^۱. برای یافتن شکل این تابع، اجازه دهید حدسی به صورت زیر را در نظر بگیریم:

$$\xi \sim R^\alpha \eta^\beta, \quad (4.8)$$

که در آن کلی‌ترین شکل توانی را برای وابستگی به R و η فرض کرده‌ایم. با درخواست بُعد فیزیکی درست برای ضریب اصطکاک، توان‌های نامشخص رابطه بالا بدست می‌آیند. تنها جواب قابل قبول $\alpha = \beta = 1$ است، یعنی: $\xi \sim \eta R$. دقت کنید که رابطه‌ی بدست آمده تنها با یک ضریب ثابت با رابطه‌ی دقیق آن، که در فصول قبلی به دست آمد، اختلاف دارد. رابطه‌ی دقیق ضریب اصطکاک بصورت $\xi = 6\pi\eta R$ است. این یکی از مزایای روش تحلیل ابعادی است، که بدون حل دقیق، توانستیم قانون استوکس را به دست آوریم. اکنون با جایگذاری ضریب اصطکاک، عدد رینولدز به صورت $Re \sim V/\eta R$ می‌شود. به عنوان مثال برای توپ فوتبالی با جرم 1 kg و اندازهی 20 cm که با سرعت 1 m/s در هوا پرتاب شده است، عدد رینولدز از مرتبه‌ی 10^5 است. برای این توپ که با این سرعت حرکت می‌کند، از اصطکاک هوا به راحتی می‌توان صرف‌نظر کرد. این مثال ساده، کارایی بالای تحلیل ابعادی را به خوبی نشان داد. در بخش بعدی، با مطالعه‌ی یک مسأله‌ی دیگر، باز هم به اهمیت تحلیل ابعادی تاکید می‌کنیم.

۲.۸ پخش

برای مطالعه‌ی بیشتر تحلیل ابعادی و تأکید روی کارایی آن، اجازه دهید یک مسأله‌ی پُر اهمیت فیزیک را بررسی کنیم. موضوع پخش، یکی از مسائل مهم فیزیک آماری و شاره‌ها است. به عنوان دومین مثال با تحلیل ابعادی به این مسأله نگاه می‌کنیم. وقتی یک قطره‌ی رنگی جوهر

^۱ اصطکاک اثری ندارد؟

^۱ آیا چگالی هوا در ضریب

در آب ریخته می‌شود یا یک کیسه‌ی چای را در آب داغ قرار می‌دهید، اگر اجازه دهید زمان کافی سپری شود، پخش شدن رنگِ جوهر یا رنگ چای در آب قابل مشاهده است. مطابق شکل ۲.۸، در لحظات اولیه، دانه‌های رنگی چای به علت گرانش در ته ظرف جمع می‌شوند، ولی اگر اجازه دهید زمان بیشتری سپری شود، پخش در تمام جهات قابل مشاهده خواهد بود. در پدیده‌ی پخشِ خالص که از اثرهای گرانشی و ته‌نشین شدن صرف‌نظر می‌کنیم، در لحظه‌ی

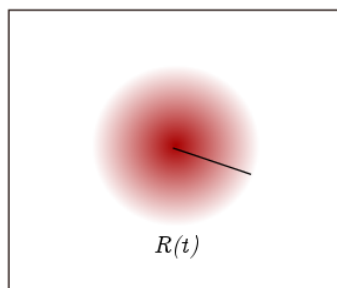


شکل ۲.۸ دانه‌های رنگی چای در آب پخش می‌شوند.

اول یک لکه‌ی رنگی کوچک داریم که این ناحیه‌ی رنگی با گذشت زمان وسعت پیدا می‌کند. این پدیده به شکل نمایشی در شکل ۳.۸ نشان داده شده است. درک سازوکارهای فیزیکی که منشأ پدیده‌ی پخش هستند و برآورد اندازه‌ی سرعت پخش، سؤالات اساسی مرتبط با این پدیده هستند. قطره‌ی جوهر از مولکولهای بزرگی با ابعاد حدودی چند میکرومتر تشکیل شده است، حال آنکه مولکول‌های آب خیلی کوچکترند و حداکثر چند آنگستروم بزرگی دارند. بصورت ریز مقیاس هر مولکول بزرگ جوهر تحت اثر نیروهایی قرار می‌گیرد که از برخورد مولکولهای آب با آن بوجود می‌آیند. در این صورت مطابق شکل ۴.۸، نیروهای وارد شده را می‌توانیم بصورت نیروهایی تصادفی که در تمام جهات به مولکول جوهر وارد می‌شوند در نظر بگیریم. حرکت‌های تصادفی مولکولهای آب همان افت‌وخیزهای حرارتی در سامانه‌های ترمودینامیکی هستند. طبق

نتایج ترمودینامیک کلاسیک، انرژی جنبشی متوسط مولکولهای آب با دما متناسب است. طبق اصل هم‌پاری انرژی که در مکانیک آماری داریم، انرژی متوسط از مرتبه‌ی $k_B T$ است که در اینجا k_B ثابت جهانی بولتزمن است. بخاطر وجود این نیروهای تصادفی است که مولکولهای جوهر در آب پخش می‌شوند. ابعاد متوسط ناحیه‌ای از آب که رنگی دیده می‌شود با زمان رشد می‌کند. این ناحیه رنگی را بصورت کره‌ای با شعاع وابسته به زمان $R(t)$ در نظر می‌گیریم. برای بررسی نرخ رشد ناحیه رنگی باید مسیر حرکت تک‌تک مولکولهای جوهر را دنبال کنیم و روی همه آنها متوسط‌گیری کنیم.

به سبب وجود نیروهای تصادفی، هر مولکول جوهر یک گشت تصادفی انجام می‌دهد. یعنی



شکل ۳.۸ یک لکه‌ی جوهر که به آب اضافه شده است. با گذشت زمان، اندازه‌ی ناحیه‌ی رنگی گسترده‌تر می‌شود. سرعت رشد ناحیه‌ی رنگی با $\sqrt{t}$ متناسب است.

در هر قدم با احتمال‌های مساوی به راست یا چپ می‌رود. در مورد گشت تصادفی همسانگرد، اگر از جابجایی ذرات که نسبت به نقطه‌ی شروع اندازه گرفته می‌شود، روی تعداد زیادی از آنها متوسط‌گیری کنیم، به جابجایی خالص صفر می‌رسیم. ولی میانگین توان دوم جابجایی بصورت خطی با تعداد قدم‌ها رشد می‌کند. درستی این موضوع را به سهولت می‌توان تحقیق کرد. فرض کنید گشت تصادفی در یک بُعد و روی یک خط صاف انجام شود. متحرک در هر قدم با احتمال $1/2$ به چپ و با احتمال $1/2$ به راست می‌رود. جابجایی در قدم i را با δ_i نشان می‌دهیم که با احتمال‌های مساوی $\pm \delta$ است. جابجایی خالص پس از N قدم برابر با $x_N = \sum_{i=1}^N \delta_i$ و

متوسط آن عبارت است از:

$$\langle x_N \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \delta_i \rangle = 0.$$

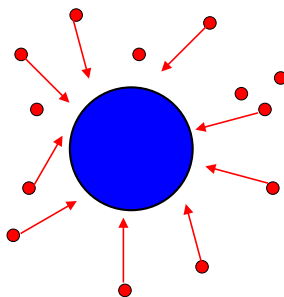
صفر شدن متوسط جابجایی بدیهی است ولی متوسط جابجایی به توان ۲ برابر می‌شود با:

$$\langle x_N^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle (\delta_i)^2 \rangle + \sum_i \sum_{j=i} \langle \delta_i \delta_j \rangle = N \times \delta^2.$$

در رابطه‌ی بالا از این واقعیت که قدم‌های مختلف از یکدیگر مستقل‌اند استفاده شده است، یعنی $\langle \delta_i \delta_j \rangle = \langle \delta_i \rangle \langle \delta_j \rangle$. نتیجه‌ی بالا کاملاً کلی است و برای حرکت سه بعدی هم درست است. با توجه به این که پرشهای مختلف ذره در زمانهای تقریباً برابر انجام می‌شود، تعداد قدم‌ها ارتباط مستقیمی با زمان کل پخش شدن دارد. در این صورت:

$$\langle R^2(t) \rangle = D t$$

که ضریب D ثابت تناسب است و به آن ضریب نفوذ یا ضریب پخش گفته می‌شود. ضریب



شکل ۴.۸ یک مولکول جوهر در حضور مولکولهای آب. ابعاد مولکولهای جوهر تقریباً ۱۰۰۰ مرتبه بزرگتر از مولکولهای آب است.

پخش دارای بعد L^2/T است. از نظر ریزمقیاس، ضریب پخش به انرژی متوسط ضربه‌های وارد شده به مولکول جوهر، ابعاد مولکولهای جوهر a و شکسانی آب بستگی دارد. مشابه مسأله‌ی کره‌ی افتان، اینجا نیز وابستگی به شکل کلی و توانی $D \approx (k_B T)^\alpha \eta^\beta a^\gamma$ را در نظر می‌گیریم. با حل معادله‌ی ابعادی به دست می‌آوریم: $\alpha = -\gamma = -\beta = 1$ ، یعنی:

$$D \sim \frac{k_B T}{\eta a}.$$

حل دقیق این مسأله با روش‌های مکانیک آماری و نظریه‌ی جنبشی، ضریب پخش را بصورت دقیق زیر می‌دهد:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a}. \quad (5.8)$$

نتیجه‌ی تحلیل ابعادی صرفنظر از یک ثابت عددی با مرتبه‌ی بزرگی یک، کاملاً با نتیجه‌ی دقیق تطابق دارد. برای مولکولهای نوعی جوهر، که اندازه‌ی آنها از مرتبه‌ی میکرومتر است، در دمای اتاق ضریب پخش در آب از مرتبه‌ی $10^{-12} m^2/s$ است. یعنی اگر ۱ ثانیه سپری شود اندازه‌ی ناحیه‌ی رنگی فقط $1 \mu m$ رشد می‌کند. در عمل هم همیشه پخش جوهر یا دانه‌های رنگی چای کیسه‌ای در آب خیلی کند است. به همین دلیل است که همیشه سعی می‌کنیم تا با روشهای مکانیکی مثل هم‌زدن، سرعت پخش را افزایش دهیم.

معادله‌ی لانژون

در پایان این بحث و برای استفاده‌ی آینده، معادله‌ی حرکت یک ذره‌ی براونی را به‌دست می‌آوریم. در بحث‌های قبلی اشاره شد که یک ذره‌ی براونی دو نوع نیرو از طرف شارهای که در آن قرار دارد احساس می‌کند. نیروی اصطکاک و نیروی تصادفی ناشی از برخوردهای پی‌درپی مولکولهای شار، نیروهای وارد بر ذره‌ی براونی هستند. پس برای یک ذره‌ی براونی به جرم m ، معادله‌ی حرکت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = -\xi \frac{d \mathbf{r}(t)}{dt} + \mathbf{f}(t), \quad (6.8)$$

که در آن $\mathbf{r}(t)$ بردار مکان لحظه‌ای ذره و ξ ، ضریب اصطکاک ذره است. در این رابطه $\mathbf{f}(t)$ ، نیروی تصادفی ناشی از برخوردهای مولکولهای شار است. هر سه مؤلفه‌ی این نیرو، تابعی تصادفی با متوسط صفر هستند:

$$\langle f_i(t) \rangle = 0.$$

از دیگر مشخصات این نیروی تصادفی چه می‌دانیم؟ اجازه دهید بحث را از منظر دیگری پی‌گیری کنیم. نکته‌ی بسیار مهمی که باید در اینجا به آن توجه شود، منشأ نیروهای وارد بر ذره است. دقت کنید که هر دو نیروی وارد بر ذره، اصطکاک و نیروی تصادفی، ناشی از حضور شار هستند.

پس به نظر می‌رسد که باید ارتباطی بین این دو نیرو برقرار باشد. تابع همبستگی نیروی تصادفی بصورت مستقیم به دمای سامانه و ضریب اصطکاک ذره بستگی دارد:

$$\langle f_i(t) f_j(t') \rangle = 2\xi k_B T \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (۷.۸)$$

که در آن $\xi = 6\pi\eta a$ ، ضریب اصطکاک ذره است. اثبات این رابطه را در کتاب‌های مکانیک آماری می‌توان یافت [۴۰، ۳۰]. معادله‌ی حرکت ذره‌ی براونی به معادله‌ی لانژون معروف است. به صورت خلاصه، در این رابطه فرض شده است که نیروهای تصادفی در نهایت ذره‌ی براونی را به تعادل ترمودینامیکی با محیط می‌رسانند. در حالت تعادل، انرژی متوسط ذره برابر با $3/2 k_B T$ می‌شود. عبارت δ_{ij} در سمت راست رابطه‌ی بالا، ناهمبسته بودن مؤلفه‌های مختلف نیرو را می‌رساند و همچنین $\delta(t - t')$ ، از ناهمبسته بودن نیروی تصادفی در لحظات مختلف نتیجه شده است.

۳.۸ اعداد بدون بعد

دو مسأله‌ی اخیر، جنبه‌هایی از کارایی تحلیل ابعادی را نشان دادند. حال برویم سراغ معرفی اعداد بدون بعد در شاره‌ها. این اعداد درجه‌ی اهمیت نیروهای مختلف نسبت به یکدیگر را می‌سنجند. یک مسأله‌ی نوعی مکانیک شاره‌ها را در نظر می‌گیریم. میدان سرعت از حل معادله‌ی ناویه-استوکس به دست می‌آید:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} = (-\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u}) + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (۸.۸)$$

تک‌تک جملات این معادله، مشخص کننده‌ی یک سازوکار خاص فیزیکی هستند. هر سازوکار فیزیکی به نوعی، حرکت شاره را تغییر می‌دهد. از سمت چپ، اولین جمله در واقع میزان ناپایا بودن شارش را می‌رساند. برای شارش کاملاً پایا، این عبارت صفر می‌شود. دومین جمله معیاری از اثرهای لختی در شارش است. لختی، تمایل به حفظ حالت شارشی را بیان می‌کند. اثرهای لختی، که از طریق این عبارت غیر خطی در معادله‌ی حرکت وارد شده‌اند، پیچیدگی ریاضی معادله‌ی حرکت را در پی دارند. در سمت راست تساوی، $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ هر نیروی خارجی وارد بر شاره، به جز گرانش است. نیروهای الکتریکی و مغناطیسی از این طریق وارد می‌شوند. عبارت متناسب

با وشکسانی، اثرهای اتلافی را مشخص می‌کند. نیروهای اتلافی همواره باعث کند شدن شارش می‌شوند. برخی نیروها، از طریق عبارت گرادیان فشار اثر خود را در حرکت شار نشان می‌دهند. به عنوان مثال نیروهای کشش سطحی که در مرز مشترک شارها تولید می‌شوند، از طریق این جمله تحول شارش را تحت تأثیر قرار می‌دهند. برای یک مرز مشترک خمیده، اختلاف فشار ناشی از قانون یانگ-لاپلاس، شارش اطراف مرز مشترک را تحت تأثیر قرار می‌دهد. بدیهی است برای یک مسأله‌ی نوعی شارها که تمامی نیروهای بالا حضور دارند، حل کامل مسأله، بسیار پیچیده خواهد شد. در عمل معمولاً برخی از نیروها بسیار کوچکتر از نیروهای دیگرند. در این شرایط می‌توانیم نیروهای کم‌اثرتر را حذف کنیم تا مسأله ساده‌تر شود. راه عملی برای تشخیص اهمیت نسبی نیروهای مختلف، تشکیل اعداد بدون بعد است. در بحث زیر برخی از مهم‌ترین اعداد بدون بُعد را معرفی می‌کنیم.

عدد مانایی

آیا شارش به حالت پایا رسیده است؟ برای سنجش میزان ناپایا بودن شارش، عدد بدون بعد مانایی را بصورت نسبت بین دو جمله‌ی سمت چپ معادله‌ی ناویه-استوکس تعریف می‌کنیم:

$$St = \frac{|\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}|}{|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|},$$

فرض کنید سرعت مشخصه‌ی شارش برابر با V و زمان مشخصه‌ی پدیده‌های متغیر با زمان را با τ نشان دهیم. همچنین طول مشخصه‌ی مسأله را با L مشخص می‌کنیم. در این صورت عدد مانایی بصورت زیر برآورد می‌شود:

$$St = \frac{L}{V\tau}.$$

برای $St \ll 1$ ، شارش به حالت پایا بسیار نزدیک است.

عدد رینولدز

اثرهای اتلافی یا لختی، کدامیک اهمیت بیشتری در مسأله دارند؟ برای تشخیص این موضوع

از عدد رینولدز استفاده می‌شود. قبلاً عدد رینولدز را معرفی کردیم. در یک مسأله‌ی مکانیک شاره‌ها، نسبت بزرگی جمله‌ی لختی به بزرگی نیروی اتلافی، عدد رینولدز است:

$$Re = \frac{|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\eta \nabla^2 \mathbf{u}|},$$

با استفاده از کمیات مشخصه در مسأله:

$$Re = \frac{\rho LV}{\eta}.$$

در صورتی که فرض کنیم چگالی کُره‌ی مثال قبلی با چگالی شاره از یک مرتبه هستند، می‌بینیم که هر دو تعریف برای عدد رینولدز به یک نتیجه می‌رسند. اگر $Re \ll 1$ ، لختی بی‌اهمیت است و می‌توانیم از جمله‌ی غیرخطی معادله‌ی ناویه-استوکس چشم‌پوشیم.

عدد فرود

عدد فرود، نسبت نیروی لختی به نیروی گرانشی است:

$$Fr = \frac{|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{\rho g}.$$

از این عدد برای سنجش میزان اهمیت اثرهای گرانشی استفاده می‌شود. در حالت $Fr \gg 1$ ، می‌توانیم از اثرهای گرانشی صرف‌نظر کنیم.

عدد ماخ

نسبت سرعت نوعی شاره به سرعت صوت در همان شاره، عدد ماخ است:

$$Ma = \frac{V}{c}.$$

انتشار صوت در سامانه، پدیده‌ایست که ناشی از رفتار تراکم‌پذیری شاره است. صوت، تراکم‌های موضعی در شاره و انتشار آنها است. بنابراین عدد ماخ معیاری برای تراکم‌پذیری یا تراکم‌ناپذیری شاره در یک سامانه‌ی خاص است. برای $Ma \ll 1$ ، شارش را می‌توانیم تراکم‌ناپذیر بگیریم.

عدد پکله

در مسأله‌ی پخش دیدیم که مولکول‌های جوهر به سبب افت‌وخیزهای گرمایی پخش می‌شوند. حالا تصور کنید که علاوه بر پخش، مولکول‌های جوهر به سبب حرکت شارشی آب، مثلاً جریان تولید شده ناشی از یک قاشق چرخان، جریان همرفت نیز دارند. کدام یک از این دو نوع حرکت غالبند؟ عدد پکله، راهی برای پاسخ به این سؤال است. این عدد بصورت نسبت بین جریان همرفت و جریان پخشی تعریف می‌شود. اگر چگالی مولکول‌های جوهر را با n نشان دهیم، جریان پخشی این مولکول‌ها برابر با $-D\nabla n$ است، که در آن D ضریب پخش است. عدد پکله به صورت زیر می‌شود:

$$Pe = \frac{|n\mathbf{u}|}{|D\nabla n|}.$$

بر حسب کمیات مشخصه‌ی مسأله داریم:

$$Pe = \frac{VL}{D}.$$

برای $Pe \gg 1$ ، پدیده‌ی پخش بی اهمیت است.

عدد موینگی

اندازه‌ی نیروهای اتلافی به نیروهای ناشی از کشش سطحی، عدد موینگی است:

$$Ca = \frac{|\eta \nabla^2 \mathbf{u}|}{f_s} = \frac{\eta V}{\sigma}.$$

نیروهای موینگی از طریق جمله‌ی فشار و با رابطه‌ی لاپلاس $P = \sigma/R$ ، وارد مسأله می‌شوند. برای $Ca \gg 1$ ، می‌توان از کشش سطحی در مقابل اثرهای اتلافی صرف‌نظر کرد.

۴.۸ آزمایش سرنگ

پس از دو مثال مقدماتی بالا و معرفی اعداد بدون بعد، یک مسأله‌ی پیچیده‌تر مربوط به شاره‌ها را بررسی می‌کنیم. مطابق شکل ۵.۸، یک سرنگ را در نظر بگیرید که از دو قسمت مخزن و سوزن تشکیل شده است. با فشردن پیستون در قسمت مخزن سرنگ، شاره از سوزن خارج می‌شود.

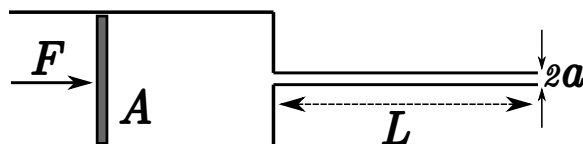
شعاع مقطع سوزن a ، مساحت مقطع قسمت مخزن A ، طول سوزن l و وشکسانی شاره درون سرنگ را با η نشان می‌دهیم. نرخ شارش Q را بصورت حجم شاره‌ی خارج شده از سرنگ در واحد زمان در نظر بگیرید. پس اگر سرعت خروج شاره از سرنگ را با V نشان دهیم، داریم:

$$Q = \pi a^2 V.$$

سؤال اساسی در مسأله سرنگ این است که نرخ شارش چه ارتباطی با نیروی فشارنده‌ی سرنگ یعنی F دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، بهتر است بجای نیرو از نیروی اعمالی برواحد سطح یعنی اختلاف فشار داخل و خارج سرنگ، درست در مجاورت پیستون استفاده کنیم:

$$P - P_0 = \delta P = \frac{F}{A},$$

پس در جستجوی وابستگی Q به δP هستیم. در حالت کلی نرخ شارش وابستگی پیچیده‌ای به



شکل ۵.۸ مشخصات هندسی مسأله‌ی سرنگ.

تمام مشخصات بزرگ‌مقیاس مسأله دارد. این بستگی علی‌الاصول باید با حل معادلات تحول شاره‌ی درون سرنگ به‌دست آید. حل دقیق این مسأله ناممکن و یا دست کم بسیار مشکل می‌نماید. در اینجا می‌خواهیم با استدلال‌های ساده‌ی مبتنی بر تحلیل ابعادی، تا آنجا که ممکن است در مورد این مسأله بحث کنیم. برای این منظور ابتدا به بررسی مرتبه بزرگی کمیات دخیل در این مسأله می‌پردازیم. در مورد یک سرنگ نوعی، شعاع سوزن در حدود $a \approx 0.2 \text{ mm}$ ، نرخ شارش در حدود: $Q \approx 2 \times 10^{-3} \text{ lit/s}$ و سرعت شارش از مرتبه‌ی $V \approx 2 \text{ m/s}$ است. دقت کنید که سرعت صوت در آب به عنوان یک سرعت مشخصه‌ی مهم دیگر برابر است با: $c = 10^3 \text{ m/s}$. عدد بدون بعد ماخ در این مسأله برابر است با: $Ma = \frac{V}{c} = 10^{-3} \ll 1$. بنابراین پدیده‌های انبساط یا انقباض

شماره در آزمایش مورد نظر قابل صرفنظر کردن هستند و شارش با تقریب خوبی تراکم ناپذیر است. حال بازگردیم به مسأله‌ی اصلی خودمان. در جستجوی تابع زیر هستیم:

$$Q = Q(\delta P, a, \rho, \dots).$$

اگر بنا به دلایلی از اثرهای اتلافی بتوانیم صرفنظر کنیم ($Re \gg 1$)، می‌توانیم از وابستگی نرخ شارش به وشکسانی η ، چشم‌پوشیم. برای یافتن شکل احتمالی تابع مورد نظر بصورت زیر عمل می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$Q \sim (\delta P)^\alpha a^\beta \rho^\gamma,$$

و درخواست می‌کنیم تا بعد فیزیکی نرخ شارش با تنظیم توانهای نامشخص α ، β و γ بدست آید. با اندکی محاسبه به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$Q \sim \sqrt{\frac{\delta P a^4}{\rho}}.$$

نتیجه‌ی بالا که از تحلیل ابعادی به‌دست آمد، توافق خوبی با نتایج تجربی آزمایش‌های انجام شده در شرایط $Re \gg 1$ دارد. در مورد یک سرنگ نوعی که از آب پر شده است، عدد رینولدز از مرتبه‌ی $10^2 \sim Re$ است. حال اگر آزمایش سرنگ در شرایطی انجام شود که تراکم‌پذیری شماره مهم باشد، مثلاً آزمایش با نیروهای بسیار زیاد انجام شود، اثرهای مربوط به تراکم‌پذیری از طریق عدد بدون بعد ماخ بصورت زیر وارد می‌شود:

$$Q = \sqrt{\frac{\delta P a^4}{\rho}} f(Ma)$$

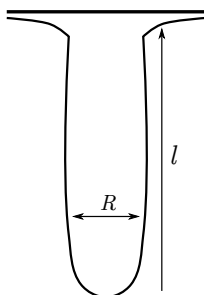
که در اینجا f هر تابع دلخواهی می‌تواند باشد. در مورد شکل این تابع، با روش تحلیل ابعادی نمی‌توانیم به سادگی اطلاعات دیگری بدست آوریم. حال بازمی‌گردیم به اثرات اتلافی که از آنها صرفنظر شد. برای در نظر گرفتن اثرات اتلافی از عدد بدون بعد رینولدز استفاده می‌کنیم. در صورتی که علاقه‌مند به مطالعه‌ی وابستگی نرخ شارش سرنگ به وشکسانی باشیم، می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$Q = \sqrt{\frac{\delta P a^4}{\rho}} f(Ma) g(Re).$$

که در آن تابع $g(Re)$ ، یک تابع بدون بعد است. در اینجا نیز با تحلیل ابعادی نمی‌توانیم اطلاعات دیگری از این تابع بدست آوریم.

۵.۸ سرعت انقباض باریکه‌ی عسل

قاشق حاوی عسل را کمی خم کنید تا جریان عسل به سمت پایین برقرار شود. اکنون قاشق را صاف کنید. باریکه‌ی آویزان عسل پس از مدتی بریده شده و قسمت آویزان به سرعت به سمت بالا می‌رود. سرعت بالا رفتن عسل چقدر است؟ براستی جواب کامل به این مسأله امکان پذیر نیست. ولی با رهیافت تحلیل ابعادی می‌توانیم اندکی بیشتر در مورد مسأله بحث کنیم [۵۵]. شکل ۶.۸، یک طرح تقریبی از باریکه‌ی آویزان عسل را نشان می‌دهد. طول باریکه را با l و شعاع تقریبی آنرا با R نشان داده‌ایم. انرژی کشش سطحی و نیروی ناشی از آن، مولد حرکت روبه‌بالای



شکل ۶.۸ یک باریکه از عسل که به قاشق آویزان است. اگر وزن عسل زیاد نباشد، باریکه به سرعت منقبض شده و به قاشق می‌چسبد.

باریکه است. نیروی گرانش و اثرهای اتلافی، تمایل به توقف حرکت را دارند. اجازه دهید برای شروع از اثرهای گرانشی و لختی صرف‌نظر کنیم. درواقع برای باریکه‌های خیلی کوچک این شرط صدق می‌کند. برای یک باریکه‌ی نوعی، $R \sim 1\text{mm}$ ، $\dot{l} \sim 1\text{mm/s}$ و $\eta \sim 1\text{Pa.s}$. پس عدد رینولدز از مرتبه‌ی ۱ $\ll 10^{-3} \sim Re$ می‌شود. از نظر ابعادی، اختلاف فشار ناشی از قانون لاپلاس برابر با σ/R ، به انتهای باریکه وارد می‌شود. پس نیروی روبه بالا تقریباً برابر می‌شود با:

$$(\sigma/R)\pi R^2,$$

اتلاف جلوی این حرکت را می‌گیرد. نیروی اتلافی که به واحد حجم شاره وارد می‌شود، از معادله‌ی ناویه-استوکس بصورت $\eta \nabla^2 \mathbf{u}$ به‌دست می‌آید. اگر سرعت روبه بالای باریکه را با $\dot{l}$ نشان دهیم، می‌توانیم مرتبه‌ی بزرگی نیروی اتلافی کل را به‌دست آوریم:

$$(\eta \dot{l} / R^2) \pi R^2 l.$$

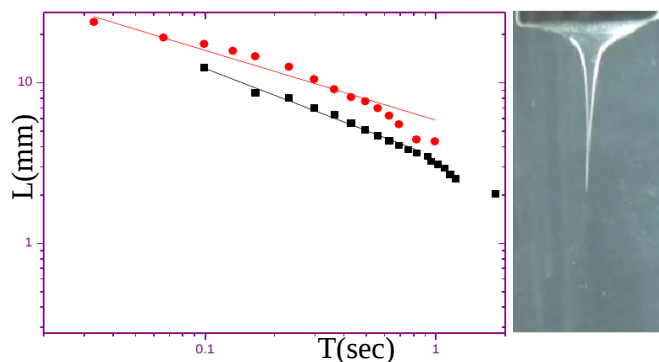
از تعادل این دو نیرو، سرعت حرکت باریکه به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\dot{l} \sim \frac{\sigma}{\eta} \times \sqrt{v_0} \times l^{-\frac{2}{3}},$$

که در آن $v_0 = \pi R^2 \dot{l}$ حجم باریکه‌ی عسل است که بنا به تراکم ناپذیری عسل مقداری ثابت است. حل معادله‌ی دیفرانسیل بالا، پاسخی بصورت $l(t) \sim t^{-\frac{2}{3}}$ را به‌دست می‌دهد.

برای تحقیق درستی رابطه‌ی بالا، آزمایشی به شرح زیر انجام شده است. مطابق شکل ۷.۸ (سمت راست)، مقداری روغن سیلیکون با وشکسانی زیاد روی یک صفحه‌ی شیشه‌ای می‌ریزیم و آنرا بصورت وارونه دررون محلول آب و الکل قرار می‌دهیم. نسبت آب و الکل طوری انتخاب می‌شود که چگالی آن برابر با چگالی روغن سیلیکون باشد. در این شرایط نیروی روبه‌بالای ارشمیدس، روغن سیلیکون را در شرایط بی‌وزنی قرار می‌دهد. اکنون با یک میله‌ی کوچک مقداری از روغن را به سمت پایین می‌کشیم. با خارج کردن میله، از انقباض ستون روغن ایجاد شده فیلم برداری می‌کنیم. نتایج تحلیل فیلم‌های به دست آمده، در منحنی سمت چپ ارائه شده است. برای دو تکرار مختلف از این آزمایش نتایج در مقیاس تمام لگاریتمی نشان داده شده‌اند. برای این دو تکرار، رفتار زمانی ارتفاع ستون منقبض شونده با توابع $t^{-0.45}$ و $t^{-0.55}$ برازش شده است. تکرارهای دیگر این آزمایش، نتایجی تقریباً در همین محدوده را به‌دست می‌دهد. اختلاف اندک بین نتایج تجربی و نتیجه‌ی تحلیل ابعادی، موفقیت نسبی تحلیل ابعادی را می‌رساند. به‌هر حال انحرافی که بین نتایج تجربی و رابطه‌ی تحلیل وجود دارد، ناشی از تقریب‌های مسأله است.

تقریب‌های فراوانی در رابطه‌ی بالا لحاظ شده است. برای تصحیح تقریب‌ها، اعداد بدون بعد کمک می‌کنند. در واقع در حالت کلی هر تابع بدون بعد از اعداد بدون بعد، بصورت زیر



شکل ۶.۸ انقباض یک باریکه‌ی بی‌وزن آویزان [۵۵].

وارد مسأله می‌شود:

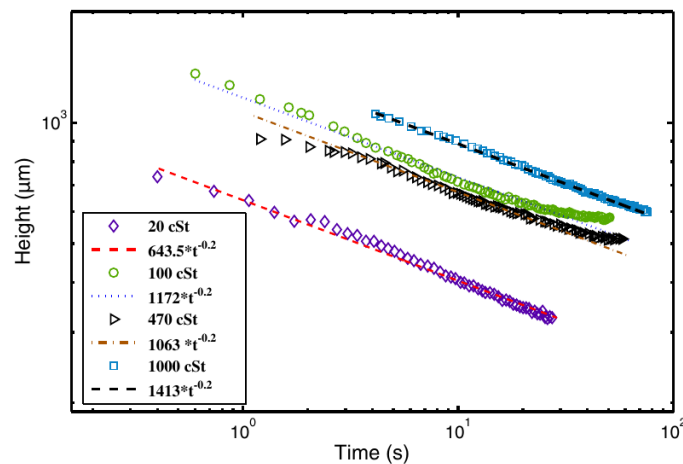
$$\dot{l} = \frac{\sigma \sqrt{v_0}}{\eta \sqrt{l}} \times f(Re, Fr, Ca).$$

در بسیاری از شرایط، همین میزان اطلاعات که از طریق تحلیل ابعادی بدست آمد، کافیت تا تصویر واقعی از فیزیک مسأله به‌دست آید. در هر صورت برای یافتن نتایج دقیق چاره‌ای جز حل دقیق یا حل عددی مسأله نیست.

۶.۸ دینامیک قطره

در فصل‌های پیشین در مورد شکل تعادلی قطره‌ای که روی سطح جامد قرار گرفته است بحث کردیم. پس از قرار دادن قطره روی سطح جامد، چگونه و با چه سرعتی به وضعیت تعادل نهایی می‌رسد؟ ارائه‌ی پاسخ دقیق و کامل به این پرسش امکان‌پذیر نیست. حل‌های تحلیلی و عددی، تنها برای برخی از حالت‌های خاص ارائه شده است [۱۹]. یکی از حالت‌های خاص که بسیار هم مورد توجه است، مربوط می‌شود به موضوع ترکندگی کامل. اگر کشش سطحی شاره و جسم جامد در محدوده‌ی ترکندگی کامل قرار گیرد، قطره به‌طور کامل روی سطح پخش می‌شود [۴۶]. این قطره با چه سرعتی سطح جامد را تر می‌کند؟ با تحلیل ابعادی به بررسی این مسأله‌ی دینامیکی می‌پردازیم. در رژیم ترکندگی کامل و در لحظات نهایی، ارتفاع قطره در مقایسه با گستردگی شعاعی آن بسیار ناچیز است. در مراحل نهایی پخش شدن، گستردگی قطره به‌گونه‌ای است که

ارتفاع آن تقریباً یکنواخت است. ارتفاع قطره را با $h(t)$ و گستردگی شعاعی آن را با $R(t)$ نشان می‌دهیم. چگالی قطره ρ ، وشکسانی آن η و کشش سطحی مرز شاره با هوا برابر با σ است. با توجه به بحث‌های فصل قبلی، برای قطره‌ای که ارتفاع آن از طول مویینگی بسیار کوچکتر است ($h \ll \sqrt{\sigma/\rho g}$)، از اثرهای مربوط به وزن صرف‌نظر می‌کنیم. بنابراین کشش سطحی، تنها عامل حرکت پخشی قطره است و وشکسانی شاره حرکت پخشی قطره را کند می‌کند. اکنون با برآورد مرتبه‌ی بزرگی این دو نیرو و با برابر قرار دادن آنها، سرعت پخش شدن قطره را به‌دست می‌آوریم. خمیدگی قطره در گوشه‌ها نیروی مولد حرکت است. این نیرو ناشی از کشش سطحی است و از



شکل ۸.۸ تغییر ارتفاع قطره بر حسب زمان برای وشکسانی‌های متفاوت. داده‌های تجربی با خطوطی که شیب ثابت $\frac{1}{5}$ دارند مقایسه شده است [۴۴].

طریق گرادیان فشار در معادله‌ی ناویه-استوکس وارد می‌شود. فشار در مرز مشترک شاره با هوا، با رابطه‌ی لاپلاس به انحنا‌ی موضعی سطح وابسته است. انحنا از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^2 h(r)}{dr^2} \sim \frac{h}{R^2},$$

که در آن r فاصله‌ی شعاعی از مرکز قطره است. چون نیروی حرکت ساز در راستای شعاعی است، پس برای برآورد گرادیان فشار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\nabla P = \nabla \left(\sigma \frac{h}{R^2} \right) \sim \sigma \frac{h}{R^3} \hat{r}.$$

اثرهای اتلافی و وشکسانی شاره از طریق رابطه‌ی لاپلاسی سرعت در معادله‌ی ناویه-استوکس داده می‌شوند. برای برآورد مرتبه‌ی بزرگی این اثر، باید ابتدا مرتبه‌ی بزرگی سرعت شاره برآورد شود. در پخش قطره، بیشترین حرکت شاره در راستای شعاعی و با سرعتی از مرتبه‌ی سرعت پخش قطره، یعنی $\dot{R}$ ، انجام می‌شود. اکنون به صورت زیر جمله‌ی اصطکاک معادله‌ی ناویه-استوکس را تقریب می‌زنیم:

$$\eta \nabla^2 \mathbf{u} \sim \eta \frac{\dot{R}}{h^2} \hat{r}.$$

این نیروی اصطکاک وارد بر واحد حجم شاره است. با مساوی قرار دادن نیروی اتلافی و نیروی کشش سطحی، معادله‌ی حرکت قطره به‌دست می‌آید:

$$\dot{h} \sim \frac{\sigma}{\eta} h^\epsilon$$

که در آن با استفاده از شرط ثابت بودن حجم قطره $\pi R^2 h = v$ ، سرعت پخش شدن در راستای شعاع به سرعت پایین آمدن ارتفاع قطره مربوط شده است. با حل معادله‌ی حرکت بالا، جوابی به‌صورت $h(t) \sim t^{-\frac{1}{5}}$ ، به‌دست می‌آید. این رابطه به قانون تتر معروف است. نتایج تجربی ارائه شده در شکل ۸.۸، در توافق خوبی با پیشگویی تحلیل ابعادی دارند. در این آزمایش، از قطرات روغن سیلیکون با وشکسانی‌های متفاوت استفاده شده است. روغن سیلیکون تمایل دارد سطح شیشه را کاملاً ترکند. در شکل ارتفاع قطره بر حسب زمان و در مقیاس لگاریتمی رسم شده است. برای مقایسه با پیشگویی تحلیل ابعادی خطوطی با شیب $-\frac{1}{5}$ رسم شده‌اند. تطابق نسبی داده‌های تجربی با خطوط رسم شده قابل مشاهده است.

۷.۸ رشد قطره‌ها: اسوالد رایپنینگ

مقداری روغن زیتون را روی آب بریزید و سعی کنید آن را با آب مخلوط کنید. مشاهده می‌کنید که قطرات کوچکی از روغن روی آب تشکیل می‌شود. اگر سعی کنید امولسیون بدست آمده را به حال خود رها کنید، شاهد مرگ قطرات ریزتر و رشد قطرات درشت‌تر خواهید بود. اتفاقی مشابه این آزمایش در ابرها، هنگامی که باران تشکیل می‌شود رخ می‌دهد. ابتدا قطراتی بسیار ریز با مقیاس‌های مولکولی تشکیل می‌شود این قطرات رشد می‌کنند تا زمانی که با اثر گرانش به پایین سقوط کنند. به صورت عمومی، این پدیده که به کولسنس (coalescence) یا اسوالد رایپنینگ (Ostwald-ripening) معروف است، در تمامی گذار فازهای مرتبه‌ی یک قابل مشاهده است. علت رشد قطرات به انرژی کشش سطحی مربوط می‌شود. فرض کنید دو قطره به شعاع R_1 دارید. از نظر انرژی سطحی این سیستم تمایل دارد به حالتی برسد که یک قطره با شعاع بزرگتر R_2 تولید شود. انرژی سطحی حالت اول برابر است با $E_1 = 4\pi\sigma R_1^2$ و انرژی حالت دوم با $E_2 = 2 \times 4\pi\sigma R_2^2$ داده می‌شود. از آنجا که حجم باید پایسته باشد، پس: $R_2 = 2^{\frac{1}{3}} R_1$. از اینجا دیده می‌شود که: $\frac{E_2}{E_1} = 2^{-\frac{1}{3}} < 1$. دینامیک کامل این مساله توسط لیفشیتز و اسلیوزوف مطالعه شده است. ایشان نشان داده‌اند که چگونه مبادله‌ی ذره بین قطرات باعث رشد بزرگ‌ترها می‌شود.

با استدلال‌هایی مبتنی بر آنالیز ابعادی می‌توانیم مرتبه‌ی بزرگی سرعت رشد قطرات را به دست آوریم. یک قطره‌ی نوعی به شعاع R را در نظر بگیرید. ابتدا باید توجه شود که بنا به قانون لاپلاس اختلاف فشاری برابر با $\Delta P = \frac{2\sigma}{R}$ بین داخل و خارج قطره برابر است. در نتیجه‌ی این اختلاف فشار، انتظار داریم چگالی هم در ناحیه‌ی مرزی قطره اندکی افت کند. غیر یکنواخت بودن چگالی همراه با پدیده‌ی دیفیوژن خواهد بود. به عبارت دیگر، دیفیوژن سازوکاری اساسی برای پدیده‌ی مبادله‌ی ذره بین قطرات در نظر گرفته می‌شود. برای تخمین افت چگالی در ناحیه‌ی مرزی قطره، از قانون گاز کامل استفاده می‌کنیم. داریم: $\Delta P = (k_B T)^{-1} \Delta c = \Delta(\frac{N}{V})$ که در آن T دمای سیستم است. اگر ضریب دیفیوژن ذرات را با D نشان دهیم، جریان سطحی ناشی از دیفیوژن با $\frac{D\Delta c}{R} \sim D \hat{r} \cdot \nabla c = j$ داده می‌شود. بنا به پایستگی جرم، سرعت رشد

قطره برابر می‌شود با:

$$\dot{R} = jv_m$$

که در آن v_m حجم مولکولی است. سرعت رشد قطرات می‌شود:

$$\dot{R} = \frac{2\sigma v_m}{\xi R^2},$$

که در آن ضریب اصطکاک مولکولی به صورت $\xi = \frac{k_B T}{D}$ تعریف شده است. رابطه‌ی بالا قانون رشدی به صورت $R(t) \sim \left(\frac{\sigma v_m t}{\xi}\right)^{\frac{1}{3}}$ به دست می‌دهد که به قانون رشد گینزبرگ-اسلیوزوف معروف است.

علاوه بر دیفیوژن، پدیده‌ی کانوکشن یا همرفت هم نقش مهمی در دینامیک قطرات دارد. این مورد در قطراتی که اندکی از حالت کروی خارج هستند اثر بیشتری دارد. سرعت رشد ناشی از همرفت را می‌توانیم برآورد کنیم. تعادل نیروهای ناشی از کشش سطحی و اصطکاک از معادله‌ی ناویه-استوکس به صورت $\eta \nabla^2 \mathbf{u} \sim \nabla P$ دیده می‌شود. با تخمین مرتبه‌ی بزرگی طرفین داریم:

$$\eta \frac{\dot{R}}{R^2} \sim \frac{\sigma}{R^2},$$

بنابراین:

$$\dot{R} \sim \frac{\sigma}{\eta}.$$

آزمون مرتبه‌ی بزرگی اعداد آموزنده است. قطرات روغن در آب با شعاع $R \sim 1 \text{ mm}$ را در نظر بگیرید. برای این سیستم داریم: $\sigma \sim 10^{-3} \text{ N/m}$, $v_m \sim 10^{-12} \text{ s N/m}$, $\xi \sim 6\pi\eta a_0$, $\dot{R} \sim 10^{-10} \text{ m/s}$ که سرعت بسیار کمی است. دقت کنید که این سرعت رشد برابر می‌شود با: $\dot{R} \sim 10^{-10} \text{ m/s}$ که برای قطرات بزرگ با اندازه‌ی میلی‌متر به دست آورده‌ایم.

چنانچه بخواهیم سهم هر دو پدیده‌ی دیفیوژن و همرفت را در نظر بگیریم، با مقایسه‌ی دیفیوژن و همرفت می‌توانیم به شعاع مشخصه‌ای برای قطرات برسیم که برای قطرات کوچکتر دیفیوژن و برای قطرات بزرگتر، پدیده‌ی همرفت غالب است. این شعاع مشخصه برابر می‌شود با: $R_c \sim \sqrt{\frac{\eta v_m}{\xi}}$. برای مثال بالا، مرتبه‌ی بزرگی این شعاع می‌شود: 10^{-8} m .

پرسش‌ها

- ۱.۸ عدد رینولدز و عدد ماخ را برای حرکت هواپیما، ماهی و باکتری برآورد کنید.
- ۲.۸ یک آونگ از وزنه‌ای به جرم m ساخته شده است. با استفاده از تحلیل ابعادی، دوره‌ی نوسانهای کوچک این آونگ را بدست آورید.
- ۳.۸ معادله‌ی دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \eta \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p$$

- که در آن $\mathbf{u}$ میدان سرعت و p میدان فشار درون شاره و η و شکسانی شاره است. فرض کنید سرعت مشخصه‌ی مسأله U و طول مشخصه L و زمان مشخصه هم برابر با τ باشد. معادله‌ی دیفرانسیل بالا را بصورت بدون بعد بنویسید.
- ۴.۸ یک صفحه‌ی صلب را در نظر بگیرید که با ضخامت h از شاره‌ای به شکسانی η تر شده است. اکنون ای صفحه را به حالت عمودی قرار می‌دهیم. لایه‌ی شاره شروع به جاری شدن می‌کند تا سطح صفحه کاملاً خشک شود. با استدلال‌های ابعادی در مورد فرآیند خشک شدن صفحه بحث کنید. این مسأله در انتهای فصل چهار بررسی شده است.
- ۵.۸ صفحه‌ای را در نظر بگیرید که بصورت عمودی و با سرعت ثابت v از سطح آزاد یک مایع و شکسان خارج می‌شود. این صفحه مقداری از شاره را همراه خود به بالا می‌کشد. با استدلال‌های ابعادی در مورد ضخامت لایه‌ی مایع چسبیده به صفحه بحث کنید. این مسأله توسط لنداؤ و لویچ مطرح شده است [۲۸، ۲۹].

۹

ناپایداری‌ها

سامانه‌های شاره‌ای در شرایط مختلفی ناپایدار شده و پدیده‌های جالب توجه‌ای را بوجود می‌آورند. لیوانی را تصور کنید که با آب پر کرده و در آن را با ورقه‌ای پوشانده‌اید. حالا در شرایطی که همچنان در آن پوشیده است آن را ناگهان وارونه کرده و سپس ورقه را بر دارید. با یک محاسبه‌ی ساده درمی‌یابید که نیروی ناشی از فشار هوا خیلی بیشتر از نیروی وزن است. ولی چرا آب سریعاً فرو می‌ریزد؟ بیرون ریختن آب از لیوان وارونه، قطره قطره شدن آب خروجی از شیر سماور، چکه کردن لایه‌ی رنگ از سقف و امواج سطحی آب که به سبب جریان باد ایجاد می‌شوند، از مثالهای مشهور ناپایداری در سامانه‌های شارشی هستند [۲۰]. در این فصل با معرفی مفهومی این پدیده‌ها، برخی نمونه‌های مهم از ناپایداری‌ها یعنی ناپایداری ناپایداری ریلی-تیلور، ریلی-پلاتو، کلونین-هلمهولتز و سفمن-تیلور را با اندکی جزئیات ریاضی بررسی می‌کنیم.

۱.۹ مقدمه

انرژی پتانسیل در سامانه‌های مکانیکی کمک می‌کند تا تصویر ساده‌ای از ناپایداری در این سامانه‌ها ارائه شود. به عنوان یک نمونه‌ی ساده، شکل ۱.۹ را در نظر بگیرید. توپی که روی قله یا درون

دره‌ی پتانسیل قرار گرفته، در هر دو مورد می‌تواند در حالت تعادل باشد. ولی وضعیت توپ روی قله‌ی پتانسیل ناپایدار و در دره‌ی پتانسیل پایدار است. در صورتی که با اعمال نیروهای خارجی کوچک و قطع آن، توپ به مکان اولیه‌ی خود برگردد، حالت فیزیکی توپ نسبت به نیروهای مختل کننده‌ی خارجی پایدار است. ولی اگر با اعمال نیروهای اختلالی به توپ و قطع آن، توپ به جای اولیه بازنگردد، وضعیت توپ ناپایدار است. البته در عمل همیشه نیروهایی وجود دارند که نقش اختلال را ایفا می‌کنند. جریانهای هوایی بسیار کوچک، لرزش‌های کوچک و حتی نیروهای افت‌وخیزی ناشی از حرکت‌های همیشگی مولکولی، نیروهای اختلالی هستند. در سامانه‌های پیچیده‌تر مثل شاره‌ها، درک ناپایداری بر پایه‌ی پتانسیل، اندکی سخت‌تر ولی امکان پذیر است. در واقع انواع مختلف انرژی آزاد که در ترمودینامیک تعریف می‌شود، ابزاری برای تشخیص نقاط تعادلی سامانه‌ها و پایداری آنها هستند. در شیمی بسته به شرایط انجام واکنش‌ها، انرژی آزاد گیبس، هلمهولتز یا آنتالپی، نشان دهنده‌ی پایداری یا ناپایداری سامانه واکنش‌های شیمیایی هستند. رویکرد مورد نظر ما در این کتاب محاسبه‌ی انرژی آزاد نیست. رهیافت ساده‌تری که در این کتاب استفاده می‌کنیم، برپایه‌ی پاسخ سامانه به اختلال‌های بی‌نهایت کوچک خارجی خواهد بود. با اعمال یک اختلال خارجی به سامانه، تمایل سامانه در تضعیف یا تقویت تغییرات ایجاد شده را مطالعه می‌کنیم. سامانه‌ی ناپایدار تغییرات ایجاد شده را تشدید می‌کند. رشد تغییرات، سامانه‌ی ناپایدار را از حالت اولیه دور می‌کند. در حقیقت اصل موضوع به این بازمی‌گردد که معادله‌ی حرکتی سامانه به نوعی غیر خطی هستند و پاسخ یکتا برای این سامانه‌ها لزوماً وجود ندارد. آنطور که پیش از این توضیح داده شد، جمله‌ی اینرسی بصورت غیر خطی در معادلات وارد می‌شود. البته گذشته از این موضوع، حرکت کنار مرزهای انعطاف پذیر، حتی در شرایطی که اینرسی بی‌اهمیت است، غیر خطی شدن شرایط مرزی را به همراه دارد. هر دو نوع این انحراف از رفتار خطی، باعث ناپایداری‌هایی می‌شوند.

در این فصل، ابتدا به معرفی چند نمونه‌ی مهم از ناپایداری‌ها در سامانه‌های شارشی می‌پردازیم. سپس در قسمت‌های بعدی ناپایداری‌ها را با جزئیات بیشتری بررسی می‌کنیم.



شکل ۱.۹ موقعیت‌های تعادلی مختلف یک توپ. شکل سمت راست (چپ)، یک موقعیت پایدار (ناپایدار) را برای توپ کروی شکل نشان می‌دهد. پایداری یا ناپایداری حالت توپ را با بررسی پاسخ توپ به اختلال‌های خارجی بی‌نهایت کوچک می‌توان فهمید.

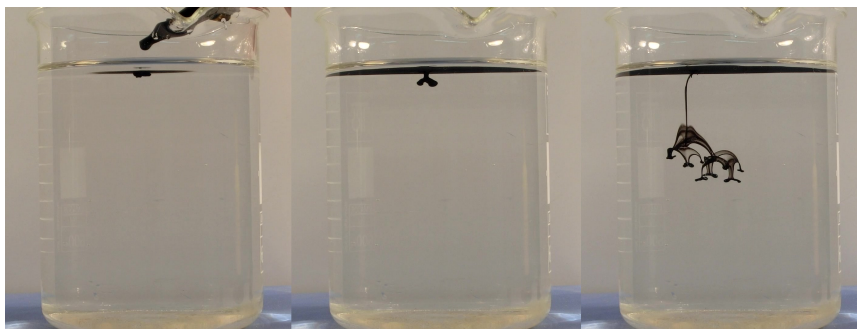
ناپایداری ریلی-پلاتو

باریکه‌ای استوانه‌ای شکل از یک شاره را در نظر بگیرید که درون شاره‌ی دیگر جریان دارد. آب خروجی از یک لوله با مقطع دایره‌ای که در هوا جریان دارد مثالی از این وضعیت است. بسته به شرایط مسأله، این سامانه همیشه نمی‌تواند پایدار بماند. ناپایداری در اینجا باعث قطره قطره شدن باریکه‌ی شاره می‌شود. این ناپایداری به شرایط مسأله بستگی دارد. پارامتر تعیین کننده، نسبت طول به قطر استوانه است. باریکه‌های بلند زودتر ناپایدار می‌شوند. در این سامانه انرژی کشش سطحی که به فصل مشترک دو شاره نسبت داده می‌شود، عامل اساسی در ناپایدار شدن است. کشش سطحی تمایل به کاستن اندازه‌ی سطح فصل مشترک دارد. در این صورت اگر اختلال خارجی اندازه‌ی سطح را در فصل مشترک کم کند، سامانه ناپایدار می‌شود.

مثال بارز آب خروجی از شیر سماور را در نظر بگیرید. اگر سعی کنیم تا ارتفاع ستون آب خروجی را بیشتر کنیم، پدیده‌ی قطره قطره شدن را بوضوح می‌بینیم. در چاپگرهای جوهر افشان از این ناپایداری استفاده می‌شود. در این چاپگرها ستون جوهر خروجی از یک نازل را طوری طراحی می‌کنند تا یک سامانه یکنواخت از قطرات ریز جوهر برای چاپ کردن بدست آید.

ناپایداری ریلی-تیلور

دو شاره با چگالی مختلف را در نظر بگیرید که با یک مرز مشترک افقی در تماس با یکدیگر قرار دارند. این دو شاره با هم ترکیب نمی‌شوند. اکنون فرض کنید که شاره‌ی بالاتر (شاره‌ی رویی) دارای چگالی بیشتری باشد. این وضعیت یک حالت تعادلی است ولی نمی‌تواند پایدار



شکل ۲.۹ یک مثال زیبا از ناپایداری ریلی-تیلور. از سمت چپ یک قطره جوهر به روی آب افزوده می‌شود. در لحظه‌ی ابتدایی، جوهر که اندکی از آب چگال‌تر است، روی آب قرار می‌گیرد. به سرعت سامانه ناپایدار شده و جوهر درون آب وارد می‌شود. ترکیب شیمیایی جوهر اجازه می‌دهد تا در آب حل شود. ولی دقت کنید که حل شدن و پدیده‌ی پخش جوهر در آب در زمانهای طولانی‌تر مشاهده می‌شود. تصاویر با یک دوربین سریع و توسط آقای سعید ملایی، کارشناس ارشد فیزیک، در آزمایشگاه شاره‌های پیچیده‌ی دانشگاه زنجان بدست آمده است.

بماند. در واقع با کوچکترین اختلالی در مرز مشترک، قسمت کوچکی از شاره چگال‌تر به پایین حرکت کرده که انرژی سامانه کم‌تر می‌شود. این اختلال تقویت شده و شاره‌ی چگال‌تر کاملاً به پایین می‌آید. لیوان آب وارونه شده مثال مهمی از این ناپایداری است. در مورد سقف آغشته به رنگ هم وضعیت به همین صورت است. رنگ که از هوا چگال‌تر است در بالا قرار دارد. این وضعیت پایدار نیست و رنگ شروع به چکه کردن می‌کند. چکه کردن رنگ آنقدر ادامه می‌یابد تا لایه‌ی رنگ باقی مانده آنقدر نازک شود تا کشش سطحی رنگ و سقف غالب شده و سامانه را پایدار کند. در قسمت‌های دیگر فیزیک هم ردپای قوی از ناپایداری ریلی-تیلور را می‌توان مشاهده کرد. شکل خاص سحابی خرچنگ، پدیده‌ی وارونگی هوا و ناپایداری‌های داخل راکتورهای هسته‌ای در ارتباط مستقیمی با این ناپایداری هستند. در شکل ۲.۹، نتیجه‌ی یک آزمایش تجربی که منجر به ناپایداری ریلی-تیلور می‌شود را می‌بینید.

ناپایداری کلوین-هلمهولتز

سامانه شارشی متشکل از دوفاز که در فصل مشترک آن اختلاف سرعت وجود دارد، ناپایدار

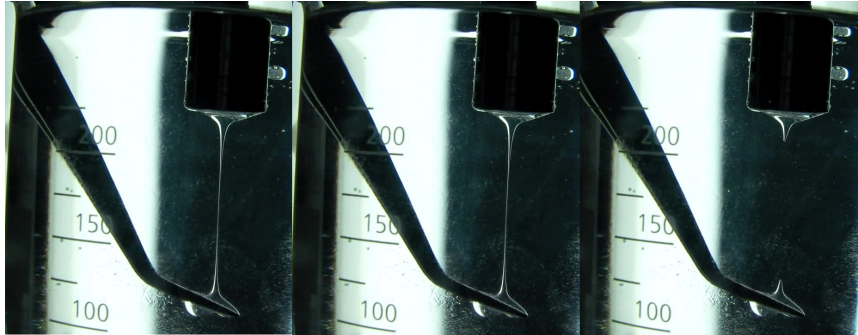
می‌شود. موج‌های تولید شده در فصل مشترک علامتی از ناپایدار شدن سامانه است. دولایه از شاره‌هایی که اختلاف چگالی اندکی با هم دارند را درون ظرف بزرگی بریزید. اگر ظرف را اندکی خم کنید جریانی از دو شاره روی هم تولید می‌شود. اگر از دیواره‌های شفاف ظرف به فصل مشترک نگاه کنید، ناپایداری را بصورت موج‌هایی می‌بینید. موج‌های ایجاد شده روی سطح آب ساکن که در مجاورت وزش باد قرار دارد، نشان از ناپایداری کلوین-هلمهولتز دارند. اگر سرعت باد از حد مشخصی بزرگتر شود، سامانه ناپایدار می‌شود. آستانه‌ی ناپایداری به مشخصات سامانه مثل چگالی، وشکسانی و کشش سطحی بستگی دارد.

ناپایداری ریلی-بنارد

یک لایه‌ی نازک شاره را در نظر بگیرید که بین دو صفحه‌ی موازی و افقی قرار دارد. اگر دو صفحه هم‌دما باشند، پس از مدتی شاره به حالت تعادل ایستا می‌رسد. حال اگر صفحه‌ی پایین را کمی گرم‌تر کنیم چه اتفاقی می‌افتد؟ رسانندگی حرارتی، بدون اینکه جریان خالصی از شاره برقرار شود، انرژی گرمایی را از صفحه‌ی پایینی به صفحه‌ی بالایی انتقال می‌دهد. در این صورت یک اختلاف دمای خطی نیز درون شاره ایجاد می‌شود. در برخی شرایط، وابسته به اندازه‌ی اختلاف دمایی و ضخامت شاره، حالت ایستای بالا ناپایدار می‌شود. در این صورت جریان خالصی از شاره‌ی نزدیک صفحه‌ی گرم که چگالی کمتری دارد به سمت بالا ایجاد می‌شود. ناپایداری با ایجاد سلول‌های همرفتی همراه است که بصورت منظم کنار هم قرار می‌گیرند. در نواحی مرکزی هر سلول جریان روبه‌بالا و در لبه‌ها، جریان روبه پایین برقرار است. ممکن است این طرح‌های منظم را در دانه‌های ریز چای درون لیوان که در حالت سر شدن است، دیده باشید. طرح‌های منظم نمک یا رسوبات در کف دریاچه‌ها و حوضچه‌هایی که آب آنها خشک شده است، مثال معروف دیگری از سلول‌های بنارد هستند.

۲۰۹ ناپایداری ریلی-پلاتو

آب خروجی از شیر سماور در شرایطی بصورت قطره قطره و ناپیوسته خارج می‌شود. ظاهراً نرخ شارش و طول استوانه‌ی شاره تشکیل شده در این اثر مهم هستند. در این بحث می‌خواهیم ببینیم



شکل ۳.۹ ناپایداری ریلی-پلاتو برای یک استوانه‌ی باریک از روغن سیلیکون درون آب. روغن سیلیکون استفاده شده دارای شکسانی سینماتیکی $\eta/\rho = 30000$ سانتی استوکس است. از سمت چپ، وضعیت باریکه نشان داده شده است. با گذشت زمان این باریکه فرو می‌پاشد [۵۵].

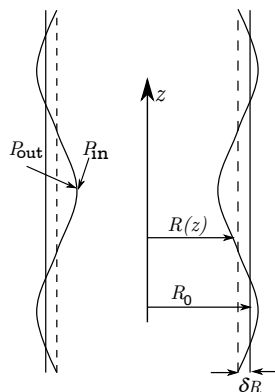
آیا شاره‌ی استوانه‌ای شکل می‌تواند پایدار باشد؟ برای این منظور اختلال بی‌نهایت کوچکی در سامانه ایجاد می‌کنیم و پاسخ سامانه را به این اختلال بررسی می‌کنیم. سامانه در صورتی پایدار است که با اعمال اختلال، انرژی‌اش بیشتر شود و تمایل به بازگشت به وضعیت قبلی داشته باشد. در غیر این صورت سامانه ناپایدار است. یک مورد تجربی از این ناپایداری در شکل ۳.۹ نشان داده شده است.

مطابق شکل ۴.۹، استوانه‌ای از شاره به طول L و مقطع R_0 را در نظر بگیرید. با توجه به قانون لاپلاس، اختلاف فشار بین داخل و خارج استوانه و درست روی دیواره‌ی آن برابر است با:

$$P_{in} - P_{out} = \sigma \times \frac{1}{R_0}. \quad (1.9)$$

دقت کنید که در این مورد، رویه‌ی جانبی استوانه فقط در یک راستا خمیده است. برای مطالعه‌ی پایداری این سامانه یک اختلال کوچک به استوانه اعمال می‌کنیم. در واقع با اعمال اختلال خارجی، شکل استوانه از حالت استوانه‌ی کامل خارج می‌شود. در حالت کلی، رویه‌ی جانبی سامانه در هر دو سو خمیده می‌شود. در این شرایط اختلاف فشار داخل و خارج استوانه در یک نقطه‌ی دلخواه بصورت زیر است:

$$P_{in} - P_{out} = \sigma \times \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.9)$$



شکل ۴.۹ یک استوانه‌ی شاره را با اعمال اختلال کوچک خارجی مختل کرده‌ایم. برای ثابت ماندن حجم کل استوانه باید شعاع متوسط استوانه‌ی مختل شده به میزان $\delta R = R_0 - \bar{R} \approx \frac{1}{4} (h_0/R_0)^2 R_0$ از شعاع استوانه‌ی اصلی کوچکتر باشد.

برای بررسی دقیق‌تر مسأله اجازه دهید اختلال خارجی را به شکلی در نظر بگیریم که روی سطح استوانه و در راستای طولی یک موج سینوسی ساده ایجاد می‌کند. این اختلال خاص با تابع زیر داده می‌شود:

$$h(z) = h_0 \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right). \quad (۳.۹)$$

شکل استوانه بصورتی تغییر می‌کند که در نقاطی برآمده و در نقاطی فرورفته شده است. اختلال در نظر گرفته شده، تقارن سمتی استوانه را حفظ می‌کند. با توجه به این‌که مقدار کل شاره ثابت است و شاره را تراکم ناپذیر فرض می‌کنیم، باید برای هر اختلالی حجم کل سامانه مختل شده ثابت بماند. در این صورت می‌توانیم ببینیم که سطح جانبی استوانه با شعاع متغیر $R(z) = \bar{R} + h_0 \sin(2\pi \frac{z}{\lambda})$ توصیف می‌شود، که در آن $\bar{R}$ مقدار شعاع متوسط برای استوانه‌ی مختل شده است. برای اینکه مقدار متوسط شعاع را بدست آوریم به صورت زیر عمل می‌کنیم. اگر طول استوانه را برابر با L بگیریم، حجم استوانه‌ی مختل نشده برابر است با: $\pi R_0^2 L$. برای استوانه‌ی مختل شده حجم از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\pi R_0^2 L = \pi \langle R^2(z) \rangle L = \pi \langle (\bar{R} + h(z))^2 \rangle L,$$

که در آن متوسط‌گیری در راستای طول انجام می‌شود. با انجام محاسبات دیده می‌شود که:

$$\bar{R} \approx R_0 \left(1 - \frac{1}{4} (h_0/R_0)^2 \right),$$

در اینجا فرض کرده‌ایم که $h_0 \ll R_0$. برای بررسی پایداری سامانه، انرژی آن را در دو حالت با هم مقایسه می‌کنیم. تغییر انرژی سطحی سامانه در اثر اختلال بالا بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta E \approx 2\pi\sigma \int \left(R(z) \left(1 + \left(\frac{dh}{dz} \right)^2 \right) - R_0 \right) dz.$$

حالا دقت کنید که برای $\Delta E < 0$ ، سامانه ناپایدار می‌شود. با اندکی محاسبه، این شرط ناپایداری به دست می‌آید:

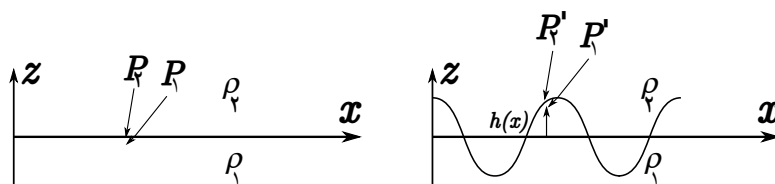
$$\left(1 - \left(\frac{2\pi R_0}{\lambda} \right)^2 \right) > 0. \quad (4.9)$$

این همان اتفاقی است که برای آب خروجی از شیر سماور می‌افتد. پس سامانه‌ی استوانه برای اختلال‌هایی با طول موجهای بزرگ $\lambda < 2\pi R_0$ ناپایدار است. از آنجا که بزرگترین طول موج ممکن روی سامانه با ابعاد سامانه داده می‌شود، پس: $\lambda_{max} \approx L$. بنابراین ناپایداری بصورت $2\pi R_0 < L$ می‌شود. آیا نتیجه‌ی به دست آمده به شکل خاصی که برای استوانه‌ی مختل شده در نظر گرفته‌ایم، بستگی دارد؟

توصیف ارائه شده در این فصل برای ناپایداری ریلی-پلاتو، توصیفی مقدماتی و ساده بود. در عمل وشکسانی شاره نیز در تعیین آستانه‌ی ناپایداری سهم دارد. برای دیدن مقاله‌ی اصلی تیلور به مرجع [۴۵] نگاه کنید.

۳.۹ ناپایداری ریلی-تیلور

در این قسمت به بررسی جزئیات ناپایداری ریلی-تیلور می‌پردازیم. مطابق شکل ۵.۹، فصل مشترک دو شاره با چگالی‌های متفاوت ρ_1 و ρ_2 را در نظر بگیرید. شاره‌ی بالاتر دارای چگالی بیشتری است ($\rho_2 > \rho_1$) و صفحه‌ی صاف $z = 0$ محل فصل مشترک را نشان می‌دهد. این سامانه در میدان گرانشی یکنواخت $\mathbf{g} = g\hat{z}$ ، قرار گرفته است. در سمت چپ شکل، که فصل



شکل ۵.۹ فصل مشترک دو شار به چگالی‌های متفاوت ρ_1 و ρ_2 ، با صفحه‌ی $z = 0$ نشان داده شده است. در قسمت چپ فصل مشترک صاف است ولی در قسمت راست با اعمال یک اختلال کوچک شکل فصل مشترک بصورت نوسانی مختل شده است.

مشترک صاف است، فشار در دو نقطه‌ی همسایگی بالا و پایین فصل مشترک با هم برابر است:

$$P_1 = P_2 = P_0.$$

اکنون می‌خواهیم پاسخ این سامانه را به یک اختلال بی‌نهایت کوچک بررسی کنیم. هر اختلال بی‌نهایت کوچک، مثلاً اعمال یک ضربه‌ی کوچک به فصل مشترک، باعث تغییر شکل فصل مشترک می‌شود. از طرف دیگر هر نوع تغییر شکل فصل مشترک را بر اساس بسط فوریه، می‌توانیم بصورت ترکیبی از امواج سینوسی و کسینوسی با طول موج‌ها و دامنه‌های مختلف در نظر بگیریم. پس در حالت کاملاً کلی، یک تغییر شکل سینوسی با طول موج λ ، را در نظر می‌گیریم. شکل فصل مشترک مختل شده با تابع

$$z = h(x) = h_0 \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right),$$

داده می‌شود. برای سهولت تنها امواجی که در راستای x حرکت می‌کنند را در نظر گرفته‌ایم. دو نقطه‌ی همسایگی از بالا و همسایگی از پایین در فصل مشترک مختل شده دارای فشارهای متفاوت هستند:

$$P'_1 = P_0 + \rho_1 g h(x), \quad P'_2 = P_0 + \rho_2 g h(x). \quad (5.9)$$

در این نقطه روی سطح مختل شده، اختلاف فشاری به اندازه‌ی $\Delta P = (\rho_2 - \rho_1)gh(x)$ ، به قطعات شار، نیرو وارد می‌کند. این نیرو باعث حرکت شار می‌شود. سطح کوچکی با اندازه‌ی

ds ، را روی فصل مشترک در نظر بگیرید. حرکت این قسمت از فصل مشترک با جابجایی جرم m همراه است. معادله‌ی حرکت این جرم بصورت زیر است:

$$m \frac{d^2}{dt^2} h(x, t) = \Delta P ds. \quad (6.9)$$

در قسمت مربوط به انتشار امواج سطحی، دیدیم که با دور شدن از فصل مشترک، سرعت شاره بصورت نمایی $e^{-2\pi z/\lambda}$ ، به صفر می‌رسد. پس کاملاً منطقی است اگر جرم متحرک همراه شاره را بصورت زیر تخمین بزنیم:

$$m = \lambda \rho_1 ds + \lambda \rho_2 ds, \quad (7.9)$$

ضخامتی از شاره با اندازه‌ی λ از دو طرف، حرکت می‌کنند. با ترکیب این نتایج داریم:

$$\frac{d^2}{dt^2} h(x, t) = A \frac{g}{\lambda} h(x, t), \quad (8.9)$$

که در آن $A = 2\pi \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$. کلی‌ترین جواب برای تحول زمانی حرکت سطح بصورت زیر می‌شود:

$$h(x, t) = a \cosh(\gamma t) + b \sinh(\gamma t), \quad (9.9)$$

که در آن $\gamma = \sqrt{Ag/\lambda}$ و a و b دو ثابت هستند. طبق رابطه‌ی ۹.۹ و برای $\rho_2 > \rho_1$ تغییر شکل فصل مشترک بصورت نمایی واگرا می‌شود. این مهم‌ترین نشانه برای ناپایدار بودن سامانه است و فصل مشترک صاف نمی‌تواند پایدار بماند.

۴.۹ ناپایداری کلون-هلمهولتز

در این قسمت به بررسی جزئیات ناپایداری کلون-هلمهولتز می‌پردازیم. باز هم مطابق شکل ۵.۹، فصل مشترک دو شاره با چگالی‌های متفاوت ρ^+ و ρ^- را در نظر بگیرید. به تغییر نمادها توجه کنید: اینجا چگالی شاره بالایی که قبلاً با ρ_2 نشان داده شده بود، با ρ^+ جایگزین شده است. فصل مشترک دو شاره با سطح صاف $z = 0$ مشخص شده است. از اتلاف ویسکوزیته‌ی شاره‌ها

صرفنظر می‌کنیم. فرض کنید در شارهای بالایی جریان شارشی یکنواختی با سرعت یکنواخت $v\hat{x}$ برقرار باشد. برای کسب شهود بهتر می‌توانید فرض کنید جریان آرام باد را روی سطح دریای آرام داریم. سوال این است که آیا این حالت، یعنی جریان یکنواخت در هوا و دریای آرام، می‌تواند پایدار بماند؟ برای پاسخ به این مساله توجه کنید که میدان سرعت شارشی این سامانه باید از معادله‌ی حرکتی

$$\rho(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla P - \rho g \hat{z}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

به همراه شرایط مرزی پیوستگی روی مرز مشترک بدست آید. اجازه دهید جواب پایا و حدسی زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} u_s^+ = v\hat{x}, & P_s^+ = P_0 - \rho^+ g z, & z > 0, \\ u_s^- = 0, & P_s^- = P_0 - \rho^- g z, & z < 0, \end{cases}$$

واضح است که این جواب‌ها در معادلات و شرایط مرزی صدق می‌کنند. توجه کنید که برای شارهای غیر اتلافی، تنها پیوستگی مولفه‌ی عمودی سرعت و پیوستگی فشار مورد نظر است. برای بررسی پایداری این جواب‌ها، اختلال کوچکی در میدان‌های مورد بحث بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathbf{u}^\pm = \mathbf{u}_s^\pm + \delta \mathbf{u}^\pm, \quad P^\pm = P_s^\pm + \delta P^\pm.$$

در واقع مرز مشترک هم قاعدتا می‌تواند مختل شود. برای سهولت و بدون کاستن از کلیات مساله، فرض می‌کنم مرز در راستای x مختل شود و شکل مرز مختل شده را با تابع عمومی $z = \zeta(x, t)$ نشان می‌دهیم. اگر اختلال‌ها را کوچک فرض کنیم، باید در معادلات خطی شده‌ی زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} \rho^+ \partial_t \delta \mathbf{u}^+ + v \partial_x \delta \mathbf{u}^+ = -\nabla \delta P^+, \\ \rho^- \partial_t \delta \mathbf{u}^- = -\nabla \delta P^-, \end{cases}$$

و از آنجا می‌بینیم که اختلال فشار در معادله‌ی لاپلاس $\nabla^2 \delta P^\pm = 0$ صدق می‌کند. شرط مرزی فشار بصورت $P^+(x, z = \zeta) = P^-(x, z = \zeta)$ است. با فرض کوچک بودن اختلال و با بسط تیلور می‌بینیم که شرط مرزی بصورت ساده‌شده‌ی زیر می‌شود:

$$\delta P^+(x, z = 0) = \delta P^-(x, z = 0). \quad (۱۰.۹)$$

شرط مرزی‌های مربوط به سرعت بصورت زیر می‌شوند:

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot \mathbf{u}^+(x, z = \zeta) &= \hat{n} \cdot \mathbf{u}^-(x, z = \zeta), \\ u_z^+(x, z = \zeta) &= (\partial_t + u_x^+ \partial_x) \zeta(x, t) \sim (\partial_t + v \partial_x) \zeta(x, t), \\ u_z^-(x, z = \zeta) &= (\partial_t + u_x^- \partial_x) \zeta(x, t) \sim (\partial_t + \circ) \zeta(x, t).\end{aligned}\quad (11.9)$$

معادله‌ی اول، پیوستگی مولفه‌ی عمودی سرعت است که در آن بردار عمود بر سطح برابر است با $\hat{n} \sim \hat{z} - (\partial_x \zeta) \hat{x}$. معادله‌ی دوم، معادله‌ی حرکت مرز را می‌دهد. فرض کنید از همسایگی بالا به مرز نزدیک می‌شویم. در این صورت از دید ناظری که همراه شاره با سرعت u_x^+ و در راستای x حرکت می‌کند، شاره فقط مولفه‌ی سرعت در راستای z دارد و آن برابر است با تغییرات زمانی پروفایل سطح (البته از دید همان ناظر). معادله‌ی سوم هم به همین صورت تعبیر می‌شود. ساده‌سازی شرایط مرزی، عملاً به شرایط زیر می‌رسد:

$$\delta u_z^+(x, \circ) = (\partial_t + v \partial_x) \zeta(x, t), \quad \delta u_z^-(x, \circ) = (\partial_t + \circ) \zeta(x, t). \quad (12.9)$$

البته توجه کنید که نامتناهی بودن شاره‌های بالایی و پایینی شرایط مرزی ساده‌کننده‌ای بصورت $\delta \mathbf{u}^\pm(z \rightarrow \pm\infty) = 0$ را لازم دارد.

برای حل معادلات از تبدیل فوریه زمانی و مکانی کمک می‌گیریم. در واقع قرار می‌دهیم:

$$\zeta(x, t) = \sum_{q, \omega} \bar{\zeta}(q, \omega) e^{i(qx - \omega t)}, \quad \delta f(x, z, t) = \sum_{q, \omega} \delta \bar{f}(q, z, \omega) e^{i(qx - \omega t)},$$

که در آن $\sum_{q, \omega} = \int \frac{dq d\omega}{(2\pi)^2}$ و f می‌تواند فشار یا هر کدام از مولفه‌های سرعت در شاره‌ی بالایی یا پایینی باشد. مثلاً معادله‌ی لاپلاس برای فشار را در نظر بگیرید که بصورت $(\partial_z^2 - q^2) \delta \bar{P}^\pm = 0$ می‌شود. جوابهای آن که در شرط مرزی مناسب صدق می‌کنند بصورت زیر می‌شود:

$$\delta \bar{P}^\pm = A e^{\mp qz},$$

که در آن A یک ثابت است. با در دست داشتن فشار، عملاً با جایگزاری در معادلات دیفرانسیل حرکتی شاره، میدانهای سرعت هم به دست می‌آیند. در نهایت با جایگزاری آنها در شرایط مرزی

که حرکت مرز را توصیف می‌کنند، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\left(\omega - qv \frac{\alpha + i\sqrt{\alpha}}{1 + \alpha} \right) \bar{\zeta}(q, \omega) = 0, \quad \alpha = \frac{\rho^+}{\rho^-}.$$

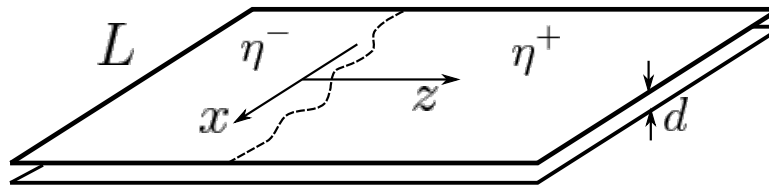
رابطه‌ی بالا، تعبیر ساده‌ای دارد. در واقع طبق رابطه‌ی بالا، اگر عبارت داخل پرانتز صفر شود، می‌توانیم یک جواب غیر صفر برای ζ داشته باشیم. یعنی اگر $\omega = qv \frac{\alpha + i\sqrt{\alpha}}{1 + \alpha}$ باشد، مرز می‌تواند از حالت صاف خارج شود. نکته‌ی مهم این است که فرکانس یک قسمت موهومی همواره منفی ω_i دارد. در نتیجه اگر بخواهیم شکل مرز مختل شده را در فضای واقعی (غیر فوریه)، بدست آوریم باید فرکانس را با مقدار بالا جایگزین کنیم. این موضوع باعث می‌شود که عامل وابسته به زمان $e^{\omega_i t}$ در حرکت مرز دیده شود که بوضوح در زمانهای بزرگ، واگرا می‌شود. نتیجه اینکه، جواب پایای اولیه که مرز صاف بود نمی‌تواند جواب پایداری باشد و سریعاً امواج سطحی ایجاد می‌شوند. البته برای مطالعه‌ی دقیق‌تر شکل این امواج لازم است تا معادلات اختلالی را تا مراتب بالاتر بنویسیم.

نکته‌ی نهایی این است که در محاسبات بالا، از اتلاف و کشش سطحی مرز مشترک صرف‌نظر شده است. در شرایط واقعی که اتلاف هم داریم، آستانه‌ی ناپایداری به میزان اتلاف و دیگر شرایط سیستم بستگی خواهد داشت.

۵.۹ ناپایداری سفمن-تیلور

فضای بین دو صفحه‌ی تخت موازی که به سلول هیل-شاو^۱ معروف است را در نظر بگیرید. فاصله‌ی بین دو صفحه d ، آنقدر کم است که در حضور جریان‌های مورد نظر ما، عدد رینولدز بسیار کوچک است. فرض کنید فضای بین این دو صفحه، با یک شارهی ویسکوز مثلاً روغن با ویسکوزیته‌ی η^+ پر شده است. اکنون در نقطه‌ای از یکی از صفحات، یک منفذ کوچک ایجاد می‌کنیم و سعی می‌کنیم شارهی دیگری با ویسکوزیته‌ی کمتر η^- (مثلاً آب $\eta^- < \eta^+$) را به درون روغن تزریق کنیم. اگر همه چیز همسانگرد و یکنواخت باشد، قاعدتاً انتظار داریم مایع تزریق شده، وقتی از بالای یکی از صفحات سلول هیل-شاو نگاه می‌کنیم، بصورت متقارن و با جبهه‌ی دایره‌ای شکل روغن را پس زده و رشد کنید. در عمل چیز دیگری دیده می‌شود. جبهه‌ی

^۱Hele-Shaw



شکل ۶.۹ سلول هیلی شاو با دو شار به و شکسانی مختلف پر شده است. شارهای پسین با و شکسانی η^- که قسمت $z < 0$ را پر کرده است، شارهای جلویی با و شکسانی η^+ را به سمت جلو می‌راند. در صورتیکه $\eta^+ > \eta^-$ این سامانه می‌تواند ناپایدار شود.

دایره‌ای شکل پس از مدتی تقارن خود را از دست داده و زبانه‌های کوچکی روی قسمت‌های مختلف دایره رشد می‌کنند. با گذشت زمان، تصاویر زیبایی ایجاد می‌شود که خاصیت خود-تشابهی دارند. این موضوع با ناپایداری هیدرودینامیکی قابل توصیف است. موضوع این است که اگر یک جبهه‌ی پیش‌رونده از یک شارهای و شکسان در پس و یک شارهای و شکسان‌تر در پیش، داشته باشیم، مرز بین آنها نمی‌تواند صاف بماند و سریعاً مرز صاف ناپایدار می‌شود. این موضوع به ناپایداری سفمن-تیلور^۱ مشهور است.

برای توصیف این ناپایداری، اجازه دهید ابتدا ساده‌سازیهایی که مختص شارش سلول هیلی شاو است را انجام دهیم. اصل موضوع به نازک بودن و لایه‌ای بودن جریان درون سلول هیلی شاو مربوط می‌شود. مطابق شکل ۶.۹، راستای عمود بر صفحات هیلی شاو را با $\hat{y}$ و دو راستای درون صفحه‌ای را با $\hat{x}$ و $\hat{z}$ نشان می‌دهیم. با صرف‌نظر کردن از مولفه‌ی عمود بر صفحه، تنها مولفه‌های درون صفحه‌ای شارش را در نظر می‌گیریم. مثلاً x را در نظر بگیرید. قاعدتاً این مولفه‌ی سرعت می‌تواند به y بستگی داشته باشد. در واقع با در نظر گرفتن شرط مرزی صفر شدن سرعت روی صفحات بالا و پایینی، بصورت موضعی عملاً یک شارش پوازوی داریم که با گرادیان موضعی فشار تولید می‌شود. اگر گرادیان فشار را بصورت $\partial_x P$ در نظر بگیریم، پروفایل سرعت بصورت $u_x(y) = (\partial_x P / 2\eta)(y^2 - d^2/4)$ است. برای سهولت بیشتر، می‌توانیم میانگین سرعت در ارتفاع‌های مختلف را به عنوان معیاری از سرعت در نظر بگیریم. میانگین‌گیری روی ارتفاع،

^۱Saffman-Taylor

پیش از این شارش پوآزوی انجام گرفته بود و بصورت زیر می‌شود:

$$u_x = -\frac{d^2}{12\eta} \partial_x P,$$

البته برای شلوغ نشدن رابطه، از نماد میانگین استفاده نشده است. ایده‌ی بالا را می‌توان تعمیم داد به این صورت که جریان درون سلول هیلی شاو، جریانی است ساده که با گرادیان فشار تامین می‌شود:

$$(u_x, u_z) = -\frac{d^2}{12\eta} (\partial_x P, \partial_z P). \quad (13.9)$$

در حقیقت معادله‌ی بالا به همراه معادله‌ی لاپلاس دو بعدی که فشار در آن صدق می‌کند، معادلاتی هستند که شارش درون سلول هیلی شاو را مشخص می‌کنند.

اکنون بازگردیم به مساله‌ی اصلی ناپایداری سفمن-تیلور. باز هم می‌خواهیم هندسه‌ی شارشی را ساده کنیم. فرض کنید که مرز بین دو شارهی پیش‌رو و پس‌رو که سلول هیلی شاو را پر کرده‌اند، اگر از بالا نگاه کنیم، یک مرز صاف باشد. سوال این است که آیا این مرز صاف، صاف می‌ماند یا نه؟ حرکت از طریق فشاری که به شارهی پس‌رو با ویسکوزیته‌ی η^- وارد می‌شود تامین می‌شود بصورتی که مرز مشترک با سرعت $v \hat{z}$ حرکتی می‌کند. از دید ناظری که با سرعت $v \hat{z}$ و همراه مرز حرکت می‌کند، مساله را بررسی می‌کنیم. از دید این ناظر انحراف از مرز صاف با تابع $z = \zeta(x, t)$ نشان داده می‌شود. از دید این ناظر جواب‌های متناظر با مرز تخت با میدان فشار زیر داده می‌شوند:

$$P_s^\pm = -\frac{12\eta^\pm}{d^2} v z + P_0,$$

توجه شود که جواب‌ها برای نواحی $z > 0$ و $z < 0$ را با علامت $\pm$ نشان داده‌ایم. به پیوستگی فشار در نقاط $z = 0$ توجه کنید. نکته‌ی مهمی که توجه به آن ضروری است، مربوط می‌شود به اینکه مرز بین دو شاره در راستای عمود بر صفحات سلول هیلی شاو انحنا داشته و این باعث اختلاف فشار بین دو شاره می‌شود. از آنجا که فاصله‌ی بین صفحات ثابت و شعاع انحنای مورد بحث از دیگر طول‌های مشخصه‌ی مورد نظر ما کوچکتر است، از جزییات این اختلاف فشار صرف‌نظر شده است.

برای مطالعه‌ی پایداری مرز، میدان‌های فشار را بصورت زیر مختل می‌کنیم:

$$P^{\pm} = -\frac{12\eta^{\pm}}{d^2}vz + P_0 + \delta P^{\pm}.$$

با کمک تبدیل فوریه و حل معادله‌ی لاپلاس که اختلال فشار در آن صدق می‌کند، بسهولت شکلی بصورت

$$\delta P^{\pm} = \sum_{q,\omega} A^{\pm} e^{\mp qz + i(qx - \omega t)},$$

برای آن بدست می‌آید. شرایط مرزی بصورت زیر باید در نظر گرفته شود:

$$\partial_t \zeta(x, t) = u_z^{\pm}(x, z = \zeta), \quad P^+(x, z = \zeta) - P^-(x, z = \zeta) = \sigma \partial_x^2 \zeta(x, t),$$

که در آن کشش سطحی مرز دو شماره با σ نشان داده شده است. با جایگزاری جواب‌ها در شرایط مرزی، معادله‌ی خطی شده‌ی تحول مرز بصورت زیر می‌شود:

$$(14.9) \quad (-i\omega - \tau_r) \bar{\zeta}(q, \omega) = 0, \quad \tau_r = \frac{d^2 q}{12(\eta^+ + \eta^-)} \left(-\sigma q^2 - \frac{12v}{d^2}(\eta^- - \eta^+) \right).$$

تعبیر این رابطه مطابق قبل است. در واقع برای $\eta^+ < \eta^-$ مرز صاف همواره صاف می‌ماند ولی برای $\eta^+ > \eta^-$ اختلال با بردار موجی که در محدوده‌ی $0 < q < \sqrt{12v(\eta^+ - \eta^-)/\sigma d^2}$ باشد، می‌تواند مرز صاف را ناپایدار کنند. بردارموج‌هایی که سیستم را ناپایدار می‌کنند، بین صفر تا یک مقدار بیشینه‌ی $q_{\max}$ قرار می‌گیرند. مورد قابل توجه، محدود بودن اندازه‌ی سلول هیلای شاو است. فرض کنید که طول سلول هیلای شاو در راستای x برابر با L باشد. در واقع این سلول هیلای شاو از دو طرف با دیواره‌هایی بسته شده است. در این صورت عملاً روی بلندترین طول موجهای ممکنه در سیستم محدودیت داریم. اگر طول سلول آنقدر کوچک باشد که در شرط $L < 2\pi/q_{\max}$ بگنجد، ناپایداری در سیستم قابل مشاهده نخواهد بود.

پرسش‌ها

۱.۹ کشش سطحی فصل مشترک چه نقشی در ناپایداری ریلی-تیلور دارد؟ برای مطالعه‌ی این موضوع، نیروی ناشی از کشش سطحی را به سمت راست معادله‌ی حرکت ۶.۹ اضافه کرده و بقیه‌ی محاسبات را ادامه دهید. برای تخمین نیروی کشش سطحی اختلاف فشار اضافی را با استفاده از قانون لاپلاس در نظر بگیرید. برای ساده کردن محاسبات تابع $h(x)$ و مشتقات آن را کوچک فرض کنید.

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

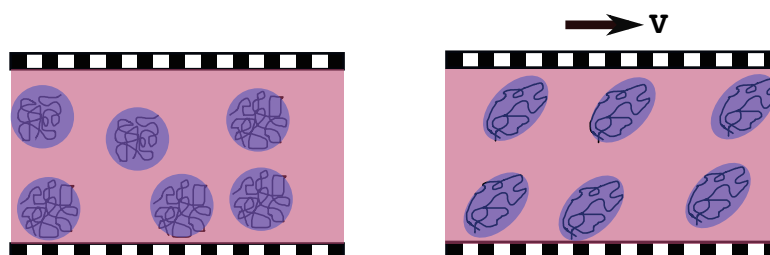


شارش نانیوتنی

تاکنون شارش شاره‌های نیوتنی را مطالعه کرده‌ایم. در این فصل می‌خواهیم شاره‌هایی را بررسی کنیم که رفتارهای پیچیده‌تری دارند. خمیردندان و سُس گوجه وقتی تحت فشار نیستند، بیشتر خواص جامدات را نشان می‌دهند. ولی وقتی قوطی حاوی خمیردندان یا سُس را فشار می‌دهید، روان‌تر می‌شود. محلول نشاسته‌ی ذرت با آب، رفتاری برعکس دارد. این محلول وقتی تحت اثر نیروی خارجی قرار می‌گیرد، وشکسان‌تر می‌شود. در تنش‌های خیلی زیاد این محلول رفتاری شبیه جامدات نشان می‌دهد. روی حوضچه‌ای که از این محلول پر شده است می‌توان راه رفت. کافیسیت تا قدم‌ها را خیلی سریع‌تر برداریم. در این شاره‌ها، رابطه‌ی ساختاری خطی بین تنش و نرخ برش وجود ندارد. موضوع شاره‌های نانیوتنی از موضوعات تحقیقاتی روز است و بسیاری از مسائل این حوزه همچنان در دسته‌ی مسائل باز علم هستند [۱۳، ۱۴، ۱۵]. ابتدا به ارائه‌ی توصیفی مقدماتی از برخی رفتارهای شناخته شده در این شاره‌ها می‌پردازیم. در ادامه با ارائه‌ی یک مدل ریزمقیاس ساده، برخی از خواص شاره‌های نانیوتنی پلیمری را به دست می‌آوریم.

۱.۱۰ ناهمسانگردی ریزمقیاس

رابطه‌ی خطی و ثابت بین تنش برشی و نرخ برش، رفتار نیوتنی را مشخص می‌کند. ضریب تناسب هم معرف وشکسانی شاره است. هرگونه انحراف از این رفتار را رفتار نانیوتنی می‌نامیم. برای شاره‌های پیچیده وشکسانی را بصورت مشتق تنش برشی نسبت به نرخ برش تعریف می‌کنیم. برای شاره‌های نانیوتنی، وشکسانی ثابت نیست و به نرخ برش اعمال شده بستگی دارد. وشکسانی در برخی شاره‌ها با افزایش نرخ برش افزایش می‌یابد و در برخی دیگر از شاره‌ها کاهش می‌یابد. شاره‌های طبیعی مثل: خون، سفیده‌ی تخم مرغ، شیر، شیرهی گیاه بامیه، محلول آب با نشاسته‌ی ذرت و تمام محلول‌های پلیمری مصنوعی مثل خمیر دندان و شامپو، رفتار نانیوتنی دارند. از دیدگاه ریزمقیاس، تفاوت اساسی شاره‌ای که تقریباً نیوتنی است، مثل آب، با شاره‌ی نانیوتنی را باید در نوع تقارن مولکول‌های تشکیل دهنده‌ی آن جستجو کرد. در شاره‌های نیوتنی، مولکول‌ها کاملاً متقارن و همسانگرد هستند ولی در مورد یک شاره‌ی پیچیده موضوع متفاوت است. به عنوان مثال، شکل ۱.۱۰ جزئیات یک محلول رقیق پلیمری را نشان می‌دهد. در این مورد مولکولهای بلند یک پلیمر، درون یک حلال همگن مثل آب حل شده‌اند. اندازه‌ی مولکولهای آب حدود ۱ آنگستروم ولی طول یک پلیمر ممکن است تا چند هزار آنگستروم برسد. بسته به نوع پلیمر می‌توانیم برخی از پلیمرها را با ساختارهای میله‌ای شکل صلب و برخی دیگر را با زنجیره‌های انعطاف پذیر کرم مانند تقریب بزیم. در برخی پلیمرها، پیوندهای مولکولی بین مونومرهای سازنده‌ی پلیمر می‌توانند آزادانه بچرخند و در نهایت پلیمر ساختاری مثل یک زنجیره‌ی میچاله شده را به خود می‌گیرد. به علت وجود افت‌وخیزهای گرمایی، ساختار کرم مانند، هر لحظه تغییر می‌کند ولی بطور متوسط می‌توان فرض کرد که هر پلیمر فضای یک کره را اشغال کرده است. در صورتی که مطابق شکل ۱.۱۰ - قسمت راست، این سامانه را تحت اثر یک جریان برشی خارجی قرار دهیم، پیکربندی درونی هر پلیمر کمی تغییر می‌کند و ساختار ناهمسانگردی می‌گیرد. این ناهمسانگردی ایجاد شده در مقیاس مولکولی رفتار نانیوتنی در مقیاس آزمایشگاهی را در پی دارد. علاوه بر ساختار پلیمری مولکولهای حل شده، ممکن است شاره‌ی پیچیده ساختاری مثل سوسپانسیون‌ها یا امولسیون‌ها داشته باشد. در مورد خون و شیر وضعیت این‌گونه است. گلبول‌های سفید یا قرمز خون و لکه‌های چربی معلق در شیر، با اعمال تنش برشی خارجی،



شکل ۱۰۱: چپ: یک محلول پلیمری در حالت تعادل. راست: با اعمال جریان برشی خارجی ساختار پلیمرهای مجاله شده به گونه‌ای ناهمسانگرد تغییر می‌کند. ناهمسانگردی در مقیاس مولکولی باعث اثرهای نانیوتنی در مقیاس آزمایشگاهی می‌شوند.

ساختاری ناهمسانگرد پیدا می‌کنند.

لازم به تذکر است که در برخی از شاره‌ها، ناهمسانگردی ناشی از برش خارجی نیست. در شاره‌هایی مثل بلور مایع، مولکول‌های سازنده آن ناهمسانگرد هستند. به عنوان مثال در بلور مایع نماتیک، مولکول‌ها به شکل میله‌های صلب هستند و برهمکنش بین این مولکول‌های ناهمسانگرد، یک ساختار ناهمسانگرد ذاتی را برای بلور مایع به ارمغان می‌آورد. در بلور مایع نماتیک، تمام مولکول‌های میله‌ای شکل با هم موازی هستند. بنابراین در این بلور مایع، راستای مولکول‌ها، یک راستای مرجح برای سامانه می‌سازد. با اعمال برش خارجی، راستای ناهمسانگردی تغییر چندانی نمی‌کند. در این سامانه‌ها رابطه‌ی تنش-برش علاوه بر غیر خطی بودن، ناهمسانگرد نیز می‌شود. با توجه به ناهمسانگردی ذاتی این سامانه‌ها، نتیجه‌ی آزمایش تنش برشی به راستای برش اعمال شده وابسته است. برای توصیف این سامانه‌ها به تعداد بیشتری ضرایب پدیده‌شناسی نیاز داریم. با این ضرایب، یک رابطه‌ی ناهمسانگرد بین مؤلفه‌های مختلف تنش و نرخ برش برقرار می‌شود. این رابطه‌ی ناهمسانگرد، رفتار نانیوتنی این شاره‌ها را توصیف می‌کند.

در این فصل، ابتدا در مورد روش‌های پدیده‌شناسی شاره‌های نانیوتنی بحث می‌کنیم. در ادامه با معرفی یک مدل ریزمقیاس پلیمری، برخی از جزئیات بزرگ مقیاس را به دست می‌آوریم. بررسی شارشی و ریخت‌شناسی شاره‌های پیچیده، موضوع علم رئولوژی است.

۲.۱۰ تنش و کرنش

پیش از بررسی شاره‌های نانیوتنی، اجازه دهید مفاهیم تنش و کرنش را یادآوری کنیم. مطابق شکل ۲.۱۰، یک قطعه‌ی بی‌نهایت کوچک از یک محیط پیوسته، با اعمال تنش برشی خارجی، تغییر شکل می‌دهد. برای تغییر شکل‌های بی‌نهایت کوچک این سامانه، زاویه‌ی γ را به نام کرنش تعریف می‌کنیم. در مثال نشان داده شده در شکل، جابجایی هر جزء بی‌نهایت کوچک سامانه بصورت زیر است:

$$x = x_0 + \gamma y, \quad y = y_0. \quad (1.10)$$

در صورتی که جسم مورد نظر ما کاملاً کشسان باشد، در پاسخ به تنش خارجی تغییر شکل می‌دهد. تنش برشی یا نیروی اعمال شده یک رابطه‌ی خطی با اندازه‌ی تغییر شکل دارد:

$$\sigma_{xy} = G\gamma. \quad (2.10)$$

این رابطه تعمیم قانون هوک است و ثابت G ، مدول کشسانی سامانه است. اگر سامانه‌ی مورد نظر ما قابلیت شارش داشته باشد با اعمال کوچکترین تنش، جاری می‌شود. در این صورت کرنش به صورت $\gamma = \gamma(t)$ ، تابعی از زمان است. جریان تولید شده در شاره، بصورت زیر است:

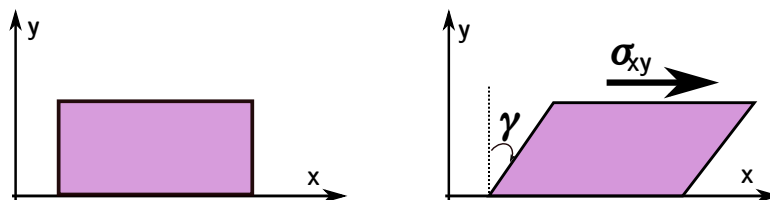
$$u_x = \dot{\gamma}y, \quad u_y = 0. \quad (3.10)$$

اگر این شاره نیوتنی باشد، رابطه‌ی خطی زیر بین تنش و نرخ کرنش برقرار است:

$$\sigma_{xy} = \eta \dot{\gamma}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zy} = 0, \quad (4.10)$$

که در آن ضریب ثابت η ، معرف و شکسانی سامانه است. و شکسانی در مورد شاره‌های نیوتنی، کمیتی ثابت است. علاوه بر ثابت بودن و شکسانی، به سبب همسانگرد بودن شاره‌های نیوتنی، تمامی عناصر قطری تانسور تنش با هم برابرند. پیش از این فشار را بصورت زیر تعریف کردیم:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P. \quad (5.10)$$



شکل ۲.۱۰ تغییر شکل یک قطعه‌ی کوچک از سامانه با اعمال نیروی برشی. مقدار تغییر شکل با زاویه‌ی γ مشخص می‌شود. به این زاویه کرنش می‌گوییم.

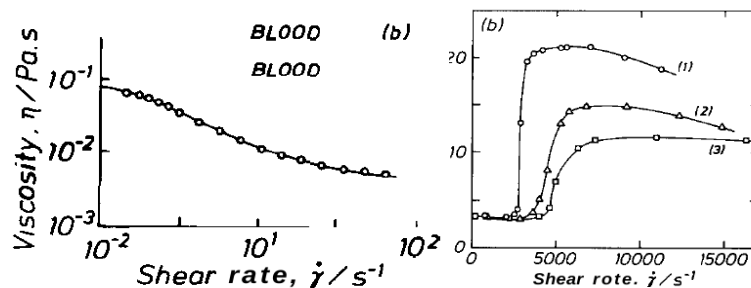
پس از بررسی سامانه‌های نیوتنی، اجازه دهید به نتیجه‌ی آزمایش تنش برشی در شارهای نانیوتنی بپردازیم. اشاره کردیم که در شارهای نانیوتنی علاوه بر غیرخطی شدن تانسور تنش بر حسب نرخ برش، مؤلفه‌های عمودی آن نیز ناهمسانگرد می‌شوند. نتایج تجربی آزمایش شکل ۳.۱۰ برای یک شارهای نانیوتنی با روابط پدیده‌شناختی زیر توصیف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}, & \sigma_{xz} = \sigma_{zy} &= 0, \\ \sigma_{xx} - \sigma_{yy} &= N_1(\dot{\gamma}), & \sigma_{yy} - \sigma_{zz} &= N_2(\dot{\gamma}).\end{aligned}\quad (6.10)$$

سه تابع $\eta(\dot{\gamma})$ ، $N_1(\dot{\gamma})$ و $N_2(\dot{\gamma})$ پاسخ یک شارهای نانیوتنی به برش خارجی را نشان می‌دهند. وشکسانی تابعی از نرخ برش است. رفتار این تابع برای شارهای مختلف، متفاوت است. در برخی شارها مثل سس گوجه، با افزایش نرخ برش وشکسانی کم می‌شود. به این مواد، شارهای برش-روان گفته می‌شود. برای محلول نشاسته‌ی ذرت با آب، با افزایش نرخ برش، وشکسانی بیشتر می‌شود. به این مواد، شارهای برش-وشکسان می‌گوییم. اطلاعات مربوط به ناهمسانگردی در توابع N_1 و N_2 است. اجازه دهید با جزئیات به یک پدیده‌ی مهم، که نتیجه‌ای از ناهمسانگرد بودن شار است بپردازیم.

۳.۱۰ شارش وشکسان-کشسان

در برخی از شارها، علاوه بر غیر خطی شدن رابطه‌ی تنش، رفتار نانیوتنی نمود دیگری نیز پیدا می‌کند. عسل را در نظر بگیرید. سعی کنید با یک قاشق ضربه‌ای کوچک ولی بسیار سریع به



شکل ۳.۱۰ رفتار تجربی وشکسانی برای دو نمونه شاره‌ی نانیوتنی مختلف. سمت چپ خون که یک شاره‌ی نانیوتنی برش-روان است را نشان می‌دهد. سمت راست یک شاره‌ی برش-وشکسان را نشان می‌دهد (سوخت هواپیمای جت که یک شاره‌ی پلیمر است). منحنی‌ها از مرجع [۱۵] انتخاب شده‌اند.

عسل بزنید، چه اتفاقی می‌افتد؟ سطح عسل کمی تغییر شکل می‌دهد ولی به سرعت و بدون اینکه هیچ شارشی در آن ایجاد شود به وضعیت اول خود باز می‌گردد. در این شرایط عسل شبیه یک سامانه‌ی کشسان رفتار می‌کند. به شارش‌هایی شبیه حرکت عسل، که در آنها رفتار کشسانی نیز دیده می‌شود، شارش‌های وشکسان-کشسان گفته می‌شود. بدیهی است که این رفتار به شرایط آزمایش و اندازه‌ی تنش یا نرخ برشی اعمال شده بستگی دارد. نمی‌توان گفت که ماده‌ای دارای این خاصیت است، بهتر است گفته شود شارشی به‌صورت وشکسان-کشسان رفتار می‌کند. در ادامه نشان می‌دهیم که رفتار وشکسان-کشسان می‌تواند در رژیم خطی یا غیر خطی مطالعه شود. تصویر ریزمقیاسی که پیش از این برای شاره‌های نانیوتنی ارائه شد را در نظر بگیرید. توضیح دادیم که ناهمسانگردی ریزمقیاس باعث رفتار نانیوتنی می‌شود. برای شاره‌هایی که ناهمسانگردی ریزمقیاس مولکولی در نتیجه‌ی اعمال تنش خارجی ایجاد می‌شود، آیا این ناهمسانگرد شدن به‌صورت آنی است؟ ناهمسانگرد شدن مولکولی (کشیده شدن پلیمرهای مچاله شده) با سرعتی مشخص رخ می‌دهد. زمان مشخصه‌ی واهلش مولکولی τ ، معیاری از سرعت پاسخ‌دهی مولکول‌ها به برش خارجی است. در صورتی که زمان مشخصه‌ی نیروهای برشی یعنی γ^{-1} در مقایسه با زمان واهلش مولکولی خیلی بزرگتر باشد ($\gamma^{-1} > \tau$)، مولکول‌ها فرصت اینکه ناهمسانگرد شوند را پیدا نمی‌کنند. ولی اگر آهنگ برش خارجی آنقدر بزرگ باشد که زمان مشخصه‌ی مربوطه از زمان واهلش مولکولی خیلی کوچک‌تر باشد ($\gamma^{-1} < \tau$)، مولکول‌ها

فرصت پاسخ‌دهی را دارند. این گونه شارش‌ها علاوه بر خاصیت وشکسانی خاصیت کشسانی را هم دارا هستند. مثلاً در مورد آب خالص، زمان واهلش مولکولهای آب، یعنی زمان لازم برای اینکه تغییرات ساختاری درون مولکولی رخ دهد از مرتبه‌ی $10^{-12} s$ است. پس در مورد آب انتظار داریم اگر نیروهایی با فرکانس بزرگتر از $10^{12} Hz$ اعمال کنیم، اثرهای کشسانی را ببینیم. فیلم‌برداری از پدیده‌های شارشی آب که با سرعت‌های بسیار بالا انجام می‌شوند، به خوبی رفتار کشسانی آب را نشان می‌دهند.

از عدد بدون بعد De برای مشخص کردن رفتار شارشی یک سامانه استفاده می‌شود. عدد De نسبت زمان مشخصه‌ای که سامانه در آن زمان به نیروهای خارجی پاسخ می‌دهد به زمان مشخصه‌ی آزمایش یا زمان مشاهده است. برای $1 \ll De$ سیستم رفتار شارشی نشان می‌دهد ولی برای $1 \gg De$ سامانه رفتار کشسانی غالب است. در رژیم $1 \sim De$ می‌توان شاهد رقابت بین هر دو اثر وشکسانی یا کشسانی بود.

۱.۳.۱۰ مدل‌های خطی

ساده‌ترین مدل‌هایی که برای بررسی شارش‌های وشکسان-کشسان ارایه شده، مدل‌هایی خطی هستند. در این مدل‌ها فرض می‌شود که تغییرات فضایی میدان شارش تحت تاثیر اثرهای غیرنیوتنی نیستند و کلی‌ترین رابطه‌ی خطی که بین تنش و برش می‌توان برقرار کرد، به صورت زیر پیشنهاد می‌شود:

$$\left(1 + a_1 \frac{d}{dt} + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + \dots\right) \sigma = \left(b_1 + b_2 \frac{d}{dt} + b_3 \frac{d^2}{dt^2} + \dots\right) \gamma, \quad (7.10)$$

که در آن a_n و b_n ضرایب پدیده‌شناختی هستند.

مدل کلونین-وُیت، حالت خاصی از رابطه‌ی بالاست و یکی از ساده‌ترین مدل‌های پدیده‌شناختی است که قادر است رفتار شارهای وشکسان-کشسان را در برخی سامانه‌ها توصیف کند. در این مدل فرض می‌شود که رابطه‌ی ساده‌ی زیر بین تنش و نرخ برش برقرار است:

$$\sigma = G\gamma + \eta\dot{\gamma} = G(\gamma + \tau_r\dot{\gamma}), \quad (8.10)$$

که در آن η و G دو ضریب پدیده‌شناختی هستند که به ترتیب وشکسانی و کشسانی شارش

وشکسان- کشسان را نشان می‌دهند. به این شارش علاوه بر وشکسانی، کشسانی نیز نسبت داده می‌شود. برای درک مفهوم زمان $\tau_r = \eta/G$ فرض کنید نیروی خارجی ثابتی که بصورت آنی روشن می‌شود را به سیستم بالا اعمال کنیم: در این صورت $\sigma(t) = \sigma\Theta(t)$ و می‌توان دید که جواب معادله‌ی بالا برای برش (کرنش) به صورت زیر می‌شود:

$$\gamma(t) = \frac{\sigma}{G} (1 - e^{-t/\tau_r}),$$

پس زمان تاخیری $\tau_r = \eta/G$ ، زمانی را نشان می‌دهد که طول می‌کشد تا سیستم در پاسخ به نیروی خارجی تغییر شکل دهد.

برای بررسی نحوه‌ی پاسخ این سامانه به نیروی خارجی نوسانی، فرض کنید که یک برش نوسانی بصورت عمومی $\gamma(t) = \int d\omega \gamma(\omega) e^{-i\omega t}$ به آن اعمال می‌کنیم. در این صورت می‌توانیم تنش را بصورت $\sigma(t) = \int d\omega \sigma(\omega) e^{-i\omega t}$ بنویسیم. اکنون تابع پاسخ مختلط سامانه به صورت $\sigma(\omega) = \tilde{G}(\omega) \gamma(\omega)$ تعریف می‌شود و برابر است با:

$$\tilde{G}(\omega) = G(1 - i\omega\tau_r). \quad (9.10)$$

از رابطه‌ی بالا دیده می‌شود که برای $\omega\tau_r \ll 1$ رفتار کشسانی غالب است. مدل ماکسول یکی دیگر از مدل‌های ساده و حالت خاصی از سیستم‌های خطی است. در مدل ماکسول رابطه‌ی به صورت زیر بین تنش و نرخ کرنش فرض می‌شود:

$$\sigma + \tau \dot{\sigma} = \eta \dot{\gamma}. \quad (10.10)$$

می‌توان به سهولت نشان داد اگر نرخ برش در زمان $-\infty$ متناهی باشد، حل معادله‌ی بالا به صورت زیر است:

$$\sigma(t) = \frac{\eta}{\tau} \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tau} \dot{\gamma}(t') dt',$$

تعبیر رابطه‌ی بالا ساده است. تنش در لحظه‌ی حاضر به تاریخچه‌ی قبلی نرخ برش تا حداکثر τ ثانیه قبل وابسته است. در واقع τ زمان حافظه سامانه است. تعبیر زمان واهلش هم مفید است. فرض کنید به صورت آنی نرخ برش خارجی ثابتی به سامانه اعمال کنیم. در این صورت

$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}\Theta(t)$ و جواب معادله‌ی دیفرانسیل به صورت زیر است:

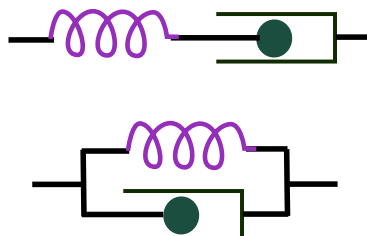
$$\sigma(t) = \eta\dot{\gamma} \left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

پس τ زمان واهلشی است که طول می‌کشد تا تنش در سیستم به میزان نهایی خود برسد. مطالعه‌ی رفتار سیستم به نیروی نوسانی هم آموخته شده است. در این مورد می‌توان دید که تابع پاسخ سیستم به صورت زیر می‌شود:

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{-i\omega\tau}{1 - i\omega\tau}. \quad (11.10)$$

از رابطه‌ی بالا دیده می‌شود که برای $\omega\tau \ll 1$ رفتار وشکسانی غالب است و برای حد $\omega\tau \gg 1$ رفتار کشسانی غلبه می‌کند. در واقع چون τ زمان واهلش است، پس برای آزمایش‌های سریع رفتار کشسان و برای آزمایش‌هایی که به آهستگی انجام می‌شوند رفتار وشکسانی دیده می‌شود. برای درک بهتر مدل‌های بالا، از معادل‌سازی مکانیکی براساس ترکیبی از دو قطعه‌ی ساده مکانیکی کمک می‌گیریم. یک قطعه‌ی کشسان (مثلاً یک فنر ساده) و یک قطعه‌ی وشکسان (مثلاً یک توپ صلب درون شاره‌ی ویسکوز) را در نظر بگیرید. قطعه‌ی کشسان با رابطه‌ی خطی بین نیرو و جابجایی بصورت $\sigma = G\gamma$ یا بصورت کاملاً معادل با $\dot{\sigma} = G\dot{\gamma}$ مشخص می‌شود و قطعه‌ی وشکسان با رابطه‌ی $\sigma = \eta\dot{\gamma}$ مشخص می‌شود. در مدل ماکسول جابجایی کل از ترکیب جابجایی‌های جزیی مربوط به قطعات بدست می‌آید. بنابراین، آن‌چنان که در شکل ۴.۱۰ (بالا) نشان داده شده است، یک مدار سری می‌تواند شبیه‌ساز این سیستم باشد. در مدل کلونین-ویت، نیروی کل از جمع نیروها بدست می‌آید، در نتیجه مطابق شکل ۴.۱۰ (پایین) یک مدار موازی را می‌توانیم جایگزین آن کنیم.

یک تفاوت اساسی بین مدل‌های ماکسول و کلونین-ویت وجود دارد که از معادل‌سازی معرفی شده در بالا به راحتی قابل فهم است. در واقع رفتار این مدل‌ها در زمان‌های بسیار بلند کاملاً متمایز است. در زمان‌های بسیار طولانی، مدل ماکسول بصورت یک شاره‌ی ویسکوز و مدل کلونین-ویت بصورت یک فنر کشسان رفتار می‌کنند. این نتیجه از معادلات حرکت هم قابل فهم است. در زمان‌های خیلی طولانی، در مدل ماکسول $t \gg \tau_F$ است و می‌توانیم از جمله‌ی تاخیری صرف‌نظر کنیم. در این حد رفتار کشسانی غالب می‌شود. در مورد مدل ماکسول و در حد $t \gg \tau$ جمله‌ی واهلشی قابل صرف‌نظر کردن است و رفتار شارشی غلبه می‌کند.



شکل ۴.۱۰ معادل‌های مکانیکی برای شبیه‌سازی رابط‌های نیرو-جابجایی در مدل ماکسول (تصویر بالا) و مدل کلون-ویت (تصویر پایین) نشان داده شده‌اند. این مدل‌ها از اتصال سری و موازی یک فنر کشسان و یک قسمت ویسکوز با قطعات مکانیکی صلب بدست می‌آیند. در مدل ماکسول، جابجایی کل از تجمع جابجایی‌های مربوط به دو عنصر کشسان و وشکسان و در مدل کلون-ویت، نیروی کل از تجمع نیروهای جزیی مربوطه بدست می‌آید. در زمان‌های بسیار بزرگ، در مدار سری فنر نقشی ندارد. در مدار موازی و در زمان‌های بسیار طولانی، قطعه‌ی وشکسان نقشی ندارد و رفتار سیستم با غلبه‌ی فنر مشخص می‌شود.

۲.۳.۱۰ مدل‌های غیرخطی

در مدل‌هایی که در قسمت پیشین معرفی شدند فرض شده بود که رفتار نانیوتنی در تغییرات فضایی میدان سرعت نقشی ندارد. می‌خواهیم این فرض را کنار گذاشته و حالت عمومی‌تری را در نظر بگیریم. در واقع در پی روابط ساختاری هستیم که تانسور تنش را در هر نقطه‌ی درون شاره بر حسب گرادیان میدان سرعت بدهد. اگر بخواهیم رابطه‌ی ۷.۱۰ را به حالت عمومی‌تر گسترش دهیم، مولفه‌ی غیر قطری تنش که در این رابط بود را با تانسور تنش و نرخ برش را با تانسور گرادیان سرعت (قسمت متقارن آن) جایگزین می‌کنیم. البته مشتقات زمانی $\frac{d}{dt}$ را با مشتقات زمانی از دید ناظر همراه شاره $\frac{D}{Dt}$ جایگزین می‌کنیم. در قسمت بعدی جزییات بیشتر مشتق زمانی از دید ناظر همراه شاره را بیان می‌کنیم. پس رابطه‌ی ساختاری پدیده شناختی که خواص تقارنی و ناوردایی را برآورده می‌کند به صورت زیر می‌شود:

$$(12.10) \quad \left(1 + \alpha_1 \frac{D}{Dt} + \alpha_2 \frac{D^2}{Dt^2} + \dots \right) \sigma = \left(\beta_1 + \beta_2 \frac{D}{Dt} + \beta_3 \frac{D^2}{Dt^2} + \dots \right) \Gamma,$$

که در آن $\Gamma = (1/2)(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ قسمت متقارن نرخ برش است. واضح است که روابط ساختاری به صورت بالا، در ساده‌ترین شکل ممکن هم به صورت غیر خطی می‌شوند.

مطالعه‌ی پاسخ شاره‌ای که از روابطی به صورت بالا پیروی می‌کند را تا قسمت‌های بعدی به تاخیر می‌اندازیم. در قسمت‌های بعدی نشان می‌دهیم که با یک مدل ریزمقیاس خیلی ساده می‌توان به رابطه‌ی ساختاری رسید که حالت خاصی از رابطه‌ی عمومی بالا است.

در بحث‌های بالا تعداد زیادی روابط ساختاری (خطی و غیرخطی) معرفی شدند. هر کدام از این روابط محدوده‌ی صحت مخصوص به خود را دارند. آزمایش و نوع شاره‌ی پیچیده‌ای که با آن کار می‌کنیم، مشخص کننده‌ی نوع رابطه‌ی ساختاری خواهند بود که در تحلیل آن آزمایش مفید هستند. بیشتر شاره‌های پلیمری از روابط ساختاری مشابه روابط بالا پیروی می‌کنند. نوع پلیمرهای موجود، تقارن‌های آنها و غلظتشان از موارد تعیین کننده در نوع رابطه‌ی ساختاری هستند.

دستگاه همراه شاره

می‌خواهیم در مورد تغییرات از دید ناظری که همراه شاره است و با سرعت و چرخش موضعی آن حرکت می‌کند، بحث کنیم. پیش از این نشان دادیم از دید ناظری که همراه شاره حرکت خطی دارد، تغییرات زمانی به صورت ساده‌ی $\partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ محاسبه می‌شود. این رابطه برای محاسبه‌ی تغییرات زمانی بردارها از دید ناظر همراه شاره کفایت می‌کند. در مورد محاسبه‌ی تغییرات زمانی یک تانسور مرتبه‌ی ۲ از دید ناظر متحرک پیچیدگی‌های دیگری نیز به رابطه‌ی بالا افزوده می‌شود. برای این منظور ابتدا توجه کنید که قسمت‌های متقارن و پادمتقارن تانسور نرخ برش را با Γ و Ω نشان می‌دهیم. در واقع ماتریس دوران که به صورت $\Omega = (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T)/2$ تعریف می‌شود در ارتباط با بردار سرعت زاویه‌ای $\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega_k$ است.

برای محاسبه‌ی تغییرات زمانی از دید ناظر همراه شاره، ابتدا فرض کنید که نرخ برش به گونه‌ای است که تنها قسمت پادمتقارن دارد و قسمت متقارن آن صفر است. در ادامه اثر قسمت متقارن را هم می‌افزاییم. پس می‌خواهیم ببینیم از دید ناظر همراه شاره که اکنون ناظری است چرخان، تغییرات چگونه است. از این واقعیت شروع کنیم که بردار مکان تحت دوران کوچکی که در زمان δt رخ می‌دهد، به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (I + \delta t \Omega) \mathbf{r}.$$

یک تانسور به رتبه‌ی ۲ تحت دوران به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\mathbf{M} \rightarrow (I + \delta t \Omega) \mathbf{M} (I + \delta t \Omega^T) = \mathbf{M} + \delta t [\Omega, \mathbf{M}] + \mathcal{O}(\delta t^2),$$

پس مشتق زمانی هر تانسور مرتبه‌ی دوم از دید ناظر همراه شاره با افزودن چرخش به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{M} = (\partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)) \mathbf{M} + [\Omega, \mathbf{M}],$$

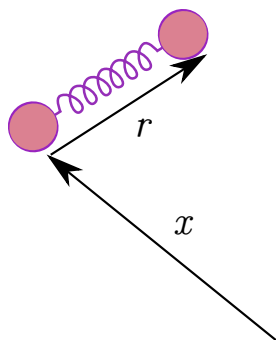
که در آن جابجایی دو ماتریس به صورت $[\Omega, \mathbf{M}] = \Omega \mathbf{M} - \mathbf{M} \Omega$ تعریف شده است. اکنون سهم جمله‌ی متقارن در نرخ برش را هم اضافه می‌کنیم. می‌توان نشان داد که وجود Γ ، رابطه‌ی بالا را به صورت زیر تغییر می‌دهد:

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{M} = (\partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)) \mathbf{M} + [\Omega, \mathbf{M}] \pm \{\Gamma, \mathbf{M}\},$$

که در آن $\{A, B\} = AB + BA$ نماد پادجابجایی است و سهم ناشی از قسمت متقارن تانسور نرخ برش در محاسبه‌ی مشتق زمانی تانسورهای هموردا و پادوردا با علامت‌های $\pm$ مشخص شده‌اند.

۴.۱۰ مدل ریزمقیاس

در قسمت‌های پیشین اشاره کردیم که رفتار یک شاره‌ی نانیوتنی از ناهمسانگردی ساختار ریزمقیاس آن نتیجه می‌شود. در این قسمت شرح می‌دهیم که چگونه با یک مدل بسیار ساده‌ی ریزمقیاس می‌توان برخی از خصوصیات پدیده‌شناختی شاره‌های پلیمری را بدست آورد. یک محلول پلیمری، نمونه‌ای از یک سامانه نانیوتنی است. در یک محلول پلیمری رقیق، مولکولهای پلیمر درون یک شاره‌ی نیوتنی مانند آب حل شده‌اند. محلول آب و نشاسته، خون و سفیده‌ی تخم مرغ، نمونه‌هایی از شاره‌های پیچیده با خواص نانیوتنی هستند. خون یک محلول کلوییدی است. گلبول‌های خون با ساختار ناهمسانگرد و کشسان در پاسخ به شارش ایجاد شده در خون، تغییر شکل می‌دهند. از آنجا که ما می‌خواهیم با ساده‌ترین مدل، بیشترین اطلاعات را به دست آوریم، اجازه دهید یک مدل ریزمقیاس ساده شده را بررسی کنیم. فرض کنید یک محلول بسیار رقیق پلیمری داریم



شکل ۵.۱۰ برای محاسبه‌ی تنش اضافی که توسط یک پلیمر به شاره وارد می‌شود، از یک مدل ریز مقیاس ساده استفاده می‌کنیم. در این مدل، ساختار درونی هر پلیمر بصورت دو گلوله که با یک فنر به هم متصل شده‌اند، در نظر گرفته می‌شود.

که تعداد پلیمرها در واحد حجم با N ، مشخص می‌شود. هر پلیمر به سبب برهمکنش‌های بین مولکولی و نیروهای تصادفی که از جانب مولکولهای شاره دریافت می‌کند، به صورت متوسط یک کره‌ی کوچک به اندازه‌ی l را اشغال می‌کند. فاصله‌ی متوسط بین دو پلیمر مجاور در این محلول رقیق، تقریباً برابر با $N^{-\frac{1}{3}}$ می‌شود. در شرایطی که $l \ll N^{-\frac{1}{3}}$ ، می‌توانیم از برهمکنش بین پلیمرهای مجاور صرف‌نظر کنیم. در این صورت برای محاسبه‌ی نیرویی که از جانب پلیمرها بر شاره وارد می‌شود، کافیت محاسبات را برای یک پلیمر تنها انجام داده و نتیجه‌ی نهایی را در تعداد پلیمرها ضرب کنیم.

برای محاسبه‌ی نیروی اضافی که از طرف یک پلیمر به شاره وارد می‌شود، باید اطلاعات ساختاری بیشتری از پلیمر را در نظر بگیریم. مطابق شکل ۵.۱۰، هر پلیمر را بصورت دو گلوله به شعاع a که توسط فنری با کشسانی k به هم متصل شده‌اند، در نظر می‌گیریم. در عمل، پلیمرها بسیار پیچیده‌تر از مدل دو گلوله‌ای هستند ولی با این مدل ساده، دو خصوصیت اصلی پلیمرها یعنی ناهمسانگردی و کشسانی آنها در ساده‌ترین شکل ممکن در نظر گرفته شده است. اگر طول تعادلی فنر را بسیار کوچک و برابر با صفر انتخاب کنیم، در این صورت: $l \sim 4a$. هدف ما بررسی تنش اضافی است که توسط این پلیمر به شاره وارد می‌شود.

فرض کنید میدان سرعت شاره با میدان $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ مشخص شود. در این صورت اگر این کره‌ها در راستاهای مختلف حرکت کنند، فنر بین آنها کشیده می‌شود. فنر کشیده شده از طریق کره‌ها به

شاره نیرو وارد خواهد کرد. برای بررسی حرکت کره‌ها، اجازه دهید باز هم مساله را ساده‌تر کنیم. به هر کره متناسب با سرعتِ نسبی آن کره نسبت به سرعت شاره دقیقاً در محل آن کره، نیروی استوکس وارد می‌شود. برای دو کره که با سرعت‌های $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ نسبت به دستگاه آزمایشگاه حرکت می‌کنند، داریم:

$$\begin{aligned}\epsilon\pi\eta a(\mathbf{V}_1 - \mathbf{u}(\mathbf{x})) &= k\mathbf{r}, \\ \epsilon\pi\eta a(\mathbf{V}_2 - \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r})) &= -k\mathbf{r},\end{aligned}\quad (۱۳.۱۰)$$

که در آن $\mathbf{x}$ مکان گلوله‌ی اول و $\mathbf{r}$ بردار واصل دو گلوله به یکدیگر است. روابط بالا را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\epsilon\pi\eta a(\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 - \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) + \mathbf{u}(\mathbf{x})) = -2k\mathbf{r}, \quad (۱۴.۱۰)$$

با توجه به اینکه $\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = \frac{d}{dt}\mathbf{r}$ ، معادله‌ی تحوّل‌ی مختصه‌ی نسبی بصورت ساده شده‌ی زیر در می‌آید:

$$\epsilon\pi\eta a \frac{d}{dt}\mathbf{r} = -2k\mathbf{r} + \epsilon\pi\eta a(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (۱۵.۱۰)$$

دقت کنید که معادله‌ی حرکت بالا برای فنی با کشیدگی بسیار کم و از بسط تیلور به‌دست آمده است. نکته‌ی بسیار مهمی که باید به آن توجه کرد، پیچیدگی این معادله‌ی حرکت است. در واقع معادله‌ی تحوّل‌ی این فنی، با میدان سرعت شاره جفت شده است. از آنجا که پلیمر علاوه بر نیروی اصطکاک شاره، یک نیروی تصادفی ناشی از برخورهای پی‌درپی مولکول‌های شاره را نیز احساس می‌کند، معادله‌ی حرکت بالا را با افزودن نیروی تصادفی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = -\frac{1}{2\tau}\mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \left(\frac{1}{\epsilon\pi\eta a}\right)\mathbf{f}(t), \quad (۱۶.۱۰)$$

که در آن $\tau = \epsilon\pi\eta a/4k$ ، زمان مشخصه‌ی سامانه است. متوسط نیروی تصادفی $\mathbf{f}(t)$ ، صفر و همبستگی آن مطابق رابطه‌ی ۷.۸، به دما و ضریب اصطکاک بستگی دارد:

$$\langle f_i(t)f_j(t') \rangle = 2 \times 2\xi k_B T \delta_{ij} \delta(t - t'),$$

ضریب اضافی ۲ به این سبب است که نیروی تصادفی وارد شده به مختصه‌ی نصبی از تفاضل دو نیروی تصادفی وارد شده به مونومرها به دست می‌آید. اکنون و برای استفاده در قسمت‌های بعدی، معادله‌ی تحول مختصات درونی پلیمر را بصورت گسسته می‌نویسیم. فرض کنید که Δt ، یک زمان بی‌نهایت کوچک باشد. برای گسسته‌سازی معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی مختصه‌ی نسبی، ابتدا نشان می‌دهیم که:

$$\gamma_{mi} = \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} f_i(t') dt',$$

یک عدد تصادفی با تابع توزیع گاوسی است. در این رابطه m یک عدد صحیح و مشخص کننده‌ی گام‌های گسسته‌سازی و i نشان دهنده‌ی مؤلفه‌های دکارتی هستند. برای اثبات، کافیت از خواص آماری نیروی تصادفی $f_i(t)$ ، استفاده کرده و نشان دهیم:

$$\langle \gamma_{mi} \gamma_{nj} \rangle = \xi k_B T \Delta t \delta_{mn} \delta_{ij}.$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی بالا و تغییر متغیر $\gamma_{mi} = \sqrt{\xi k_B T \Delta t} \Gamma_{mi}$ ، به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta t \left(-\frac{\mathbf{r}}{\tau} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \sqrt{\frac{\xi k_B T}{6\pi\eta a} \Delta t} \boldsymbol{\Gamma}_t, \quad (17.10)$$

که در آن $\boldsymbol{\Gamma}_t = (\Gamma_{t1}, \Gamma_{t2}, \Gamma_{t3})$ و اعداد تصادفی Γ_{ti} ، دارای متوسط صفر و مقدار انحراف از معیار آنها از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\langle \Gamma_{ti} \Gamma_{t'j} \rangle = \delta_{ij} \delta_{tt'}.$$

برای به‌دست آوردن رابطه‌ی ۱۷.۱۰، از طرفین رابطه‌ی ۱۶.۱۰، از t تا $t + \Delta t$ انتگرال گرفته‌ایم. در قسمت‌های بعدی از شکل گسسته‌ی معادله‌ی تحولی پلیمر استفاده خواهیم کرد.

تنش ناشی از پلیمرها

پلیمرها چه تنشی به شاره وارد می‌کنند؟ برای پاسخ به این سؤال یک پلیمر تنها که توسط دو گلوله و یک فنر مدل سازی شده است را در نظر بگیرید [۲۱، ۲۲]. اگر کشیدگی پلیمر را با بردار

مختصات نسبی دو گلوله، یعنی $\mathbf{r}$ نشان دهیم، واضح است که این پلیمر نیروی خالصی به شاره وارد نمی‌کند، در واقع هر کدام از مونومرهای این پلیمر، نیروهایی به اندازه‌ی $k\mathbf{r}$ و $-k\mathbf{r}$ به شاره وارد می‌کنند. توزیع نیروی وارد شده به صورت دوقطبی نیرو و با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \sigma^P = \mathcal{N}k\mathbf{r} (\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \delta(\mathbf{x})),$$

با بسط رابطه‌ی بالا برای کشیدگی‌ها کم فتر، سهم پلیمرها در تانسور تنش بصورت زیر می‌شود:

$$\sigma^P = \mathcal{N}k\mathbf{r}\mathbf{r}. \quad (۱۸.۱۰)$$

دقت کنید که سهم تنش ناشی از پلیمرها، به میدان سرعت شاره نیز بستگی دارد. درواقع وابستگی تنش پلیمرها به سرعت، از همبسته بودن بردار مکان نسبی گلوله‌ها به میدان سرعت نتیجه می‌شود.

معادلات تحول تنش پلیمرها

از بحث‌های بالا متوجه شده‌اید که بیشترین پیچیدگی مسأله از همبسته بودن میدان سرعت شاره و تحول درونی پلیمرها ناشی می‌شود. در این قسمت نشان می‌دهیم که همبسته بودن بردار نسبی هر پلیمر با میدان سرعت شاره چگونه ما را به دسته‌ای از معادلات دیفرانسیلی برای تانسور تنش پلیمرها می‌رساند. بردار مکان نسبی دو گلوله، از طریق میدان سرعت به مکان پلیمر و زمان بستگی دارد، پس:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x}, t).$$

تحول زمانی تانسور تنش برای زمان بسیار کوچک Δt را در نظر بگیرید:

$$\Delta \sigma^P = \sigma^P(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \Delta t) - \sigma^P(\mathbf{x}, t) = \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \sigma^P. \quad (۱۹.۱۰)$$

از طرف دیگر با استفاده از شکل صریح تانسور تنش پلیمرها، می‌توانیم تغییرات را بصورت زیر محاسبه کنیم:

$$\Delta \sigma^P = \mathcal{N}k (\mathbf{r}\mathbf{r} + \mathbf{r}d\mathbf{r} + d\mathbf{r}\mathbf{r} + d\mathbf{r}d\mathbf{r}) - \mathcal{N}k (\mathbf{r}\mathbf{r}). \quad (۲۰.۱۰)$$

با استفاده از معادله‌ی ۱۷.۱۰، و جانشانی در رابطه‌ی ۲۰.۱۰، به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\Delta\sigma^P = \Delta t \mathcal{N}k \left(-\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{\tau} + \mathbf{r}\mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u}\mathbf{r} + \frac{\mathcal{F}k_B T}{\varepsilon\pi\eta a} \Gamma_t \Gamma_t \right), \quad (21.10)$$

اکنون با محاسبه‌ی مقادیر متوسط رابطه‌ی بالا و مقایسه با رابطه‌ی ۱۹.۱۰، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \sigma^P - \sigma^P \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T \cdot \sigma^P = -\frac{1}{\tau} (\sigma^P - \mathcal{N}k_B T I), \quad (22.10)$$

که در آن I ، ماترسی واحد و $\nabla \mathbf{u}^T$ ترانهاده‌ی ماتریس $\nabla \mathbf{u}$ است. این معادله، تحول قسمتی از تانسور تنش که از پلیمرها ناشی شده است را به دست می‌دهد.

معادلات تحول شار

اکنون می‌توانیم تمامی معادلات لازم برای توصیف شارهای پلیمری را بازنویسی کنیم. معادلات ناویه-استوکس به همراه تنش اضافی ناشی از پلیمرها و معادلات تحول این تنش اضافی، دسته‌ی معادلات اساسی توصیف کننده‌ی سامانه را تشکیل می‌دهند. برای ساده شدن معادلات اجازه دهید تانسور جدیدی بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\Sigma = \frac{1}{\mathcal{N}k_B T} \sigma^P.$$

با این تعریف، معادلات اساسی تحول شار بصورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} &= \nabla \cdot \sigma, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \Sigma - \Sigma \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T \cdot \Sigma &= -\frac{1}{\tau} (\Sigma - I), \end{aligned} \quad (23.10)$$

که در آن تانسور تنش، از ترکیب سهم تنش نیوتنی شارهای اولیه و تنش مربوط به پلیمرها به دست می‌آید:

$$\sigma = -PI + \eta(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + g\Sigma,$$

در اینجا $g = \mathcal{N}k_B T$ ، یک عدد ثابت و به دمای محیط و چگالی پلیمرها بستگی دارد. مدل

ریز مقیاس معرفی شده در این قسمت به مدل آلدروید معروف است [۳۷، ۱۳]. در قسمت بعدی پاسخ یک شارهای پلیمری که از معادلات بالا تبعیت می‌کند را بررسی می‌کنیم.

مدل اولدروید

معادلات عمومی شارهای پلیمری را به صورت دیگری بازنویسی می‌کنیم. مشتق همرفتی هر تانسور مرتبه‌ی دو (هموردا) دلخواه را بصورت $\frac{D}{Dt}M = (\partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla))M - M \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T \cdot M$ بدست آورده بودیم. همچنین تانسور تنش جدیدی را به صورت $\bar{\sigma} = \sigma - (g - P)I$ تعریف می‌کنیم. به سهولت می‌توان نشان داد که معادله‌ی دینامیکی تعیین کننده تانسور تنش به صورت زیر می‌شود:

$$\left(1 + \tau \frac{D}{Dt}\right) \bar{\sigma} = \eta_e \left(1 + \tau_r \frac{D}{Dt}\right) \Gamma, \quad (24.10)$$

که در آن $\eta_e = (\eta + \tau g)$ و $\tau_r = (\eta/\eta_e)\tau$. در بدست آوردن رابطه‌ی بالا از این واقعیت استفاده شده است که: $\frac{D}{Dt}I = -\Gamma$. به تشابه این رابطه‌ی ساختاری با رابطه‌ی عمومی ۱۲.۱۰ توجه کنید. در واقع رابطه‌ی بالا، حالت خاصی از رابطه‌ی عمومی قبلی است. اینجا توجه کنید که τ_r زمان تاخیری است. در ادامه نشان خواهیم داد که η_e و شکسانی موثر سامانه است. معادله‌ی دینامیکی بالا تعبیر ساده‌ای دارد. در حالتی که کشسانی نداریم ($\tau = 0$)، هیچ تاخیری هم نداریم ($\tau_r \rightarrow 0$) و در نتیجه رابطه‌ی ساده‌ی شارهای نیوتنی را به صورت $\bar{\sigma} = \eta \Gamma$ بدست می‌آوریم. اگر فرض کنیم زمان تاخیری صفر است، رابطه‌ی بالا عملاً اطلاعات مدل پدیده‌شناختی کلون-ویت را دارد. چون قسمت کشسانی تنش به صورت $\sigma_e/G \sim \gamma$ بود، در نتیجه: $\dot{\sigma}_e/G \sim \dot{\gamma}$ و قسمت ویسکوز تنش هم با نرخ برش بصورت $\sigma_v/\eta \sim \dot{\gamma}$ متناسب است. در مدل کلون-ویت فرض می‌شود که نرخ برش کل، مجموع این دو سهم است، یعنی $(1 + \frac{\eta}{G} \frac{d}{dt})\sigma = \eta \dot{\gamma}$. در واقع، مدل اولدروید در حالت تاخیر صفر، همان مدل پدیده‌شناختی کلون-ویت است با این تذکر که مشتق‌های زمانی که برای هر جز شار نوشته شده با مشتق همرفتی جایگزین شده است.

۵.۱۰ رئولوژی شاره‌ی پلیمری

شاره‌ی پلیمری که با معادلات تحول بالا توصیف می‌شود، چه پاسخی به نیروهای خارجی می‌دهد؟ یک راه ساده برای بررسی این موضوع، اعمال یک شارش برشی به آن است. یک شارش برشی ساده به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{u} = (\dot{\gamma}y, 0, 0),$$

که در آن $\dot{\gamma}$ ، نرخ برش است. اجازه دهید در دو حالت نرخ برش ثابت و نرخ برش وابسته به زمان، مسأله را بررسی کنیم.

شارش برشی پایا

فرض کنید که نرخ برش $\dot{\gamma}$ ، یک عدد ثابت باشد. جریان برشی اعمال شده در راستای $\hat{x}$ است. می‌خواهیم پاسخ یک شاره‌ی پلیمری به این شارش را بررسی کنیم. با توجه به تقارن میدان سرعت، مسأله را در صفحه‌ی $(x - y)$ بررسی می‌کنیم. با حل معادلات تحولی تنش برای پلیمرها، تانسور Σ را می‌یابیم. از آنجا که نرخ برش به زمان بستگی ندارد، پس مسأله به حالت پایا می‌رسد. اجازه دهید عناصر تانسور تنش پلیمرها را بصورت زیر در نظر بگیریم:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} \end{pmatrix}. \quad (25.10)$$

از طرف دیگر برای میدان سرعت برشی داریم:

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\gamma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{u}^T = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26.10)$$

با قرار دادن این روابط در معادله‌ی تحولی Σ (معادله‌ی آخر از ۲۳.۱۰)، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\dot{\gamma} \begin{pmatrix} 2\Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} \\ \Sigma_{yy} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} - 1 & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} - 1 \end{pmatrix}. \quad (27.10)$$

با حل معادلات بالا، عناصر تانسور تنش پلیمرها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Sigma_{xx} = 1 + 2\dot{\gamma}^2\tau^2, \quad \Sigma_{xy} = \dot{\gamma}\tau, \quad \Sigma_{yy} = 1.$$

اکنون با در دست داشتن تنش پلیمرها و میدان سرعت، می‌توانیم شکل نهایی تانسور تنش کلی را به دست آوریم:

$$\sigma = \begin{pmatrix} -P & \eta\dot{\gamma} \\ \eta\dot{\gamma} & -P \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 1 + 2\dot{\gamma}^2\tau^2 & \dot{\gamma}\tau \\ \dot{\gamma}\tau & 1 \end{pmatrix}. \quad (28.10)$$

دو نتیجه‌ی بسیار مهم در این رابطه نهفته است. اثر پلیمرها در عناصر غیر قطری تانسور تنش، بصورت یک جمله‌ی اضافی متناسب با نرخ برش است. در واقع اگر عناصر غیر قطری را بصورت یک وشکسانی مؤثر ضرب در نرخ برش در نظر بگیریم، داریم:

$$\eta_e = \eta + g\tau = \eta(1 + \epsilon).$$

شاره‌ای که حاوی پلیمرها است، به صورت مؤثر وشکسان تر است. افزایش نسبی وشکسانی برابر با $\epsilon = (3/4)\pi N k_B T a / k$ است. ناهمسانگرد شدن شار، دومین اثر مهمی است که از رابطه‌ی تنش به دست می‌آید. برای تنش به دست آمده داریم:

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 2g\dot{\gamma}^2\tau^2.$$

در بخش‌های پیشین دیدیم که این ناهمسانگردی، اثر وایزنبرگ را به دنبال دارد که در قسمت بعدی آنرا بررسی می‌کنیم.

شارش برشی تناوبی

اکنون اجازه دهید پاسخ شارهای پلیمری به یک شارش برشی تناوبی را بررسی کنیم. در این حالت نرخ برش به صورت $\dot{\gamma}(t) = a\omega \cos \omega t$ ، به زمان بستگی دارد. در اینجا a و ω به ترتیب دامنه و فرکانس حرکت نوسانی شار را مشخص می‌کنند. معادله‌ی تحولی تنش پلیمرها به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} \end{pmatrix} - \dot{\gamma}(t) \begin{pmatrix} 2\Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} \\ \Sigma_{yy} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} \Sigma_{xx} - 1 & \Sigma_{xy} \\ \Sigma_{xy} & \Sigma_{yy} - 1 \end{pmatrix},$$

با بررسی مؤلفه‌های مختلف معادله‌ی ماتریسی بالا، به معادلات دیفرانسیل زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma_{xy} - \dot{\gamma} \Sigma_{yy} = -\frac{1}{\tau} \Sigma_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Sigma_{yy} = -\frac{1}{\tau} (\Sigma_{yy} - 1), \quad (29.10)$$

جواب حالت پایای معادله‌ی دوم بصورت $\Sigma_{yy} = 1$ است. با حل معادله‌ی دیفرانسیل اول به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\Sigma_{xy} = \frac{a\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \left(\cos \omega t + \omega\tau \sin \omega t - e^{-t/\tau} \right),$$

که برای زمانهای بسیار بزرگ ($t \gg \tau$)، جمله‌ی آخر بصورت نمایی به صفر می‌رسد. اکنون با قرار دادن نتایج بالا در تانسور تنش، به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\sigma_{xy} = \left(\eta + \frac{g\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right) \dot{\gamma}(t) + \frac{g\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \gamma(t),$$

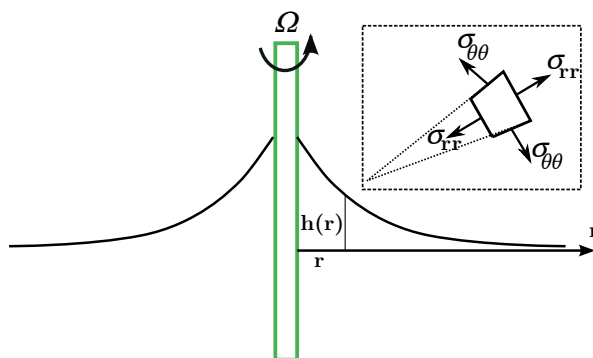
با استفاده از این رابطه، می‌توانیم قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع پاسخ را که پیش از این و در بحث مدل کلونین-ؤیت (رابطه‌ی ؟؟) معرفی شده بودند را بصورت زیر بنویسیم:

$$\tilde{G}_r = \frac{g\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}, \quad \tilde{G}_i = \eta\omega + \frac{g\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}.$$

در واقع τ ، زمان مشخصه‌ای است که ارتباط آن به جزئیات ریزمقیاس از طریق مدل ساده‌ی دوگلوله‌ای برای پلیمرها داده شده است. گرچه مدل ارائه شده در این قسمت، بسیار ساده است و بیشتر جزئیات ریزمقیاس را دربر نمی‌گیرد، ولی موفقیت‌های فراوانی دارد. ارائه‌ی توصیف ریزمقیاس برای خواص وشکسانی-کشسانی و ناهمسانگرد شدن شاره، از موفقیت‌های این مدل است.

۶.۱۰ اثر وایزنبرگ

یکی از مهم‌ترین اثرهای ناشی از برابر نبودن تنش‌های عمودی در شاره‌های نانیوتنی، صعود شاره از کنار یک میله‌ی چرخان است. این اثر اولین بار توسط وایزنبرگ مشاهده شده است [۴۸]. یک میله‌ی استوانه‌ای شکل را در نظر بگیرید که تا نیمه درون یک شاره‌ی نانیوتنی (مثل پلی‌اکریل‌آمید) فرو رفته است. اکنون میله را حول محور طولی آن می‌چرخانیم. شاره نیز همراه میله شروع به چرخیدن کرده و در راستای طولی میله به سمت بالا صعود می‌کند. این اثر کاملاً از جهت چرخش



شکل ۶.۱۰ هندسه‌ی یک میله‌ی چرخان درون یک شاره‌ی نانیوتنی. مقطع یک عنصر حجمی بی‌نهایت کوچک از شاره به همراه نیروهای وارد بر آن نشان داده شده است.

میلۀ مستقل است. مثال سطل چرخان که در بخش شاره‌های اویلری ارائه شد را به یاد آورید. برای شاره‌های نیوتنی اثر معکوس رخ می‌دهد و شاره از مرکز چرخش دور شده و به سمت دیواره‌های ظرف کشیده می‌شود. آزمایش میله‌ی چرخان درون شاره‌ی نیوتنی، با نزول شاره‌ی اطراف میله و صعود آن از دیواره‌ی ظرف همراه می‌شود.

برای ارائه‌ی یک توصیف کیفی از این پدیده به شکل ۶.۱۰ توجه کنید. با چرخش میله، شاره نیز همراه آن می‌چرخد. بعد از مدتی که سامانه به حالت پایا رسید، میدان شارش در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(r)\hat{\theta}.$$

دقت کنید که در حالت پایا، میدان سرعت شاره مؤلفه‌ای در راستای محور میله ندارد. می‌خواهیم شکل سطح آزاد شاره را در مجاورت میله به دست آوریم. برای این منظور معادلات حرکت شاره را بررسی می‌کنیم. شکل ۶.۱۰، مقطع یک عنصر بی‌نهایت کوچک حجم شاره را نشان می‌دهد. این عنصر حجم، قاچی از یک پوسته‌ی استوانه‌ی شکل به ارتفاع dz است. زاویه‌ی قاچ را برابر با $d\theta$ و ضخامت آن را برابر با dr در نظر بگیرید. اجازه دهید نیروهای وارد بر وجوه این عنصر حجم را بر حسب مؤلفه‌های تانسور تنش بنویسیم. استفاده از دستگاه استوانه‌ای برای این منظور

مناسب است. مؤلفه‌های نیروی کل وارد بر این عنصر حجم در راستاهای $\hat{r}$ و $\hat{z}$ ، عبارتند از:

$$\begin{aligned} f_r &= [(r+dr)\sigma_{rr}(r+dr)d\theta dz - r\sigma_{rr}(r)d\theta dz - \sigma_{\theta\theta}drd\theta dz] \\ &= \frac{dv}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} \right], \\ f_z &= dv \left[-\rho g + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} \right], \end{aligned} \quad (30.10)$$

که در آن $dv = r dr d\theta dz$ ، اندازه‌ی حجم پوسته‌ی استوانه‌ای است. اکنون مؤلفه‌های عمودی تانسور تنش را برحسب ضرائب پدیده‌شناختی N_1 و N_2 بازنویسی می‌کنیم. بنابر هندسه‌ی مسأله، نیروی برشی در راستای $\hat{\theta}$ اعمال شده است. از مقایسه‌ی هندسه‌ی این مسأله با هندسه‌ی آزمایش تنش برشی که پیش از این با دو صفحه‌ی موازی تعریف شده بود، می‌توانیم جانشانی زیر را انجام دهیم:

$$N_1 = \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr}, \quad N_2 = \sigma_{rr} - \sigma_{zz}. \quad (31.10)$$

در اینجا دو صفحه‌ی جانبی پوسته‌ی استوانه‌ای نسبت به هم در حرکت هستند. تنش عمودی در راستای z را با $-P$ نشان می‌دهیم، بنابراین:

$$\sigma_{zz} = -P, \quad \sigma_{rr} = N_2 - P, \quad \sigma_{\theta\theta} = (N_1 + N_2) - P. \quad (32.10)$$

در این روابط، تمامی مؤلفه‌های عمودی تانسور تنش را برحسب متغیرهای P ، N_1 و N_2 بازنویسی کرده‌ایم. اکنون برای بررسی حرکت شاره در شرایط پایا، معادله‌ی حرکت یک عنصر بی‌نهایت کوچک شاره را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$dv\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (33.10)$$

که در آن ρ چگالی شاره و $\mathbf{f} = f_r\hat{r} + f_z\hat{z}$ نیروی وارد بر آن است. با جایگزین کردن میدان سرعت شاره‌ی چرخان داریم:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{r}u^\psi(r)\hat{r} = -r\Omega^\psi(r)\hat{r},$$

که در آن فرض کرده‌ایم، شاره با سرعت زاویه‌ای Ω می‌چرخد. این سرعت زاویه‌ای به فاصله از مرکز چرخش بستگی دارد. پس با قرار دادن اطلاعات بالا در معادله‌ی حرکت شاره، داریم:

$$\begin{aligned} -\rho r \Omega^2(r) &= (1/r) \frac{\partial}{\partial r} (r N_r) - \frac{\partial}{\partial r} P - (N_1 + N_2)/r, \\ \circ &= -\rho g - \frac{\partial}{\partial z} P. \end{aligned} \quad (34.10)$$

فشار در سطح آزاد شاره (مرز مشترک شاره و هوا)، برابر با فشار هوا و ثابت است. بنابراین درست روی مرز مشترک داریم: $P(r, z) = P_0$ ، بنابراین با محاسبه‌ی تغییرات دیفرانسیلی فشار روی سطح آزاد داریم:

$$dP = \frac{\partial}{\partial r} P dr + \frac{\partial}{\partial z} P dz = 0. \quad (35.10)$$

در نتیجه شکل مرز مشترک از معادله‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dh}{dr} = -(\frac{\partial}{\partial r} P) / (\frac{\partial}{\partial z} P). \quad (36.10)$$

با استفاده از معادله ۳۴.۱۰، شکل سطح آزاد مایع به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho g \frac{dh}{dr} = \rho r \Omega^2(r) + (1/r) [\frac{\partial}{\partial r} (r N_r) - N_1 - N_2]. \quad (37.10)$$

شکل سطح آزاد شاره‌های نیوتنی به عنوان حالت خاصی از این رابطه قابل مطالعه است. برای شاره‌های نیوتنی $N_1 = N_2 = 0$ ، پس $\frac{d}{dr} h(r) > 0$. بنابراین برای شاره‌های نیوتنی، چرخش میله باعث دور شدن شاره از میله می‌شود. این حالت در فصل شاره‌های اویلری به دقت بررسی شده است. برای بررسی شکل سطح آزاد شاره‌های نانیوتنی، باید مدل مشخصی برای تنش‌های عمودی ارائه کنیم. تنش برشی برای شاره‌های نانیوتنی، توابعی غیر خطی از نرخ برش $(\dot{\gamma})$ هستند. اگر نرخ برش کوچک باشد، تنش‌های برشی را به صورت زیر بر حسب نرخ برش بسط می‌دهیم:

$$N_1(\dot{\gamma}) = \alpha \dot{\gamma}^2 + \mathcal{O}(\dot{\gamma})^3, \quad N_2(\dot{\gamma}) = \beta \dot{\gamma}^2 + \mathcal{O}(\dot{\gamma})^3. \quad (38.10)$$

حالا فرض کنید که تکانه‌ی دورانی‌ای که میله‌ی چرخان به شاره می‌دهد پایسته بماند. در این

صورت اگر شعاع میله را برابر با r_* در نظر بگیریم، سرعت زاویه‌ای شاره در هر نقطه بصورت $\Omega = \Omega_* \frac{r_*^2}{r^2}$ می‌شود که در آن Ω_* ، سرعت چرخش میله است. مطابق این رابطه سرعت چرخش شاره به عنوان تابعی از فاصله تا محور چرخش داده شده است.

نرخ برش چه ارتباطی با فاصله از محور چرخش دارد؟ برای پاسخ به این سوال توجه کنید که در مختصات استوانه‌ای شکل عملگر گرادیان به صورت $\nabla = \hat{r}\partial_r + \hat{\theta}(1/r)\partial_\theta$ است. برای میدان سرعت مسأله‌ی حاضر داریم:

$$\nabla \mathbf{u} + [\nabla \mathbf{u}]^T = (\hat{r}\hat{\theta} + \hat{\theta}\hat{r})(r\partial_r(u/r)),$$

که نتیجه می‌دهد: $\dot{\gamma} = r \frac{d\Omega}{dr}$.

با در نظر گرفتن تمام این اطلاعات، شکل سطح آزاد شاره با عبارت زیر داده می‌شود:

$$h(r) = h(r_*) + \frac{\Omega_*^2 r_*^4}{g} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_*^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{4(\alpha + 4\beta)}{\rho} \left(\frac{1}{r_*^4} - \frac{1}{r^4} \right) \right]. \quad (39.10)$$

برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن شاره در مجاورت میله‌ی چرخان، شیب آنرا در مجاورت میله تعیین می‌کنیم. برای تعیین علامت شیب منحنی (سطح آزاد شاره) در مجاورت میله، قرار می‌دهیم: $r = r_*(1 + \epsilon)$ و برای ϵ کوچک بدست می‌آوریم:

$$h(r) = h(r_*) + \frac{\Omega_*^2 r_*^4}{g} \left(\epsilon - 16 \frac{(\alpha + 4\beta)}{\rho r_*^2} \epsilon \right). \quad (40.10)$$

جمله‌ی اول داخل پرانتز دارای شیب مثبت و ناشی از اثرهای نیوتنی است. جمله‌ی دوم داخل پرانتز که منشأ غیر نیوتنی دارد، شیب منفی و اثر وایزنبرگ را توصیف می‌کند. شاره تمایل دارد به سمت میله‌ی چرخان رفته و کمی صعود کند. برای حالت $16 \frac{(\alpha + 4\beta)}{\rho r_*^2} > 1$ ، اثرهای نانیوتنی غالب است و شاره از میله صعود می‌کند.

 پرسش‌ها

۱.۱۰ یک سامانه‌ی وشکسان-کشسان که با مدل کلین-ویت توصیف می‌شود را در نظر بگیرید. به این سامانه یک برش به‌صورت زیر اعمال می‌کنیم:

$$\gamma(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \gamma_0 & t > t_0, \end{cases}$$

که در آن t_0 لحظه‌ی اعمال برش است. پاسخ این سامانه را به‌دست آورده و در مورد آن بحث کنید.

۲.۱۰ مرتبه‌ی بزرگی زمان واهلش مولکول‌های آب را برآورد کنید و از آنجا G را به‌دست آورید.

۳.۱۰ یک شاره‌ی پلیمری رقیق از پلیمرهایی به طول $1\mu m$ و با انرژی کشسانی از مرتبه‌ی $k_B T$ که در آب حل شده‌اند، تشکیل شده است. وشکسانی مؤثر این مجموعه را برآورد کنید.

۴.۱۰ پاسخ یک شاره‌ی نیوتنی آلدروید به نرخ برش معرفی شده در مسأله‌ی بالا را به‌دست آورید.

۱۱

شارش متلاطم

شارش متلاطم نقطه‌ی مقابل شارش لایه‌ای است [۲۶]. در این فصل با معرفی برخی از خصوصیات شارش متلاطم سعی می‌کنیم بصورت پدیده‌شناختی وارد موضوع شویم. در یک سامانه‌ی شارشی با افزایش عدد رینولدز، شارش دچار ناپایداری‌های متوالی می‌شود که در نهایت و در اعداد رینولدز بسیار بزرگ، تلاطم حاصل می‌شود. غیر خطی بودن سامانه دلیل اصلی تلاطم است. با مثال نشان می‌دهیم که در سامانه‌های غیر خطی در پی ناپایداری‌های متوالی به وضعیتی می‌توان رسید که در آن نقطه سامانه آشوبناک می‌شود. این رفتار آشوبناک نمود دیگری از رفتار متلاطم است. در انتهای این فصل در مورد نظریه‌ی کلموگرف کمی بحث می‌کنیم.

۱.۱۱ مقدمه

موضوع تلاطم یکی از انگشت‌شمار مسائل حل نشده‌ی فیزیک کلاسیک است. تلاطم، بیشتر از آنکه موضوعی در شاخه‌ی مکانیک شاره‌ها باشد، عضوی مهم از شاخه‌ی مکانیک آماری محسوب می‌شود. این به دلیل رفتار آماری بسیار پیچیده‌ای است که شارش متلاطم از خود بروز می‌دهد. هدف اصلی در این شاخه فهمیدن سازوکارهای فیزیکی است که سامانه را متلاطم می‌کنند.

افت و خیزهای شدید در سرعت نسبی بین نقاط مختلف شارش متلاطم از یک طرف و رفتار بدون مقیاس در سامانه‌ی متلاطم، شاخه‌ای غنی از فیزیک را ساخته است. این شاخه از فیزیک، مولد نظریه‌های ریاضی بسیار متنوعی شده است که در جاهای مختلف فیزیک می‌توان از آنها سراغ گرفت. فیزیک پدیده‌های بحرانی، موضوع گذار فازهای پیوسته، آشوب در سامانه‌های دینامیکی و پدیده‌های بحرانی خودسامان‌یافته از مثال‌های مهمی هستند که می‌توان به آنها اشاره کرد.

شاره‌ی متلاطم، نمونه‌ای از یک سامانه‌ی فیزیکی بسیار دور از تعادل است و مطالعه‌ی تلاطم، دریچه‌ای برای دریافت سامانه‌های بسیار دور از تعادل است. در این فصل نشان می‌دهیم که با افزایش عدد رینولدز و در پی هر ناپایداری که در سامانه رخ می‌دهد، یک درجه‌ی آزادی به سامانه اضافه می‌شود. سامانه‌ی متلاطم دارای درجات آزادی بسیار زیادی است که همه‌ی آنها دور از تعادل‌اند. سال‌هاست که سامانه‌های تعادلی با مکانیک آماری و توسط نظریه‌ی کلاسیکی گیز توصیف شده‌اند. البته در مورد سامانه‌های غیر تعادلی هم که خیلی از تعادل دور نیستند، نظریه‌ی انزاگر و روابط پاسخ خطی تصویر درستی از اتفاقات به دست می‌دهد. برای توصیف سامانه‌های بسیار دور از تعادل که مثال‌های واقعی در شاخه‌های مختلف فیزیک از شارها گرفته تا جامدات دارد، هنوز نظریه‌ی کاملی وجود ندارد.

مهم‌ترین پیشرفت‌های صورت گرفته در موضوع تلاطم بسیار قدیمی و به نظریه‌ی کلموگرف در سال ۱۹۴۱ باز می‌گردد. نظریه‌ی کلموگرف تنها بخشی از اتفاقات سامانه‌ی تلاطم را پاسخگوست ولی هنوز از مهم‌ترین نظریه‌هاست. می‌توانیم مقایسه کنیم با نظریه‌ی گروه بازبهنجارش کادانوف در پدیده‌های بحرانی که خیلی جدیدتر از نظریه‌ی کلموگرف است ولی فهم قابل قبولی از موضوع بحرانی شدن گذار فاز پیوسته ارائه می‌کند. در مورد تلاطم، علی‌رغم قدیمی بودن آن، هنوز نمی‌توان ادعا کرد که نظریه‌ای مانند ایده‌ی کادانوف وجود دارد تا توصیف شایسته‌ای از اتفاقات سامانه‌ی متلاطم ارائه کند.

معادله‌ی غیرخطی ناویه-استوکس که توصیف کننده‌ی رفتار شارش است، دارای تقارن مقیاس بسیار مهمی است. به سهولت می‌توان نشان داد که با مقیاس‌بندی مناسب در هر مسأله‌ی نوعی شارش، معادله‌ای به دست می‌آید که تنها پارامتر فیزیکی کنترل کننده‌ی آن، عدد بدون بُعد رینولدز است. در شرایط عدد رینولدز کم (کمتر از ۱) و برای شرایط مرزی مستقل از زمان،

میدان شارش دارای جوابی پایا است. با افزایش عدد رینولدز، جواب پایا ناپایدار می‌شود و رفتار نوسانی در جواب‌ها دیده می‌شود. با افزایش بیشتر عدد رینولدز، تعداد فرکانس‌هایی که رفتار نوسانی شارش را تولید می‌کنند بیشتر می‌شود. برای عدد رینولدز خیلی بزرگ (به صورت نوعی از مرتبه‌ی 10^4)، به سبب غیر خطی بودن سامانه، شارش که علی‌الاصول باید برهم‌نهی حرکت‌های نوسانی با تمامی فرکانس‌های مجاز باشد، رفتاری آشوبناک پیدا می‌کند. بروز این رفتار آشوبناک، متلاطم شدن میدان شارش را در پی دارد. در این شرایط، لایه‌ای بودن میدان سرعت از بین می‌رود و افت‌وخیزهای شدید در شارش ایجاد می‌شود.

از نظر تجربی دو پدیده‌ی مهم، یکی قانون $\frac{1}{2}$ و دیگری متناهی شدن نرخ اتلاف انرژی بر واحد جرم در حد $\eta \rightarrow \infty$ ، مشخصات اصلی تلاطم هستند. درون یک شارش کاملاً متلاطم، متوسط توان دوم اختلاف سرعت دو نقطه به فاصله‌ی R از یکدیگر بصورت $\langle (\delta \mathbf{u}(R) \cdot \hat{R})^2 \rangle \sim R^{\frac{1}{2}}$ رفتار می‌کند. این موضوع با اندازه‌گیری مستقیم مولفه‌های سرعت در نقاط مختلف و مطالعه‌ی همبستگی بین آنها قابل بررسی است و به قانون $\frac{1}{2}$ موسوم است. برای درک دومین پدیده‌ی مهم مرتبط با تلاطم می‌توانیم از رابطه‌ی ساده‌ای که بین ضریب درگ و نرخ اتلاف انرژی بر واحد جرم وجود دارد استفاده کنیم. نرخ اتلاف انرژی بر واحد جرم در یک شارش دلخواه که در حضور مجموعه‌ای از موانع جریان دارد به ضریب درگ آن مجموعه بصورت $\epsilon = \frac{1}{2} C_D \frac{V^3}{L}$ بستگی دارد که در آن L اندازه‌ی خطی موانع و V سرعت مشخصه‌ی شارش است. بصورت تجربی معلوم شده است که در حد $Re \rightarrow \infty$ ، ضریب درگ به یک عدد متناهی، کمی کمتر از یک، همگرا می‌شود. در این صورت در یک شارش متلاطم که پشت این موانع تشکیل شده است، با ثابت نگاه داشتن پارامترهای هندسی و سرعت‌های ورودی و با کاهش ویسکوزیته در حد $\eta \rightarrow 0$ ، نرخ اتلاف انرژی بر واحد جرم عددی ثابت و مستقل از η می‌شود. هر نظریه‌ی موفق که شارش متلاطم را توصیف می‌کند باید این دو واقعیت تجربی را بخوبی پاسخگو باشد.

۲.۱۱ شارش لایه‌ای و غیر لایه‌ای

اجازه دهید بحث را با مسأله‌ی پخش جوهر در آب شروع کنیم. پخش رنگدانه‌های چای و مولکول‌های شکر در آب هم کم‌وبیش فیزیکی مشابه با پخش جوهر دارند. در فصل‌های پیشین

با پدیده‌ی پخش و ارتباط آن با گشت تصادفی که هر کلئید سازنده‌ی رنگ انجام می‌دهد آشنا شدیم. در واقع کلئیدها از نقاطی با چگالی بیشتر به نقاط کمتر چگال جریان پیدا می‌کنند تا سامانه به چگالی یکنواخت و تعادل برسد. سرعت فرآیند پخش با ضریب پخش D ، نشان داده می‌شود. برای مولکول‌هایی با اندازه‌ی حدودی $a \sim 10^{-8} \text{m}$ که در آب پخش می‌شوند، ضریب پخش از مرتبه‌ی $10^{-1} \text{m}^2/\text{s}$ می‌شود. پس برای اینکه این مولکول‌ها در ناحیه‌ای به اندازه‌ی 1cm پخش شوند، باید زمانی به اندازه‌ی $10^6 \text{s} \sim \frac{L^2}{D}$ صبر کنیم. در عمل برای پخش شدن چای یا شکر در آب، به پدیده‌ی پخش اکتفا نمی‌کنیم و با قاشق آن را هم می‌زنیم. اگر اندازه‌ی نوعی قاشق را از مرتبه‌ی $L \sim 1 \text{cm}$ بگیریم، به سهولت می‌بینیم که شارش ایجاد شده دارای عدد رینولدز بزرگی از مرتبه‌ی $10^3 - 10^2$ است. در این صورت ما از جریان متلاطم و غیر لایه‌ای ایجاد شده استفاده می‌کنیم تا به سرعت محلول همگن شود.

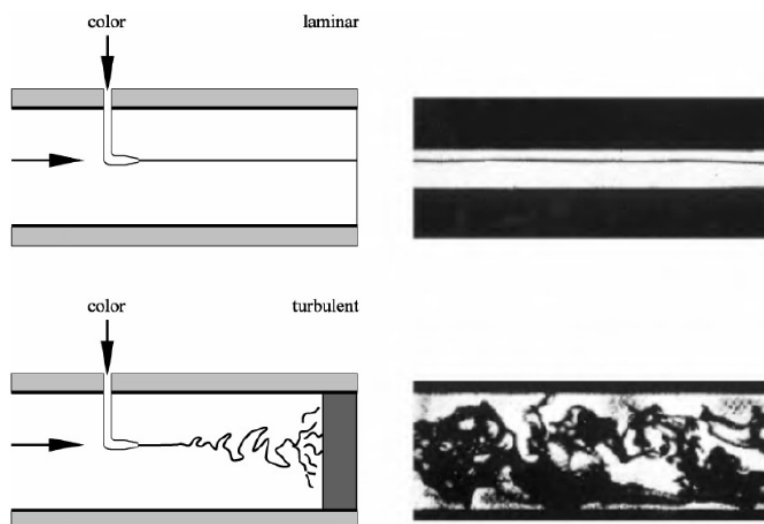
مسئله‌ی بالا، ساده‌ترین مثال برای تلاطم است. شارش متلاطم، چیزی دور از دسترس نیست. بسیاری از شارش‌هایی که روزمره با آنها سروکار داریم غیر لایه‌ای و متلاطم هستند. آیا مثال‌های دیگری از پدیده‌ی تلاطم را می‌توانید نام ببرید؟

شکل ۱۰.۱۱، تصویری از آزمایش‌های اولیه‌ای است که توسط رینولدز برای مشاهده‌ی تلاطم در شارها انجام شده است. جریان درون یک لوله در سرعت‌های کم لایه‌ای و در سرعت‌های زیاد متلاطم می‌شود. به شارش درون لوله، به آهستگی رنگ تزریق می‌شود. برای شارش لایه‌ای، یک خط تقریباً صاف از رنگ دیده می‌شود که انطباق با یکی از خطوط میدان شارشی درون لوله دارد. در صورتی که برای حالت متلاطم، رنگ به سرعت در تمام نقاط لوله پخش می‌شود.

۳.۱۱ تقارن مقیاس در معادله‌ی ناویه-استوکس

پیش از ادامه‌ی بحث اجازه دهید نشان دهیم چرا آستانه‌ی تلاطم توسط عدد رینولدز مشخص می‌شود. هر مسئله‌ی نوعی شارش توسط یک طول مشخصه‌ی L و یک سرعت مشخصه‌ی V بیان می‌شود. L طولی است که در آن انرژی به سامانه تزریق می‌شود. تمام طول‌ها، زمان‌ها و سرعت‌ها را به صورت:

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{L/V}, \quad \bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{V},$$

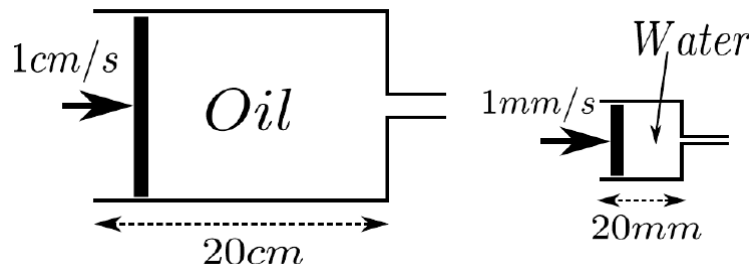


شکل ۱.۱۱ نتیجه‌ی تزریق رنگ به یک شارش لایه‌ای و آرام (متلاطم) در قسمت بالای (پایین) این شکل نشان داده شده است. در شارش متلاطم رنگ به سرعت با شاره مخلوط می‌شود.

بدون بُعد می‌کنیم تا معادله‌ی ناویه استوکس به صورت زیر شود:

$$Re \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{r}}}) \bar{\mathbf{u}} \right) = - \frac{\partial^2}{\partial \bar{\mathbf{r}}^2} \bar{\mathbf{u}} - \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{r}}} \bar{P}, \quad (1.11)$$

که در آن عدد رینولدز $Re = \rho LV / \eta$ ، همان تعریف پیشین خود را دارد. در مورد مفهوم شهودی عدد رینولدز در فصل‌های پیشین صحبت کرده‌ایم. اینجا می‌خواهیم به یک نتیجه‌ی مهم که از رابطه‌ی بالا گرفته می‌شود بپردازیم. تقارن مقیاس معادله‌ی ناویه-استوکس به وضوح نشان می‌دهد که تنها عدد رینولدز است که نوع شارش را مشخص می‌کند. در شکل ۲.۱۱، دو سرنگ متفاوت را می‌بینید که مقیاس‌های طولی متفاوتی دارند و پیستون نیز با سرعت‌های متفاوتی حرکت می‌کند. یکی از سرنگ‌ها حاوی آب و دیگری حاوی روغن است. نسبت‌ها را طوری انتخاب کرده‌ایم که عدد رینولدز در هر دو یکسان باشد. در این صورت انتظار داریم شکل میدان شارشی در هر دو یکسان باشد. در مهندسی از این تقارن استفاده می‌شود و آزمایش‌های بزرگ مقیاس را با آزمایش‌های کوچک مقیاس شبیه‌سازی می‌کنند. مثلاً برای آزمایش تونل باد، از شبیه‌سازی شده‌ی آن در مقیاس‌های کوچک استفاده می‌شود. این موضوع هزینه‌ی آزمایش‌ها



شکل ۲.۱۱ تقارن مقیاس در مسایل مکانیک شاره.

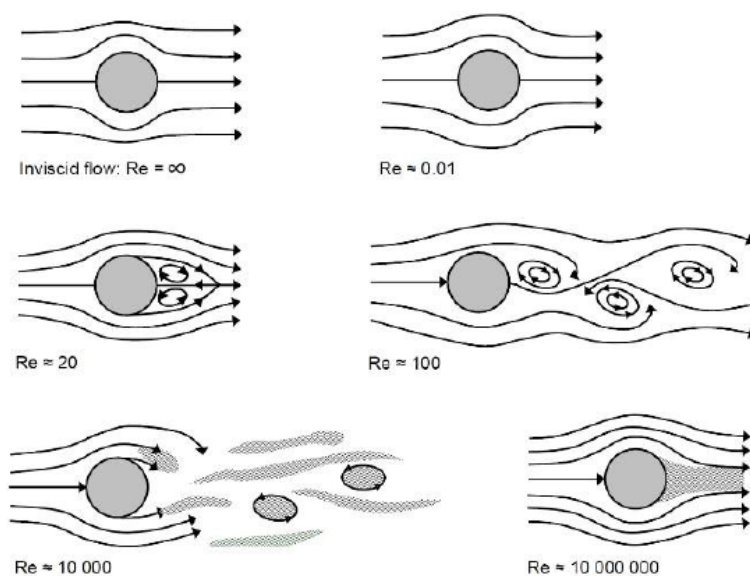
را کاهش می‌دهد.

۴.۱۱ شارش اطراف استوانه‌ی بسیار بلند

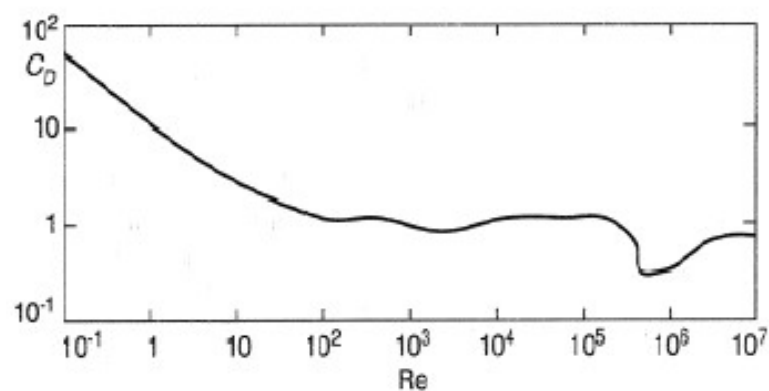
پیش از آنکه خواص عمومی شارش را برای اعداد رینولدز مختلف بررسی کنیم، به یک مسأله‌ی خاص ولی مهم می‌پردازیم. استوانه‌ای صلب و بسیار بلند به طول L و شعاع مقطع R ($L \gg R$) را در نظر بگیرید که در یک جریان خارجی یکنواخت قرار دارد. جریان خارجی برابر با V و در راستای عمود بر محور استوانه است. برای این مسأله عدد رینولدز به صورت $Re = \frac{\rho LV}{\eta}$ داده می‌شود. در شکل ۳.۱۱، تصویری کیفی از خطوط جریان این مسأله در اعداد رینولدز مختلف رسم شده است. در اعداد رینولدز بسیار کم، جریان پایا و خطوط جریان بسیار هموار هستند. رفتار تجربی مشاهده شده برای خطوط جریان در این حد، کاملاً مطابق با خطوط جریان به دست آمده از حل معادله‌ی استوکس ($Re \rightarrow 0$) هستند. با افزایش عدد رینولدز، وضعیت متفاوت می‌شود. گردابه‌هایی پشت استوانه ظاهر می‌شوند. این گردابه‌ها تقارن راست-چپ خطوط جریان را می‌شکنند. در این حالت جریان هنوز حالت پایاست. با افزایش بیشتر عدد رینولدز گردابه‌ها بیشتر شده و به سمت راست منتشر می‌شوند و جریان وابسته به زمان شده و از حالت پایا دور می‌شود. در عدد رینولدز خیلی بزرگ، حدود 10^4 و بیشتر از آن، در بعضی نقاط پشت استوانه شارشی خواهیم داشت که دیگر لایه‌ای نیست. آغاز متلاطم شدن شارش همین جاست. با افزایش بیشتر عدد رینولدز، نواحی متلاطم بیشتر و بیشتر می‌شوند. نکته‌ی بسیار مهمی که باید به آن توجه شود، رفتار شارش در عدد رینولدز بسیار بزرگ است. در واقع بعد از ظهور اولین

نواحی متلاطم، یک ردّ متلاطم پشت استوانه ظاهر می‌شود که در حد $Re \rightarrow \infty$ هم به جا می‌ماند. مقایسه کنید با حد ریاضی $\eta \rightarrow 0$ معادله‌ی ناویه استوکس. از نظر ریاضی در این حد دینامیک شارش با معادله‌ی اوایلر داده می‌شود و انتظار خطوط جریانی کاملاً متقارن برای راست و چپ استوانه داریم. به بیان دیگر، رفتار شارش در اعداد رینولدز بسیار بزرگ با حد ریاضی $\eta \rightarrow 0$ هم‌ارز نیست.

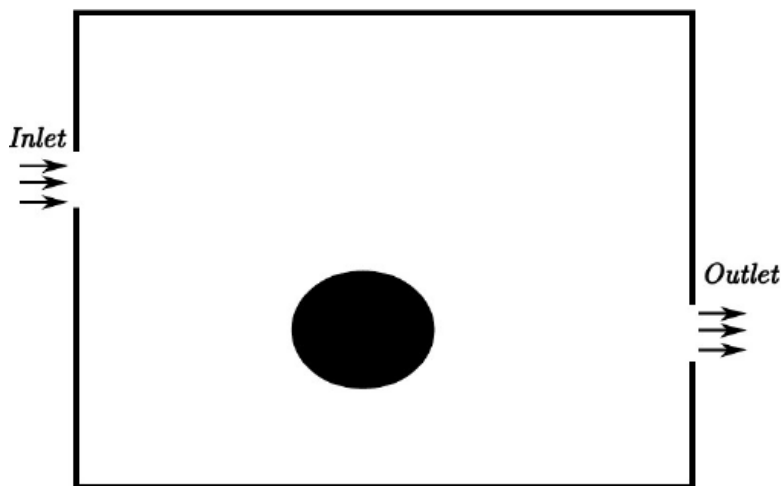
نمود تجربی رفتار شارشی پیچیده‌ی بالا در اندازه‌ی نیرویی که از جانب شاره به استوانه وارد می‌شود، دیده می‌شود. شکل ۴.۱۱ نتیجه‌ی اندازه‌ی گیری ضریب درگ در اعداد رینولدز متفاوت است. برای تغییر عدد رینولدز می‌توان پارامترهای هندسی و سرعت را ثابت نگاه داشت و ویسکوزیته را تغییر داد. نتیجه‌ی مهم این است که در اعداد رینولدز بزرگ، ضریب درگ متناهی می‌شود. در فصول قبلی ضریب درگ را برای یک کره در یک جریان فرودی تعریف کردیم. تعریف قبلی را می‌توانیم بصورت عمومی $C_D = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho V^2 S}$ در نظر بگیریم که برای هر شکل هندسی دلخواهی قابل استفاده باشد. در اینجا F_d نیروی درگ و S سطح مقطع جسم مورد نظر است که در معرض جریان فرودی قرار دارد. اندازه‌ی جریان فرودی V است. ضریب درگ تعبیر شهودی ساده‌ای دارد. اگر صورت و مخرج رابطه‌ی ضریب درگ را در زمان T ضرب کنیم، صورت معرف تکانه‌ی خطی است که در زمان T توسط جسم جذب می‌شود و مخرج نصف اندازه‌ی تکانه‌ی قسمتی از شاره است که در همان زمان در یک استوانه‌ی فرضی به طول VT و مقطع S قرار گرفته است و از کنار جسم رد می‌شود. انرژی تلف شده برواحد جرم بصورت $\epsilon \sim \frac{F_d V}{\rho S^{\frac{1}{2}}}$ است. در اینجا برای سهولت فرض کرده‌ایم مقیاس طولی که در آن انرژی تلف می‌شود متناسب با $S^{\frac{1}{2}}$ است. در نهایت می‌بینیم که نرخ اتلاف و ضریب درگ بصورت $\epsilon \sim \frac{1}{2} C_D \frac{V^2}{S^{\frac{1}{2}}}$ به هم مربوط می‌شوند. ارتباط بین نرخ اتلاف و ضریب درگ نتیجه‌ی مهمی دارد. در $Re \rightarrow \infty$ ضریب درگ بصورت تجربی به مقدار حدی متناهی می‌رسد. در نتیجه در شارش متلاطم و در حد $\eta \rightarrow 0$ نرخ اتلاف مستقل از η و یک مقدار متناهی متناسب با $\frac{V^2}{S^{\frac{1}{2}}}$ می‌شود. توجه شود که برای رسیدن به تلاطم، سرعت و طول را ثابت نگاه داشته و ویسکوزیته را کاهش می‌دهیم. همانطور که قبلاً اشاره شد، متناهی شدن نرخ اتلاف پدیده‌ای عام و قابل مشاهده در هر شارش متلاطمی است.



شکل ۳.۱۱ میدان شارشی اطراف یک استوانه‌ی بسیار بلند که در معرض یک جریان فرودی عمود بر محور استوانه قرار دارد، به صورت نمایشی و در اعداد رینولدز متفاوت رسم شده است.



شکل ۴.۱۱ ضریب درگ یک استوانه در حضور شارش عمودی بر حسب عدد رینولدز رسم شده است. دیده می‌شود که در حد $Re \rightarrow \infty$ ضریب درگ به یک مقدار متناهی غیر صفر میل می‌کند.



شکل ۵.۱۱ یک مسأله‌ی نوعی شارش با شرایط مرزی بدون لغزش و جریان‌های ورودی و خروجی مربوط به آن.

۵.۱۱ پایداری شارش پایا

یک مسأله‌ی نوعی شارش مطابق شکل ۵.۱۱ را در نظر بگیرید. یک جریان ورودی از قسمتی از مرزها وارد و از قسمتی دیگر خارج می‌شود. درون مرزها اجسام صلبی هستند که شارش را محدود می‌کنند. در این مسأله تمامی شرایط مرزی مستقل از زمان هستند. اجازه دهید بپرسیم، آیا میدان شارشی در این‌گونه مسائل به حالت پایا می‌رسند؟ یادآوری می‌شود که در حالت پایا $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ است. انتظار داریم در عدد رینولدز خیلی کم که اثرهای غیر خطی ناچیزند، از طریق یک رفتار واهلشی (ناشی از تغییرات مرتبه‌ی اول زمانی در معادله‌ی ناویه-استوکس) و پس از یک زمان متناهی، وابستگی به زمان در میدان سرعت از بین برود. در این صورت جواب‌هایی پایا به دست می‌آوریم. این نتیجه‌ی درست را البته می‌توان در مورد هر مسأله‌ی خاصی با جزئیات محاسبه و مشاهده کرد. ولی نکته‌ی مهمی که وجود دارد، آزمون پایداری جواب‌های پایاست. آیا جواب‌های پایای به دست آمده پایدار هستند؟ آزمون پایداری بسیار مهم است، زیرا همیشه در سامانه‌های فیزیکی افت‌وخیزها و اختلال‌ها حضور دارند و می‌توانند شارش‌های ناپایدار را از حالت پایا دور کنند. در فصل‌های پیشین اندکی در مورد برخی از انواع ناپایداری‌ها بحث کرده‌ایم.

اینجا می‌خواهیم بحث ناپایداری‌ها را در قالبی کلی‌تر ادامه دهیم. نتایج تجربی و محاسباتی نشان می‌دهند که در انواع مختلف مسائل شارشی، در عدد رینولدز بسیار کم، جواب‌های پایا می‌توانند پایدار باشند. با افزایش عدد رینولدز ناپایداری‌ها خود را نشان می‌دهند. آزمون پایداری با اعمال یک اختلال خارجی و مطالعه‌ی پاسخ سامانه به آن اختلال انجام می‌شود. یک مسأله‌ی نوعی شارش با شرایط مرزی مستقل از زمان را در نظر بگیرید. فرض کنید این مسأله جوابی پایا به شکل $u_0(r)$ داشته باشد. در واقع این تابع در معادله‌ی

$$Re u_0 \cdot \nabla u_0 = \nabla^2 u_0 - \nabla P_0,$$

با شرایط مرزی مربوط به مسأله صدق می‌کند. برای سهولت متغیرهای بدون بعد را بدون خط اضافی روی آنها نشان داده‌ایم. اکنون برای مطالعه‌ی پایداری جواب پایا، اختلالی به صورت زیر به جواب پایا می‌افزاییم:

$$u(r, t) = u_0(r) + u_1(r)e^{-i\omega_1 t}. \quad (2.11)$$

این جواب مختل شده باید در معادله‌ی ناویه‌استوکس صدق کند. با فرض کوچک بودن اختلال $(u_1 \ll u_0)$ ، می‌توانیم معادله‌ی تحولی اختلال را خطی کنیم:

$$Re(-i\omega_1 u_1 + u_0 \cdot \nabla u_1 + u_1 \cdot \nabla u_0) = \nabla^2 u_1 - \nabla P_1.$$

علاوه بر معادله‌ی بالا، معادله‌ی تراکم ناپذیری نیز باید برقرار باشد. دقت کنید که اختلال اعمال شده لازم نیست در شرایط مرزی صدق کند. برای بحث دقیق‌تر باید یک مسأله‌ی خاص با جزییات مشخصی را در نظر بگیریم. برای برخی مسائل مانند شارش کوئت، شارش پوآزوی و شارش درون استوانه، تحلیل پایداری با جزییات کامل انجام شده است. برای اطلاع از نتایج نگاه کنید به مراجع. علی‌رغم پیچیده و پر دردسر بودن تحلیل‌های پایداری، محتوای کلی نتایج نهایی که در مورد سامانه‌های مختلف مشترک است را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم. عموماً یک عدد رینولدز بحرانی Re_1 وجود دارد که برای $Re > Re_1$ جواب پایا، ناپایدار می‌شود. این موضوع به صورت $\gamma_1 = \Im \omega_1 > 0$ دیده می‌شود. مثبت شدن قسمت موهومی فرکانس، واگرایی اختلال را به صورت عامل نمایی $e^{\gamma_1 t}$ به دنبال دارد. البته در عمل هیچ‌گاه جواب‌ها واقعاً

واگرا نمی‌شوند و غیر خطی بودن سامانه، باعث ایجاد یک جواب نوسانی متناهی با فرکانس $\Re\omega_1$ می‌شود. دقت کنید که مقدار ω_1 و $\Re\omega_1$ به جزئیات و نوع شارش مورد مطالعه ارتباط دارند. پس برای $\Re\omega_1 > \Re\omega_2$ ، جواب پایا از بین رفته و یک جواب نوسانی جایگزین آن می‌شود. آیا جریان غیر پایا و نوسانی $u_1(r)e^{-i\omega_1 t}$ پایدار است؟ برای آزمون پایداری جواب نوسانی به دست آمده، بار دیگر اختلالی به صورت $u_2(r)e^{-i\omega_2 t}$ به جواب‌های قبلی می‌افزاییم. میدان شارشی جدید در معادله‌ی خطی سازی شده‌ی ناویه‌استوکس صدق می‌کند. محاسبات نشان می‌دهند که برای $\Re\omega_1 < \Re\omega_2$ جواب نوسانی اولیه ناپایدار می‌شود ($\Im\omega_2 > 0$). در این صورت پاسخ پایدار، جوابی است که با دو فرکانس $\Re\omega_1$ و $\Re\omega_2$ نوسان می‌کند. باز هم مقدار عددی ω_2 و $\Re\omega_2$ به جزئیات شارش و نوع مسأله بستگی دارند.

با امتداد سلسله مراتب بالا، می‌بینیم که جواب پایدار برای عدد رینولدز بسیار بزرگ، ترکیب خطی از تعداد زیادی نوسان با فرکانس‌های مجاز مسأله است. با افزایش آهسته‌ی عدد رینولدز، هر بار که یک ناپایداری رخ می‌دهد، جواب نوسانی در شارش ایجاد می‌شود که دامنه و فاز نوسان ایجاد شده به شرایط لحظه‌ی ناپایداری و نوع اختلال‌های واقعی موجود در مسأله ارتباط دارند. با توجه به اینکه این دامنه و فاز در اختیار و کنترل ما نیستند، در هر ناپایداری یک درجه‌ی آزادی به فضای فاز سامانه افزوده می‌شود. ناپایداری‌های پیاپی، درجات آزادی شارش را بیشتر و بیشتر می‌کنند. آیا ناپایداری‌های پیاپی می‌توانند سامانه را به حالتی برسانند که متلاطم شود؟ پاسخ کامل به این سؤال اندکی سخت است. ولی می‌توانیم به مسأله چندشاخگی در سامانه‌های دینامیکی غیر خطی اشاره کنیم. در قسمت بعد با معرفی ساده‌ترین سامانه‌ی غیر خطی که با چند شاخگی‌های پی‌درپی آشوبناک می‌شود، سعی می‌کنیم تا اندکی به پاسخ سؤال بالا نزدیک شویم. در واقع با این دیدگاه، تنها شواهدی برای امکان وجود جواب‌های متلاطم ارائه می‌شود.

۶.۱۱ آشوب در سامانه‌های غیرخطی

برای مطالعه‌ی رفتار زمانی میدان سرعت می‌توانیم از مدل‌های دینامیکی گسسته‌ی غیرخطی کمک بگیریم. برای درک این موضوع از وابستگی‌های فضایی میدان سرعت در معادله‌ی ناویه-استوکس صرف‌نظر کنید و وابستگی زمانی را گسسته کنید. قاعدتا به معادله‌ی دینامیکی برای متغیر

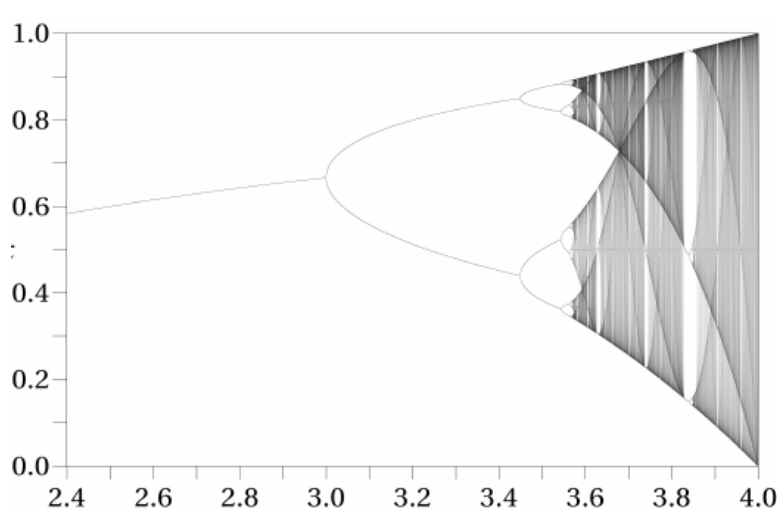
سرعت می‌رسیم که وضعیت لحظه‌ای سرعت در قالب جملات خطی و توان دوم به وضعیت لحظه‌ی قبلش بستگی دارد. جمله‌ی توان دوم از جمله‌ی غیر خطی می‌آید. بحث کنونی ما محاسبات دقیق این رهیافت نیست و می‌خواهیم در مورد ایده‌های کلی کمی بحث کنیم. اجازه دهید برای ایجاد شهود بهتر در مورد اتفاقاتی که ممکن است در یک سامانه‌ی غیر خطی رخ دهد، با ساده‌ترین مورد شروع کنیم. نگاشت لاجیستیک، با معادله‌ی گسسته‌ی زیر داده می‌شود:

$$N_{n+1} = rN_n(1 - \frac{1}{K}N_n). \quad (3.11)$$

از نظر شهودی از این معادله می‌توان برای توصیف رشد جمعیت مجموعه‌های انسانی یا باکتریایی استفاده کرد. اگر جمعیت مجموعه را در لحظه‌ی n با N_n نشان دهیم، جمله‌ی rN_n در سمت چپ رابطه‌ی بالا رشد جمعیت را نشان می‌دهد که در آن r نرخ رشد است. به سبب محدود بودن غذا، رشد نمی‌تواند به صورت نامحدود ادامه پیدا کند. جمله‌ی غیر خطی سمت چپ رابطه‌ی بالا محدود بودن منابع غذایی را نشان می‌دهد. اثر محدود بودن غذا در جمعیت‌های زیاد مهم می‌شود. در اینجا K حداکثر جمعیتی است که سامانه می‌تواند داشته باشد. برای $N > K$ نرخ رشد جمعیت منفی می‌شود. برای مطالعه‌ی بهتر تحول سامانه، معادله‌ی بالا را با جمعیت بهنجار $x_n = N_n/K$ که برابر با جمعیت لحظه‌ای تقسیم بر جمعیت بیشینه است، مقیاس می‌کنیم:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \quad (4.11)$$

کمیت مورد علاقه، جمعیت تعادلی در زمان‌های بزرگ است. جواب به مقدار عدد r بستگی دارد. منحنی شکل ۶.۱۱، مقدار جمعیت تعادلی را برای r های مختلف نشان می‌دهد. برای رسم این منحنی با انتخاب یک r خاص و با شروع از یک جمعیت اولیه دلخواه x_0 ، جمعیت را در زمان‌های خیلی بزرگ به دست آورده‌ایم. برای $2 < r < 3$ جمعیت نهایی، مستقل از مقدار اولیه یک عدد ثابت می‌شود. ولی با اندکی افزایش r و برای $1 + \sqrt{6} < r < 3$ جواب تعادلی ۲ مقدار پیدا می‌کند. در این صورت، جمعیت سامانه با یک فرکانس متناهی بین این دو مقدار نوسان می‌کند. با اندکی افزایش r ، جواب‌های تعادلی ۴ تا می‌شوند و جمعیت تعادلی مجموعه بین این ۴ مقدار نوسان می‌کند. اتفاق بسیار مهم و جالب برای $3.57 \approx r$ و اندکی بیشتر از آن رخ می‌دهد. جواب‌های تعادلی زیاد شده به طوریکه نمی‌توان نوسان‌هایی بین این



شکل ۶.۱۱ نمودار دوشاخگی برای سامانه‌ی لاجیستیک. محور عمودی مقدار جواب‌های تعادلی یعنی x_∞ ، و محور افقی پارامتر r را نشان می‌دهد.

جواب‌ها با فرکانس متناهی یافت. این نقطه‌ی شروع رفتار آشوبناک در سامانه است. یعنی جواب زمان‌های بلند سامانه بسیار به شرایط اولیه‌ی سامانه وابسته می‌شوند. رفتار سامانه‌های آشوبناک بر حسب نمای لیاپونوف توصیف می‌شود. اگر دو شرط اولیه با فاصله‌ی δx_0 از همدیگر را برگزینیم، می‌توانیم بعد از گذشت زمان n فاصله‌ی بین جمعیت‌ها را بدست آوریم. با مقایسه‌ی رشد فاصله‌ی نسبی در لحظه‌ی آغازین و در لحظه‌ی دلخواه می‌توانیم وابستگی به شرایط اولیه را کمی کنیم. قرار می‌دهیم:

$$\delta x_n \sim e^{-\mu n} \delta x_0,$$

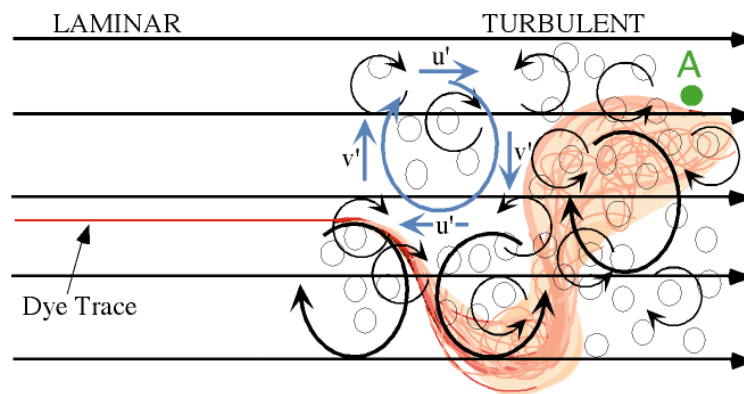
در این صورت، μ نمای لیاپونوف نامیده می‌شود که برای $\mu < 0$ سامانه آشوبناک است. متلاطم شدن شارش ارتباط مستقیمی با آشوبناک شدن سامانه‌ی غیر خطی دارد. هر چند توصیف ارائه شده در این قسمت کامل نیست ولی شهود خوبی در مورد اتفاقات افتاده در ناپایداری‌های پیایی در یک سامانه‌ی غیر خطی می‌دهد.

۷.۱۱ ایده‌ی آبشار انرژی

عدد رینولدز که زیاد می‌شود انتظار داریم اصطکاک شاره کمترین اثر ممکن را داشته باشد، با این حال نرخ اتلاف انرژی بر واحد جرم بصورت حدی به یک مقدار متناهی و غیر صفر می‌رسد. این واقعیت تجربی یکی از پیچیدگی‌های شارش متلاطم است. در یک شارش متلاطم نوعی (شارش اطراف استوانه یا شارش پوآزوی بین دو صفحه)، انرژی به صورت ممتد به سامانه تزریق می‌شود. تزریق انرژی عموماً از طریق مرزها یعنی در مقیاس‌های طولی بزرگ از مرتبه‌ی اندازه‌ی سامانه یعنی L ، انجام می‌شود. در جستجوی سازوکار اتلاف انرژی هستیم. بار دیگر به رابطه‌ی اساسی که پیش از این و در پرسش‌های فصل چهارم برای نرخ اتلاف انرژی به دست آمد مراجعه می‌کنیم:

$$\frac{dE}{dt} = \eta \int d^3\mathbf{r} (\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}))^2. \quad (5.11)$$

مطابق این رابطه، اتلاف انرژی از طریق چرخش موجود در شارش صورت می‌گیرد. این موضوع به ترتیب خیلی پیچیده‌ای در شارش متلاطم رخ می‌دهد به این صورت که شارش شدیداً آفت‌وخیز کننده‌ی متلاطم دارای قسمت‌های چرخشی پیچیده‌ای است. در واقع در تمام مقیاس‌های طولی می‌توانیم چرخش را مشاهده کنیم. برای اینکه تصویری شهودی ایجاد شود، یک چرخش نوعی در شاره را در نظر بگیرید که دارای مقیاس طولی λ است. اینجا با شارشی سروکار داریم که بیشترین تغییرات فضایی سرعت در مقیاس λ رخ می‌دهد. یک گردابه‌ی ایده‌آل مثالی خاص برای این جریان چرخشی است. میزان گستردگی فضائی گردابه مشخص کننده‌ی λ است. در ادامه‌ی بحث به دفعات از کلمه‌ی چرخش صحبت می‌کنیم. توجه شود که منظورمان از چرخش لزوماً یک جریان گردابه‌ای نیست. هر نوع میدان سرعت غیر همگن با $\nabla \times \mathbf{u} \neq 0$ در بحث ما می‌گنجد. بحث در مورد مقیاس‌های طولی متفاوت و جدا کردن سهم هر کدام با کمک تبدیل فوریه انجام می‌شود. در قسمت بعدی ایده‌های اولیه این موضوع را مطرح می‌کنیم. اینجا تمایل داریم ادامه‌ی بحث را بصورت کیفی دنبال کنیم. با افزایش عدد رینولدز و در اعداد رینولدز میانی، شاهد چرخش‌های بزرگ (بزرگ از نظر گستردگی فضایی) در سامانه خواهیم بود. با افزایش بیشتر عدد رینولدز، چرخش‌های موجود در شارش مقیاس‌های بزرگ محدود نمی‌شود و چرخش‌ها با مقیاس‌های طولی کوچک نیز تولید می‌شوند. در عدد رینولدز خیلی بزرگ،



شکل ۷.۱۱ طرحی از چرخش‌های یک شارش متلاطم و نقش آنها در مخلوط کردن رنگ با شاره.

چرخش‌های موجود در سامانه در تمامی مقیاس‌های طولی قابل مشاهده خواهند بود. در میدان سرعت افت‌خیزکننده‌ی شارش متلاطم، چرخش و تغییرات فضایی موجود در شارش را می‌توانیم برهم‌نهی از جریان‌های چرخشی با اندازه‌ی متفاوت در نظر بگیریم. اندازه‌ی بزرگترین چرخش موجود در سامانه‌ی متلاطم از مرتبه‌ی اندازه‌ی واقعی سامانه یعنی L است. در قسمت‌های بعدی در مورد اندازه‌ی کوچکترین چرخش موجود در سامانه هم بحث می‌کنیم.

شکل ۷.۱۱، تصویری شهودی از شارش لایه‌ای و شارش متلاطم ارائه می‌کند. در قسمت چپ، عدد رینولدز کم، چرخش در مقیاس طولی بزرگ و شارش لایه‌ای است. رنگ تزریق شده به شارش، همراه خطوط جریان جاری می‌شود. در قسمت راست تصویر، با افزایش عدد رینولدز شارش متلاطم شده است. قسمت افت‌خیزکننده میدان سرعت دارای تغییرات فضایی و زمانی شدیدی است. تغییرات فضایی میدان سرعت را می‌توانیم برهم‌نهی از چرخش‌هایی با اندازه‌های متفاوت در نظر بگیریم. قسمتی از رنگ تزریق شده در راستای خطوط جریان مربوط به جریان میانگین جاری می‌شود ولی تمام حرکت‌های موجود در شارش، در حرکت و پخش رنگ سهم دارند. حضور جریان‌های چرخشی در اندازه‌های طولی متفاوت باعث می‌شود تا رنگ به سرعت با تمام شاره مخلوط شود.

اکنون می‌توانیم موضوع اتلاف انرژی را بررسی کنیم. نظریه‌ی آبشار انرژی یکی از موفق‌ترین دیدگاه‌هایی است که تصویر درستی از اتلاف انرژی در شارش متلاطم را به دست می‌دهد. در

یک شارش متلاطم چرخش‌هایی با اندازه‌های متفاوت از بزرگ‌ترین تا کوچک‌ترین طول وجود دارند. انرژی افزوده شده به سامانه که در مقیاس‌های طولی بزرگ و از طریق عامل تولید جریان صورت می‌گیرد، در ابتدا به بزرگ‌ترین چرخش‌های سامانه (با اندازه‌ی L) داده می‌شود. عدد رینولدز مربوط به شارش چرخش‌های بزرگ مقیاس سامانه از مرتبه‌ی عدد رینولدز واقعی شارش و بسیار بزرگ است. بزرگ بودن عدد رینولدز به معنی اتلاف ناچیز در این مقیاس است. انرژی تزریق شده به صورت آبشاری و بدون اتلاف به چرخش‌هایی با اندازه‌های کوچکتر منتقل می‌شود. به بیان دیگر جریان‌ها با تغییرات بزرگ مقیاس، به صورت سلسله مراتبی جریان‌هایی با تغییراتی در مقیاس‌های طولی کوچکتر ایجاد می‌کنند. این انتقال انرژی تا جایی پیش می‌رود که به چرخش‌هایی با اندازه‌های بسیار کوچک l_η برسیم. عدد رینولدز شارش مربوط به این جریان چرخشی، به سبب کوچک شدن مقیاس‌های طولی، دیگر بزرگ نیست و می‌تواند به یک نزدیک شود. در این صورت، به خاطر بزرگ نبودن عدد رینولدز در شارش مربوط به این چرخش‌ها، نمی‌توان از اتلاف صرف‌نظر کرد و انرژی اضافه شده به سامانه از طریق این ریز چرخش‌ها تلف می‌شود. به l_η ، طول کلموگروف گفته می‌شود. این ریزچرخش‌ها، کوچک‌ترین چرخش‌های موجود در سامانه هستند و برای تخمین اندازه‌ی آنها می‌توانیم عدد رینولدز شارش مربوط به آنها را تقریباً برابر ۱ بگیریم. مقادیر بزرگی این کمیت‌ها را در قسمت بعدی برآورد می‌کنیم. شارش انرژی از جریان‌های چرخشی بزرگ مقیاس به چرخش‌های کوچک مقیاس و در نهایت اتلاف آن در مقیاس‌های طولی بسیار کوچک، سازوکار اصلی اتلاف انرژی در پدیده‌ی تلاطم است. این دیدگاه به آبشار انرژی موسوم است. این سازوکار می‌تواند اتلاف متناهی انرژی در عدد رینولدز بسیار بزرگ را توصیف کند. این توصیف شهودی را در قسمت‌های بعدی بیشتر بررسی می‌کنیم و علاوه بر متناهی شدن اتلاف انرژی، در نهایت نشان می‌دهیم که چگونه نظریه‌ی ریزمقیاس کلموگروف شواهدی برای صحت دیدگاه آبشار انرژی ارائه می‌کند.

سهم مقیاس‌های طولی متفاوت

تبدیل فوریه ابزار ریاضی مناسبی برای جدا کردن سهم مقیاس‌های طولی مختلف است. اینجا ایده‌های اولیه‌ی این موضوع و کاربردش در میدان شارشی را شرح می‌دهیم. یکی از مولفه‌های

میدان سرعت را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه‌ی فضایی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \tilde{u}(q) e^{iqx}, \quad \tilde{u}(q) = \int dx u(x) e^{-iqx},$$

اینجا برای سهولت فضا را یک بعدی گرفته‌ایم. در ادامه از خلاصه نویسی $\sum_q = \int \frac{dq}{2\pi}$ استفاده می‌کنیم. میدان سرعت را به صورت $u(x) = u_K^>(x) + u_K^<(x)$ تفکیک می‌کنیم که در آن:

$$u_K^>(x) = \sum_{q>K} \tilde{u}(q) e^{iqx}, \quad u_K^<(x) = \sum_{q\leq K} \tilde{u}(q) e^{iqx}.$$

در اینصورت $u_K^>(x)$ قسمتی از میدان سرعت است که در آن تغییرات فضایی با طول موج‌هایی بزرگتر از $\lambda = 2\pi/K$ حذف شده است (عدد موج‌های بزرگ را نگاه داشته‌ایم). این تابع شامل تغییراتی فضایی می‌شود که مقیاس‌های طولی آنها کوچکتر از طول مشخصه‌ی $\lambda = 2\pi/K$ باشد. به بیان دیگر $u_K^>(x)$ شامل عدد موج‌هایی می‌شود که از K بزرگترند.

بسهولت می‌توانیم ببینیم که انرژی جنبشی کل بر واحد جرم را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}_K^<|^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}_K^>|^2 \rangle,$$

که در آن داریم $\langle a \rangle = V^{-1} \int d^3\mathbf{r} a$. کمیت $e_K = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}_K^<|^2 \rangle$ را در نظر بگیرید. با اندکی محاسبه می‌بینیم که: $e_K = \frac{1}{2} \sum_{q\leq K} |\tilde{\mathbf{u}}(q)|^2$. در واقع e_K قسمتی از انرژی جنبشی بر واحد جرم است که در آن سهم جریان‌های چرخشی با مقیاس‌های طولی کوچکتر از $2\pi/K$ را حذف کرده‌ایم. اکنون با کمک معادله‌ی اساسی ناویه-استوکس می‌توان نشان داد:

$$\frac{\partial}{\partial t} e_K = -\Pi_K - \eta \sum_{q\leq K} q^2 |\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q})|^2 + \sum_{q\leq K} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}) \cdot \tilde{\mathbf{f}}(-\mathbf{q}).$$

این رابطه تعبیر ساده‌ای دارد. سمت چپ تغییر زمانی انرژی جنبشی موجود در تمام مدهای حرکتی که طول موجشان (مقیاس تغییراتشان) بزرگتر از $2\pi/K$ است را نشان می‌دهد. جمله‌ی دوم سمت راست اتلاف انرژی این مدها (تولید گرما) و جمله‌ی سوم افزایش انرژی این مدها به خاطر وجود نیروی خارجی را نشان می‌دهد. جمله‌ی اساسی که شارش انرژی بین مدهای طول موج بلند و مدهای طول موج کوتاه است با رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\Pi_K = \langle \mathbf{u}_K^< \cdot (\mathbf{u}_K^< \cdot \nabla \mathbf{u}_K^>) \rangle + \langle \mathbf{u}_K^> \cdot (\mathbf{u}_K^> \cdot \nabla \mathbf{u}_K^<) \rangle.$$

نظریه‌ی کلموگراف و ایده‌های پدیده‌شناختی راه‌هایی برای محاسبه‌ی این شار انرژی بدست می‌دهند. جزییات محاسباتی و تقریب‌های زیاد موجود در نظریه‌ی کلموگراف توجه‌ی خواننده‌ی عمومی مکانیک شاره‌ها را بر نمی‌انگیزد. به همین دلیل در ادامه‌ی به رهیافت پدیده‌شناختی باز می‌گردیم.

۸.۱۱ رهیافت پدیده‌شناختی

در یک شارش متلاطم، قسمت‌های میانگین و افت‌وخیزکننده‌ی سرعت را به صورت زیر جدا می‌کنیم:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_a(\mathbf{r}) + \mathbf{u}_f(\mathbf{r}, t), \quad (۶.۱۱)$$

که در آن میدان شارشی میانگین با متوسط‌گیری زمانی روی سرعت در هر نقطه به دست می‌آید. قسمت میانگین شارش، تابعی کند تغییر از مکان است یعنی شامل تغییرات طول موج بلند می‌شود. با این جداسازی، معلوم است که اطلاعات تلاطمی شارش در قسمت افت‌وخیزکننده سرعت است. جذر میانگین مربعی سرعت $u_{rms} = \sqrt{\langle \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rangle}$ در صورتی که با میانگین سرعت مقایسه شود، معیار عددی مناسبی برای بررسی شدت تلاطم به دست می‌دهد. قسمت افت‌وخیزکننده‌ی سرعت دارای تغییرات مهار نشده‌ی زمانی و مکانی است که بر حسب ترکیبی از چرخش‌هایی با مقیاس‌های طولی متفاوت قابل بیان است. آنچنانکه گفته شد، جزییات ریاضی این ایده از طریق تبدیل فوریه قابل اجراست. چرخش‌های بزرگ و کوچک موجود در سامانه‌ی متلاطم را در نظر بگیرید. بزرگ مقیاس‌ترین جریان‌های چرخشی موجود در سامانه، جریان‌های چرخشی هستند که در آنها تغییرات مکانی در طولی از مرتبه‌ی اندازه‌ی ماکروسکوپی سامانه L ، صورت می‌گیرد. چرخش‌های بزرگ مقیاس دارای اندازه‌ی سرعت بزرگتری هستند و بیشترین سهم انرژی جنبشی شارش توسط آنها حمل می‌شود. مرتبه‌ی بزرگی سرعت متوسط بزرگترین چرخش را با u_a و مرتبه‌ی بزرگی تغییرات سرعت متوسط از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر روی این جریان چرخشی را با Δu_a نشان می‌دهیم. دقت کنید که اندازه‌ی این سرعت‌ها توسط عوامل خارجی که جریان را می‌سازند و عموماً در مرزها هستند مشخص می‌شود. همچنین فرکانس وابسته به بزرگترین چرخش برابر با u_a/L است که دوره‌ی تکرار طرح

شارشی این چرخش از دید ناظری است که با سرعت میانگین شاره حرکت می‌کند. چرخش‌های کوچکتر در مقایسه با بزرگترین چرخش، دارای اندازه‌ی سرعت کوچکتر ولی فرکانس بزرگتری هستند.

برای یک جریان چرخشی نوعی با مقیاس طولی λ ، عدد رینولدز را به صورت Re_λ نشان می‌دهیم و آن برابر است با: $Re_\lambda = \lambda u_\lambda / \nu$ که در آن ν و شکسانی دینامیکی و u_λ مرتبه‌ی بزرگی سرعت در چرخشی در مقیاس λ است. عدد رینولدز مربوط به چرخش‌های بزرگ، بسیار از یک بزرگتر است که این موضوع بی‌اهمیت بودن اصطکاک در این جریانهای چرخشی را نشان می‌دهد. شارش این جریانهای چرخشی عملاً با معادله‌ی اوایلر داده می‌شود و در آن اتلافی نداریم. انرژی بدون اتلاف از چرخش‌های بزرگ - مقیاس به چرخش‌های کوچک - مقیاس منتقل می‌شود تا به جریان چرخشی با اندازه‌ی $L \gg \ell_\eta$ برسیم. برای این جریان چرخشی داریم: $Re_{\ell_\eta} \sim 1$. انرژی منتقل شده به این ریزگردش‌ها از طریق و شکسانی به گرما تبدیل می‌شود. انتقال انرژی از جریانهای چرخشی بزرگ به چرخش‌های کوچک را می‌توان به صورت انتقال انرژی از مدهای حرکتی طول موج بلند به مدهای طول موج کوتاه در نظر گرفت که پیش از این با Π_K نشان داده شده است.

اکنون می‌توانیم در مورد مقدار اتلاف در عدد رینولدز بسیار بزرگ بحث کنیم. انرژی که در نهایت توسط ریز چرخش‌ها تلف می‌شود، در ابتدا توسط چرخش‌های بزرگ سامانه از بیرون جذب می‌شود. در این صورت انتظار داریم نرخ انرژی تلف شده در واحد جرم که آن را با ϵ نشان می‌دهیم، تنها به خواص بزرگترین چرخش‌های سامانه بستگی داشته باشد. از طرف دیگر، می‌دانیم که جریانهای چرخشی بزرگ تنها توسط کمیات ρ ، L و Δu_a مشخص می‌شوند و η نقشی در رفتار دینامیکی آنها ندارد. به سهولت می‌توانیم با تحلیل ابعادی به رابطه‌ای به شکل زیر برسیم:

$$\epsilon = \frac{(\Delta u_a)^3}{L}. \quad (7.11)$$

متداول است که به شارش متلاطم، یک و شکسانی موثر تلاطمی نسبت می‌دهند. برای این منظور شارش متلاطم را هم‌ارز شارشی می‌گیریم با و شکسانی ν_{tur} که اتلاف در آن از طریق یک جریان چرخشی بزرگ مقیاس صورت می‌گیرد. برای تعیین و شکسانی موثر تلاطمی، مطابق رابطه‌ی

۵.۱۱، اتلاف را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\epsilon = \frac{\eta}{m} \int d^3\mathbf{r} (\nabla \times \mathbf{u})^2 \sim \nu_{tur} \left(\frac{\Delta u_a}{L} \right)^2,$$

که در آن فرض کرده‌ایم شارش ناشی از بزرگترین چرخش موجود در سامانه است. اکنون با برابر قرار دادن این رابطه با مقدار تخمینی قبلی برای اتلاف داریم:

$$\nu_{tur} \left(\frac{\Delta u_a}{L} \right)^2 = \frac{(\Delta u_a)^3}{L}$$

که از آنجا مقدار وشکسانی موثر به صورت $\nu_{tur} \sim L \Delta u_a$ می‌شود. دقت کنید که این نتیجه‌ی نهایی را به سهولت و با تحلیل ابعادی نیز می‌توانستیم به دست آوریم. ν_{tur} دارای بعد $\text{m}^2 \text{sec}^{-1}$ است و تنها یک راه برای تولید این کمیت از مشخصات سامانه یعنی L و Δu_a داریم.

۹.۱۱ تخمین اندازه‌ی افت‌وخیز سرعت

می‌خواهیم به صورت پدیده‌شناختی در مورد مرتبه‌ی بزرگی تغییرات قسمت افت‌وخیز کننده‌ی سرعت در فواصل مکانی و زمانی مختلف بحث کنیم. در یک لحظه‌ی خاص سرعت شارش در دو نقطه‌ی دور از هم و سرعت شارش در یک نقطه ولی در زمان‌های متفاوت چگونه افت‌وخیز می‌کند؟ ابتدا به تغییرات مکانی سرعت در یک لحظه‌ی خاص که با رابطه‌ی $\delta u_f(r) = u_f(r, t) - u_f(0, t)$ تعریف می‌شود می‌پردازیم. این کمیت، مرتبه‌ی بزرگی سرعت روی یک جریان چرخشی با مقیاس طولی r را می‌دهد. این کمیت را در سه رژیم فواصل بزرگ ($r \leq L$)، فواصل میانی ($\ell_\eta \ll r \ll L$) و فواصل بسیار کوچک ($r \leq \ell_\eta$) بررسی می‌کنیم.

فواصل بزرگ: رژیم انرژی

اطلاعات شارشی موجود در فواصل بزرگ توسط چرخش‌های بزرگ مقیاس سامانه داده می‌شود. دریافت انرژی از منبع خارجی توسط این جریان‌های چرخشی صورت می‌گیرد، به این سبب به آن رژیم انرژی نیز گفته می‌شود. طبق تعریفی که پیش از این داشتیم، در یک لحظه‌ی مشخص، تفاوت قسمت افت‌وخیز کننده‌ی سرعت بین نقاط مختلف، در فواصل طولی بزرگ L با شارش متوسط و Δu_a داده می‌شود.

فواصل میانی: رژیم اینرسی

در مقیاس‌های طولی $L \gg r \gg \ell_\eta$ ، با چرخش‌هایی سروکار داریم که خیلی از طولِ بزرگ مقیاس سامانه کوچکتر ولی از طولی که وشکسانی مهم می‌شود بسیار بزرگترند. به علت بی‌اهمیت بودن اتلاف، این رژیم تنها توسط اثرهای اینرسی مشخص می‌شود. در این مقیاس‌ها اگر از مرزها دور شویم، اثرهای مربوط به مرزها دیده نمی‌شوند. اساساً اثرهای مرزی تنها در چرخش‌های بزرگ دیده می‌شود. همگنی و همسانگردی دو خاصیت تقارنی اساسی شارش متلاطم در این مقیاس‌های طولی است. این دو خاصیت، فرض‌های اساسی نظریه‌ی ریزمقیاس کلموگرف است. اینجا می‌خواهیم برخی از نتایج را با تحلیل‌های ابعادی به‌دست آوریم. تنها دو کمیت ρ و ϵ خواص شارشی را در مقیاس‌های طولی میانی مشخص می‌کنند. در این رژیم، وشکسانی شاره بی‌اهمیت است. چرخش‌هایی به اندازه‌ی r ($\ell_\eta \ll r \ll L$) را در نظر بگیرید. تغییرات مکانی قسمت افت‌وخیز کننده‌ی سرعت مربوط به این جریان چرخشی را با $\delta u_f(r)$ نشان می‌دهیم. بنا به دلایلی که در بالا گفته شد، این سرعت تنها به کمیت‌های ρ و ϵ بستگی دارد. تحلیل ابعادی رابطه‌ای به شکل زیر می‌دهد:

$$\delta u_f(r) \sim (\epsilon r)^{\frac{1}{3}}.$$

این رابطه به قانون کلموگرف معروف است. مطابق این قانون، تغییرات نسبی سرعت با توان $\frac{1}{3}$ فاصله رشد می‌کند. قانون کلموگرف با دیدگاه آشپز انرژی سازگار است. انرژی در مقیاس‌های طولی بزرگ به سامانه تزریق می‌شود. این انرژی با شارش به مقیاس‌های کوچک منتقل می‌شود تا نهایتاً بصورت گرما در مقیاس‌های طولی کوچک تلف شود. در رژیم اینرسی، نیروی خارجی و اتلاف سهمی در شار انرژی ندارند. در این رژیم شار انرژی با شار انرژی جنبشی داده می‌شود. در این صورت شار انرژی بر واحد جرم در مقیاس طولی r از تقسیم انرژی جنبشی δu_f^2 بر زمان $r/\delta u_f$ بدست می‌آید. به رابطه‌ای که پیش از این برای Π_K بدست آورده بودیم نگاه کنید. با توجه به قانون کلموگرف دیده می‌شود که شار انرژی در رژیم اینرسی $\epsilon(r) \sim \langle \delta u_f^3 \rangle / r$ عددی ثابت و مستقل از مقیاس r است.

از قانون کلموگرف استفاده می‌کنیم و عدد رینولدز مربوط به چرخشی به اندازه‌ی r را تخمین می‌زنیم. با استفاده از رابطه‌ی $Re_r \sim ru_r/\nu$ و توجه به این‌که سرعت‌های نوعی در چرخشی

به اندازه‌ی r از مرتبه‌ی $\delta u_f(r) \sim u_r$ است، داریم:

$$Re_r \sim Re \times \left(\frac{r}{L}\right)^3,$$

که در آن از برآورد قبلی که برای نرخ اتلاف داشتیم استفاده شده و عدد رینولدز اصلی سامانه هم برابر $Re \sim L\Delta u_a/\nu$ است. اکنون می‌توانیم طول کلموگراف سامانه را تخمین بزنیم. با قرار دادن $1 \sim Re_{\ell_\eta}$ ، اندازه‌ی کوچکترین چرخش برابر می‌شود با: $\ell_\eta \sim L \times Re^{-\frac{1}{3}}$. با استفاده از تعریف عدد رینولدز و جانشانی از رابطه‌ی $\epsilon = (\Delta u_a)^3/L$ ، مقیاس طولی کوچکترین چرخش سامانه برابر می‌شود با:

$$\ell_\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$$

. با تعریف فرکانس مربوط به این چرخش به صورت $\omega_* \sim u_a/\ell_\eta$ ، سرعت مشخصه و فرکانس مشخصه‌ی کوچکترین چرخش به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$\delta u_f(r) \sim \Delta u_a \times Re^{-\frac{1}{3}}, \quad \omega_* \sim \frac{u_a}{L} \times Re^{\frac{1}{3}}.$$

فواصل کوچک: رژیم اتلاف

مرتبه‌ی بزرگی $\delta u_f(r)$ در مقیاس‌های طولی کوچکتر از ℓ_η را نیز می‌توانیم برآورد کنیم. در این مقیاس‌های طولی، اتلاف مهم است و برای برآورد مقدار نرخ اتلاف می‌توانیم مستقیم قرار دهیم:

$$\epsilon \sim \nu(\nabla \times \mathbf{u})^2 \sim \nu\left(\frac{\delta u_f(r)}{r}\right)^2,$$

با مقایسه‌ی این مقدار با رابطه‌ی $\epsilon \sim (\Delta u_a)^3/L$ ، به دست می‌آید:

$$\delta u_f(r) \sim \Delta u_a \times (r/L) \times Re^{\frac{1}{3}}, \quad r \leq \ell_\eta.$$

خلاصه‌ی نتایج بالا به صورت زیر می‌شود:

$$\delta u_f(r) \sim \begin{cases} \Delta u_a & r \leq L \\ \Delta u_a \times (r/L)^{\frac{1}{3}} & \ell_\eta \ll r \ll L \\ \Delta u_a \times (r/L) \times Re^{\frac{1}{3}} & r \leq \ell_\eta. \end{cases} \quad (A.11)$$

در یک نقطه‌ی مشخص درون شاره، سرعت افت‌وخیز کننده چطور با زمان عوض می‌شود؟ این کمیت را به صورت $\delta u_f(r) = u_f(r, t) - u_f(r, 0)$ نشان می‌دهیم. بنا به همگنی مکانی، این کمیت تنها به زمان بستگی دارد. در زمان‌های کوچک و از مرتبه‌ی $T = L/u_a$ ، تغییرات زیادی در سرعت دیده نمی‌شود ولی در مقیاس‌های زمانی بزرگتر از L/u_a تغییراتی در سرعت از مرتبه‌ی Δu_a مشاهده می‌شود. استدلال‌هایی مشابه آنچه در بالا ارائه شد، رفتار زمانی افت‌وخیزهای سرعت را به صورت زیر به دست می‌دهد:

$$\delta u_f(t) \sim \begin{cases} \Delta u_a \left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{3}} & t < T \\ \text{ثابت} & t \sim T \\ \Delta u_a & t \gg T. \end{cases} \quad (9.11)$$

۱۰.۱۱ قانون ریچاردسون

قانون تجربی ریچاردسون یکی مهم‌ترین مشاهدات تجربی است که در فهم پدیده‌ی تلاطم کمک کرده است. طبق قانون ریچاردسون میانگین توان دوم فاصله بین ذرات غوطه‌ور در شاره‌ی متلاطم (مثلاً بالن‌هایی که در جو متلاطم رها می‌شوند) با توان سوم زمان رشد می‌کند. اگر فاصله‌ی بین ذرات غوطه‌ور در شارش متلاطم را با R نشان دهیم، قانون ریچاردسون به صورت $\langle R^2(t) \rangle \sim t^3$ می‌شود. قانون کلموگرف که با فرضیات همگنی و همسانگردی شارش متلاطم به دست آمد، ارتباط مستقیمی با رابطه‌ی تجربی ریچاردسون دارد. برای اینکه هم ارزی دو قانون کلموگرف و ریچاردسون را نشان دهیم به صورت زیر از قانون کلموگرف شروع می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt} R(t) \sim \delta u_f(R) \sim (\epsilon R)^{\frac{1}{3}},$$

با انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه، قانون تجربی ریچاردسون به صورت $\langle R^2(t) \rangle \sim \epsilon t^3$ به دست می‌آید. اگر قانون تجربی ریچاردسون را بپذیریم، از ترکیب آن با قانون کلموگرف که از اصول تقارنی به دست آمده است، به قانون متناهی بودن نرخ اتلاف انرژی ϵ ، می‌رسیم.

۱۱.۱۱ توزیع فضایی و زمانی انرژی

در یک شارش متلاطم، قسمت‌های چرخشی شارش که اندازه‌های مختلفی دارند با مدهای فوریه

که طول موجهای مختلفی دارند متناظر می‌شوند. می‌خواهیم پیرسیم انرژی جنبشی شارش چطور بین مدهای مختلف توزیع شده است. انرژی جنبشی بر واحد جرم مربوط به چرخش‌هایی با اندازه λ تا $\lambda + d\lambda$ را با $\mathcal{E}(\lambda)d\lambda$ نشان می‌دهیم. عدد موج که با عکس طول موج متناسب است را با k نشان می‌دهیم. در عمل توزیع انرژی برای مدها با عدد موج k تا $k + dk$ کمیت بهتری برای مطالعه است. آن را با $E(k)dk$ نشان می‌دهیم. پیش از این انرژی جنبشی تجمعی موجود در مدهای حرکتی با طول موج‌های کوچکتر از λ را با $\frac{1}{2}\langle |u_K|^2 \rangle$ نشان داده‌ایم. می‌دانیم انرژی ذخیره شده در جریان‌های چرخشی با اندازه‌های بین λ تا λ با $\delta u_f(\lambda)$ متناسب است. پس داریم:

$$\frac{1}{2}\delta u_f(\lambda) \sim \int_0^\lambda \mathcal{E}(\lambda')d\lambda' = \int_k^\infty E(k)dk,$$

با توجه به رابطه‌ی $\delta u_f(\lambda) \sim (\epsilon\lambda)^{\frac{1}{3}}$ ، از رابطه‌ی بالا می‌بینیم که باید توزیع انرژی در فضای فوری به شکل زیر باشد:

$$E(k) \sim \epsilon^{\frac{1}{3}} k^{-\frac{5}{3}}. \quad (10.11)$$

توجه شود که رابطه‌ی اخیر با آنالیز ابعادی هم سهولت قابل دستیابی بود. توزیع زمانی انرژی یا بطور معادل توزیع فرکانسی انرژی قابل محاسبه است. توزیع فرکانسی انرژی را با $\bar{E}(\omega)$ نشان می‌دهیم. از آنجا که $\bar{E}(\omega) = E(k)\frac{dk}{d\omega}$ و $\omega \sim u_a k$ توزیع فرکانسی انرژی بصورت زیر می‌شود:

$$\bar{E}(\omega) \sim (u_a \epsilon)^{\frac{1}{3}} \omega^{-\frac{5}{3}}. \quad (11.11)$$

۱۲.۱۱ خواص آماری شارش متلاطم

همانطور که در قسمت‌های پیشین اشاره شد، شارش متلاطم با افت‌وخیزهای شدید کمیات فیزیکی از جمله میدان سرعت مشخص می‌شود. برای بیان کمی این خواص از مکانیک آماری کمک گرفته می‌شود. تابع ساختار مرتبه‌ی n ام میدان سرعت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_n(\delta \mathbf{u}, \mathbf{r}, t) = \left\langle \frac{(\delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})^n}{r^n} \right\rangle, \quad (12.11)$$

که در آن $\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(r, t) - \mathbf{u}(\circ, t)$ ، اختلاف سرعت شارش در دو نقطه از فضا است که از هم به اندازه r دور هستند. از نظر ریاضی، برای این که اطلاعات کاملی از میدان افت و خیز کننده ی سرعت داشته باشیم باید تمام مراتب تابع ساختار را داشته باشیم. اگر تمام مراتب تابع ساختار را داشته باشیم، می توانیم از آنها تابع توزیع احتمال $P(\delta \mathbf{u}, r, t)$ را به دست آوریم. عکس این موضوع هم درست است، با در دست داشتن تابع توزیع، میانگین تمامی کمیات، به طور مثال میانگین تابع دلخواه f به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\langle f(\delta \mathbf{u}, r) \rangle = \int d\delta \mathbf{u} d\mathbf{r} f(\delta \mathbf{u}, r) P(\delta \mathbf{u}, r, t).$$

آرزوی نهایی متخصصان تلاطم، یافتن توابع ساختار با روش های ریزمقیاس است به طوری که با نتایج تجربی هم سازگار باشند.

کلموگرف با شروع از معالیه ناویه-استوکس و اعمال شرایط همگنی و همسانگردی، علاوه بر خصوصیات و نتایج گفته شده در قسمت قبلی، توانسته است تمامی توابع ساختار میدان سرعت شارش متلاطم را به دست آورد. اجازه دهید تنها به نتایج نهایی آن اشاره کنیم و خواننده ی علاقه مند را به مراجع ارجاع می دهیم. تابع توزیع احتمال $P(\delta \mathbf{u}, r)$ را در نظر بگیرید. بنا به همسانگرد بودن شارش در رژیم اینرسی، انتظار شکلی به صورت $P(\delta u, r)$ را برای تابع توزیع داریم. در صورتی که تقارن وارونی زمان داشته باشیم، انتظار می رود تابع توزیع در رابطه ی $P(\delta u, r) = P(-\delta u, r)$ صدق کند. همچنین ناوردایی تحت تغییر مقیاس، وابستگی تابع توزیع به متغیرهایش را به صورت زیر تقلیل می دهد:

$$P(\delta u, r) = \frac{1}{\delta u} f\left(\frac{\delta u}{r^h}\right),$$

که در آن $f(x)$ یک تابع دلخواه و h یک نمای نامشخص است. در رژیم اینرسی، نتیجه ی کلموگرف برای تابع ساختار مرتبه ی ۲ به صورت $S_2 \sim r^{\frac{2}{3}}$ و برای تابع ساختار مرتبه ی ۳ به صورت $S_3 \sim -\frac{4}{5}\epsilon r$ می شود. دقت کنید که این دو نتیجه ی مهم، متناهی بودن مقدار اتلاف و قانون تجربی ریچاردسون را به دست می دهند. نتیجه ی کلموگرف برای تمامی توابع ساختار در رژیم اینرسی به صورت زیر است:

$$S_n \sim (\epsilon/r)^{\frac{n}{3}}.$$

دقت کنید که این نتیجه با یک تحلیل ابعادی و به سهولت قابل حصول است. علاوه بر دست‌آوردهای خوبی که در بالا به آن اشاره شد، نظریه‌ی کلموگرف یک نتیجه‌ی بسیار مهم دیگر هم دارد. تابع همبستگی توان سوم سرعت، غیر صفر و متناسب با ϵ می‌شود. غیر صفر شدن این تابع همبستگی، به معنای شکست تقارن وارونی زمان است یعنی $P(\delta u, r) \neq P(-\delta u, r)$. توجه کنید که معادله‌ی اوپلر که حد $\eta \rightarrow 0$ معادله‌ی ناویه-استوکس است، تقارن وارونی زمان را دارد.

درست است که نظریه‌ی کلموگرف موفقیت بزرگی در توصیف متناهی شدن اتلاف و ارائه‌ی تصویری کیفی از تلاطم داشته است ولی پیشگویی توان $\frac{7}{3}$ برای توابع ساختار، اندکی با واقعیت‌های تجربی برای $n > 3$ اختلاف دارد. رهیافت‌های جدید که هنوز اتفاق نظر کاملی روی آنها نیست، سعی در بهبود نتایج کلموگرف دارند. دقت کنید که تلاطم، به صورت تاریخی اولین سامانه‌ی بحرانی است که توجه فیزیک‌دانان را به خود جلب کرده بود. بحرانی بودن تلاطم، از بدون مقیاس بودن آن در رژیم اینرسی ناشی می‌شود. در اینجا نیز مشابه گذار فاز بحرانی در سامانه‌های ترمودینامیکی که تابع همبستگی شکلی توانی و همگن از مختصات می‌گیرد، تابع ساختار میدان سرعت تابعی همگن است. گروهی اعتقاد دارند که نتایج نظریه‌ی کلموگرف در تلاطم مشابه موفقیت‌هایی است که نظریه‌های میدان متوسط در پدیده‌های بحرانی مربوط به گذار فاز دارند. در گذار فازهای پیوسته که سامانه بحرانی می‌شود، نظریه‌ی میدان متوسط قادر نیست تا سهم کامل افت‌وخیزها را به حساب بیاورد. در این سامانه‌ها نظریه‌ی گروه بازبهنجارش با در نظر گرفتن افت‌وخیزهای بدون مقیاس، می‌تواند رفتار جهانی نقطه‌ی بحرانی را به درستی به دست دهد. به نظر می‌رسد جای چنین توصیفی در سامانه‌های متلاطم همچنان خالی است.

پرسش‌ها

۱.۱۱ برای مطالعه‌ی پایداری جواب حالت پایا، میدان شارشی را به صورت مجموع دو قسمت پایا و نوسانی در نظر گرفتیم. نشان دهید که نرخ تغییرات انرژی جنبشی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt} \int d^3\mathbf{r} \frac{\mathbf{u}_1^2}{2} = T - \frac{1}{Re} D,$$

که در آن

$$T = - \int d^3\mathbf{r} u_{1i} u_{1j} \partial_j u_{1i},$$

و

$$D = \int d^3\mathbf{r} (\partial_j u_{1i})^2.$$

۲.۱۱ آیا دود سیگار که در هوا پخش می‌شود، متلاطم است؟

۳.۱۱ معادله‌ی ناویه-استوکس را برای میدان $\Omega(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ بازنویسی کنید.

معادله‌ی به‌دست آمده شبیه معادله‌ی پخش برای میدان جدید است. ضریب پخش در این

معادله نشان دهنده‌ی چیست؟

۴.۱۱ در مسأله‌ی فصل؟ نشان دادیم که شرط عدد رینولدز کم برای جریان آرام اطراف کره،

تنها برای یک لایه‌ی متناهی حول کره صحت دارد. مرتبه‌ی بزرگی این لایه، که به آن

لایه‌ی مرزی گفته می‌شود را برای توپ فوتبال، یک اتومبیل و یک هواپیما تخمین بزنید.

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

۱۲

شارش در محیط‌های الکتریکی، الکتروکینتیک

شارش در محیط‌های الکتریکی موضوع بحث الکتروکینتیک است. در این مسائل معمولاً شارش تحت تاثیر مرزهای باردار و مجموعه‌ای از بارهای آزاد متحرک که در آن شارش محلول هستند، قرار دارد. با مطالعه موارد پرکاربردتر، دیده می‌شود که مسائل الکتروکینتیک با حرکت مماسی شارش نزدیک مرزهای باردار در ارتباط مستقیم است. مثال‌های مختلفی از سیستم‌های الکتروکینتیکی در طبیعت وجود دارد. خاک رس محلول در آب یک سامانه‌ی الکتریکی است، زیرا دانه‌های سازنده خاک رس که از اندازه‌های چند نانومتر تا چند ده میکرومتری توزیع می‌شوند، مقادیر قابل توجهی بار الکتریکی منفی با خود حمل می‌کنند. الکتروفورسیس خاک رس یا حرکت ذرات خاک رس محلول در آب در اثر اعمال میدان الکتریکی خارجی، یکی از قدیمی‌ترین مشاهدات پدیده‌های الکتروکینتیک است.

نمک‌ها عموماً در محیط‌های آبی بصورت یونیزه درآمده و یونهای آزادی که از این طریق به آب افزوده می‌شود، اثرهای جالبی را به همراه خواهند داشت. نیروهای الکتریکی اعمال شده به

بارهای الکتریکی، چه از طریق میدان‌های الکتریکی خارجی چه از جانب دیگر یونهای موجود در سامانه، به شاره منتقل شده و جریانهای شارشی را تحت تاثیر قرار می‌دهند. شارش درون سلولی و خون نمونه‌های جالبی از این قبیل مسائل هستند. دی‌ان‌ای DNA، میکرولوله‌ها، فیلامنت‌های اکتین و دیگر ماکرومولکولهای معلق درون سلول دارای بار الکتریکی هستند و شارش‌های درون سلولی که برای بقای سلول و انجام فعالیت‌های حیاتی آن ضروری‌اند، به‌صورت مستقیم از نیروهای الکتریکی تاثیر می‌پذیرند.

نیروهای الکتریکی، هیدرودینامیک و افت‌وخیزهای گرمایی، سه اثر مهم‌اند که در پدیده‌های الکتروکینتیک نقش دارند. به این سبب، در این شاخه از فیزیک، معادلات مربوط به سه‌شاخه‌ی مهم فیزیک، الکتروستاتیک، هیدرودینامیک و مکانیک آماری با هم ترکیب می‌شوند تا شرح کاملی از پدیده‌های فیزیکی رخ داده شده، ارائه شود. یکی از قسمت‌های پیچیده‌ی مسأله، مکانیک آماری سامانه‌های الکتریکی است. مکانیک آماری این سامانه‌ها به سبب بلندبرد بودن نیروهای الکتریکی، اجازه‌ی مطالعه‌ی کامل و دقیق مسأله را به صورت تحلیلی نمی‌دهند. با استفاده از تقریب میدان متوسط، این قسمت مسأله را می‌توان ساده کرد. این ساده‌سازی ما را به معادلات تلفیقی پواسون-بولتزمن می‌رساند. در این نوشتار، تمام محاسبات در تقریب میدان متوسط انجام می‌شود. هرچند این نظریه موفقیت‌های زیادی در توصیف بسیاری از پدیده‌ها را دارد، ولی برخی اتفاقات مثل ربایش بارهای همانم در محیط‌های الکتریکی افت‌وخیز کننده (مچاله شدن DNA و متجمع شدن رشته‌های اکتین)، در قالب این نظریه توصیف نشدنی هستند. به نظر می‌رسد در این موارد، شبیه‌سازی رایانه‌ای تنها راه حل مسأله است.

در این نوشتار، سعی می‌کنیم به صورت مختصر به چند موضوع پرکاربرد الکتروکینتیک که عبارتند از الکترواسموسیس، فورسیس، پتانسیل استریمینگ و الکتروفورسیس اشاره کنیم.

۱.۱۲ سطوح باردار و دولایه‌ی الکتریکی

سطوح و مرزهایی که بارالکتریکی سطحی دارند، نقش اساسی در مسائل الکتروکینتیک دارند. سازوکارهای متنوعی باعث می‌شوند تا مرزها و سطوحی که در مجاورت محلول‌های یونی قرار می‌گیرند، بار الکتریکی خالص کسب کنند. عموماً غلظت، PH و دیگر خواص شیمیایی محلول

نقش مهمی در نوع و میزان بار الکتریکی سطحی دارند. به عنوان مثال یک غشای پلی آمید را در نظر بگیرید. روی غشا، گروههای اسیدی کربوکسیل $-COOH$ و بازی آمین $-NH_2$ وجود دارند. در PH خیلی کم (زیاد)، بار خالص سطحی مثبت (منفی) روی غشا تولید می شود. این بارهای الکتریکی از واکنش گروههای اسیدی و بازی با محلول ایجاد می شوند. در PH های میانی و در نقطه‌ی موسوم به *Isoelectric point*، بارهای مثبت و منفی هر دو روی سطح وجود دارند ولی میانگین بار سطحی صفر خواهد بود.

در حالت ایستا، تصویر نسبتاً ساده شده‌ای از پیکربندی بارهای الکتریکی آزاد محلول در مجاورت صفحه‌ی باردار می توان ارائه کرد. در مجاورت صفحه و در ناحیه‌ای بسیار باریک (از مرتبه اتمی)، بارهایی که از بارشان مخالف بار سطح است، تجمع می کنند. در این لایه‌ی موسوم به لایه‌ی اشترن، بارهای ناهمنام که متشکل از یونها و گروههای مولکولی بزرگتر هستند، به سبب نیروهای الکتریکی و غیر الکتریکی (پیوندهای هیدروژنی، کووالانسی و غیره) قویاً به سطح مقید هستند. بار ناحیه‌ی اشترن به میزانی نیست که بار خالص سطح را خنثی کند. بعد از لایه‌ی اشترن، یونهاى آزاد (غیر مقید به سطح) با بار مخالف سطح قرار می گیرند که افت و خیزهای گرمایی دارند. ضخامت این لایه از رقابت بین نیروی جاذبه‌ی الکتریکی (تمایل به جذب به سطح) و اثرهای آنتروپی (تمایل به افت و خیز و گریز از سطح) تعیین می شود. بار خالص مخالفی که در این لایه‌ی موسوم به لایه‌ی دیفیوزی جمع می شود، به میزانی است که بصورت موثر بار سطحی روی صفحه را خنثی می کند. مجموعه‌ی ناحیه‌ای که بارهای مخالف اجتماع کرده اند و خود سطح، یک ساختار الکتریکی می سازد که به آن دولایه‌ی الکتریکی گفته می شود.

ضخامت بسیار کم لایه‌ی اشترن، مطالعه‌ی نظری یا تجربی آن را بسیار دشوار می کند. عموماً می توان فرض کرد لایه‌ی اشترن جزیی از سطح است. مقدار پتانسیل الکتریکی روی قسمت خارجی لایه‌ی اشترن قابل اندازه گیری است و به پتانسیل ζ معروف است. معمولاً ناگزیریم تا از ζ به عنوان معیاری تقریبی از پتانسیل سطح در نظر بگیریم. میزان ضخامت دولایه‌ی الکتریکی تحت تاثیر عوامل مختلفی مثل میزان بار سطحی و چگالی یونها است. هدف اساسی و پیچیدگی عمده‌ای که در مسایل الکتریکی با آن مواجه هستیم، به رفتار دینامیکی و خواص فیزیکی این دولایه در مسایل مربوط می شود.

با در نظر گرفتن حرکت شار و مرزها، مسائل الکتروکینتیک را می توان در دو قالب کلی

گنجانند. در مسایلی مانند الکتروفورسیس یا رسوب، شاره ساکن است و میدان خارجی باعث حرکت مرزها (کلوئیدها) می‌شود. در مسائل نوع دوم، مرزهای باردار ساکن و شاره حرکت می‌کند. الکترو اسموسیس و استریمینگ پتشیال از مثال‌های این دسته هستند. در قسمت بعدی، معادلات اساسی دینامیکی حاکم بر سامانه‌های الکتریکی را نوشته و در ادامه برخی از مسایل را بررسی می‌کنیم.

۲.۱۲ معادلات حرکت

برای شارش تراکم ناپذیر و در حد $Re \ll 1$ که مختص حرکت کلئیدهاست، معادلات حرکت شاره به صورت زیرند:

$$\eta \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) - \nabla p(\mathbf{r}) + \mathbf{f}(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0,$$

که در آن میدان سرعت و فشار شاره با $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ و $p(\mathbf{r})$ نشان داده شده‌اند و نیروی الکتریکی که توسط یونها به شاره وارد می‌شود با $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ نشان داده شده است. برای سهولت، از این به بعد شارهای یونی را به حالت متقارن که در آن دو نوع یون تک ظرفیتی با بارهای مخالف هم داریم، محدود می‌کنیم. مثلاً محلول نمک طعام در آب در این دسته می‌کند. تعمیم فرمول‌بندی به نمک‌هایی با ظرفیت بالاتر، پیچیدگی خاصی ندارد. نیروی الکتریکی وارد بر یونها از غلظت یونهای مثبت و منفی که با $n^\pm(\mathbf{r})$ نشان داده می‌شوند و پتانسیل الکتریکی $\psi(\mathbf{r})$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -e(n^+(\mathbf{r}) - n^-(\mathbf{r}))\nabla\psi(\mathbf{r}),$$

که در آن $e > 0$ اندازه‌ی بار الکتریکی الکترون است. پتانسیل الکتریکی در معادله‌ی الکتروستاتیک به صورت زیر صدق می‌کند:

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) = -\frac{e}{\epsilon\epsilon_0}(n^+ - n^-).$$

بارهای الکتریکی غوطه‌ور در شاره، به سبب افت‌وخیزهای گرمایی (دیفیوژن)، نیروهای الکتریکی و همرفت، جاری می‌شوند. چگالی جریان یونها به صورت زیر است:

$$\mathbf{j}^\pm = -D\nabla n^\pm + n^\pm \times \mu \times (\mp e\nabla\psi) + n^\pm \mathbf{u},$$

که در آن جمله‌ی اول سهم دیفیوژن، جمله‌ی دوم جریان سوق ناشی از نیروهای الکتریکی و جمله‌ی آخر سهم ناشی از همرفت یونها توسط شاره است. در مورد مسائلی که حالت پایا دارند، جریان یونها در معادله‌ی پیوستگی به صورت زیر صدق می‌کنند:

$$\nabla \cdot j^{\pm} = 0.$$

معادلات اساسی بالا به همراه شرایط مرزی مربوط به صفحات باردار و شرایط مرزی مربوط به میدان‌های خارجی، چارچوب کلی برای بررسی مسائل الکتروکینتیک را فراهم می‌آورند.

برآورد مرتبه‌ی بزرگی

بهرتر است پیش از بررسی معادلات دینامیکی، برآوردی از مرتبه‌ی بزرگی کمیات داشته باشیم. فرض کنید مساله‌ی الکتریکی مورد نظر، مطالعه‌ی شارش اطراف یک کلئید باردار کروی شکل به شعاع a باشد (مساله‌ی الکتروفرسیس). مرتبه‌ی بزرگی کمیات دخیل بصورت زیرند:

$$\epsilon\epsilon_0 \sim 80 \times 885 \times 10^{-12}, \quad a \sim 10^{-6} \text{m}, \quad k_B T \sim 0.02 \text{eV}, \quad \eta \sim 10^{-3} \text{Pas.s}, \quad e \sim 10^{-19} \text{C},$$

و برای محلول یونی با غلظت یک میلی مولار داریم:

$$n_b \sim 1 \text{mM} = 10^{-3} \frac{6.02 \times 10^{23}}{1 \text{lit}} \sim 10^{23} \text{m}^{-3},$$

و

$$v_0 \sim 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \lambda_{DH} \sim 10^{-8} \text{m}, \quad Pe \sim 0.1$$

برای تخمین مویلیتی یونها، اگر شعاع یونها را برابر با $a_{\text{ion}} \sim 1 \text{nm}$ بگیریم، داریم:

$$\mu \sim \frac{1}{6\pi\eta a_{\text{ion}}} \sim \frac{1}{10 \times 10^{-3} \times 10^{-9}} \sim 10^{11}.$$

حالت استاتیک

محلول یونی متقارن با چگالی یونی n_b را در نظر بگیرید که در مجاورت یک صفحه‌ی نامتناهی

باردار با بار سطحی q_s قرار داده می‌شود. در غیاب میدان خارجی، این مساله به حالت ایستا می‌رسد. برای مطالعه‌ی توزیع بارها در مجاورت صفحه، معادله‌ی زیر باید حل شود:

$$\nabla^2 \psi = \frac{en_b}{\epsilon \epsilon_0} \sinh\left(\frac{e\psi}{k_B T}\right), \quad \epsilon \epsilon_0 \hat{n} \cdot \nabla \psi|_S = -q_s, \quad (1.12)$$

که در آن قرار داده‌ایم $D = \mu k_B T$. معادله بالا با صفر قرار دادن سرعت شار و جریان بارها در معادلات دینامیکی به دست آمده است. با توجه به تقارن مساله، پتانسیل تنها به فاصله از صفحه بستگی دارد. فاصله از صفحه را با z نشان می‌دهیم. معادله‌ی دیفرانسیل به دست آمده، معادله‌ی گوی-چپمن نامیده می‌شود. برای حل این معادله اجازه دهید ابتدا فرض کنیم: $e\psi \ll k_B T$ و معادله را خطی کنیم. در این صورت معادله‌ی خطی شده بصورت $\lambda_{DH}^{-2} \psi = \psi''$ می‌شود که در آن: $\lambda_{DH} = \sqrt{(\epsilon \epsilon_0 k_B T) / (2e^2 n_b)}$ طول مشخصه‌ی دبای-هاکل است. به معادله‌ی خطی شده به دست آمده نیز معادله‌ی دبای-هاکل گفته می‌شود. حل این معادله‌ی به فرم زیر است:

$$\psi = \psi_s e^{-z/\lambda_{DH}},$$

در این پاسخ ψ_s مقدار پتانسیل روی سطح است که با اعمال شرط مرزی، می‌توانیم آن را برحسب چگالی بار سطحی بازنویسی کنیم. دیده می‌شود که طول دبای-هاکل، طول مشخصه‌ای است که در ناحیه‌ی به آن ضخامت و در مجاورت صفحه، بار الکتریکی و پتانسیل به میزان قابل توجه‌ای غیر صفر است. در واقع این طول، معیاری از ضخامت ناحیه‌ی دیفیوژو است.

نظریه‌ی دبای-هاکل تنها در پتانسیل‌های سطحی خیلی کوچک (متناظر با بار سطحی کم) صحت دارد و در پتانسیل‌های بزرگ، لازم است تا معادله‌ی اصلی گوی-چپمن با دقت بیشتری بررسی شود. خوشبختانه برای هندسه‌ی مورد نظر ما در این مساله، پاسخی دقیق برای این معادله وجود دارد. با بررسی پاسخ دقیق معادله دیفرانسیل گوی-چپمن ملاحظه می‌شود که در پتانسیل‌های خیلی بزرگ (متناظر با بار سطحی بزرگ)، مقدار سطحی پتانسیل به عدد ثابت $k_B T / e$ میل می‌کند و نوعی اثر اشباع در پتانسیل الکتریکی وجود دارد.

جواب ایستای بالا اطلاعات خوبی از ساختار دولایه‌ی الکتریکی در مسائل الکتروکینتیک می‌دهد. مثلاً اگر صفحه‌ی باردار با یک بار کروی جایگزین شود، در حدی که شعاع بار از طول دبای بسیار کوچکتر است، همچنان تصویر دولایه‌ی الکتریکی کنار صفحه برای دو لایه‌ی

الکتریکی کنار کره هم قابل استفاده خواهد بود. در ادامه از تصویر ساده‌ی بالا برای بررسی برخی مثال‌های دینامیکی استفاده خواهد شد.

۳.۱۲ استریمینگ پتشیال

یکی از مسایل پرکاربرد الکتروکینتیک، موضوع استریمینگ پتشیال است که از آن برای مطالعه‌ی خواص سطوح و اندازه‌ی گیری بار سطحی آنها استفاده می‌شود. کانالی را در نظر بگیرید که دیواره‌های آن توسط سطح یا غشای مورد نظر ما ساخته شده است. با اعمال اختلاف فشار به شاره‌ی یونی درون این کانال، جریانی از نوع پوآزوی در طول کانال برقرار خواهد شد. این جریان، یونها را جابجا کرده و اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دوسوی کانال که به دو مخزن شاره وصل هستند، ایجاد می‌شود. دو مخزن مورد اشاره، از نظر الکتریکی به هم ارتباط خارجی ندارند. هدف بررسی میزان اختلاف پتانسیل یا به طور معادل میدان الکتریکی تولید شده به خواص الکتریکی سطح است.

اجازه دهید برای بررسی این موضوع، مساله را ساده‌تر کنیم. یک صفحه‌ی باردار با پتانسیل سطحی ϕ را در نظر بگیرید که از یک سو با شاره‌ی یونی در تماس است. فرض کنید یک جریان برشی ساده بالای این صفحه داریم. آیا انتظار داریم در این مساله یک میدان الکتریکی تولید شود؟ برای اینکه بتوانیم مساله‌ی ساده شده را به نوعی معادل مساله‌ی اصلی بگیریم، اجازه دهید این فرض که باید حرکت بارها به حالت ایستا برسد را به مفروضات اضافه کنیم. در مساله‌ی واقعی، اتصال به مخازن، حالت ایستای بارها را تضمین می‌کند. در این صورت میدان الکتریکی القایی وجود خواهد داشت. به سادگی می‌توانیم سازوکار تولید میدان الکتریکی در این مساله را بفهمیم. برای سهولت فرض کنید بار صفحه مثبت است. اگر شارشی نداشته باشیم، مقداری بار منفی خالص درون ضخامتی به اندازه‌ی طول دبای بالای این صفحه جمع می‌شود و خارج آن محلول یونی تقریباً خنثی است. شارش شاره باعث می‌شود تا جریانی همرفتی از بارهای منفی درون لایه‌ی دبای همراستای با جریان شاره برقرار شود. از آنجا که در حالت پایا، این جریان خالص بار قرار نیست استمرار یابد، یک میدان الکتریکی القا می‌شود به صورتی که جریان همرفتی را خنثی کند. در این مورد، میدان الکتریکی القا شده باید در راستای شارش باشد. اگر لایه‌ی دبای

را خیلی نازک بگیریم، اثر میدان الکتریکی روی بارهای (یون‌های) آزاد خارج لایه‌ی دبای قوی‌تر و قابل توجه‌تر دیده می‌شود. این میدان یونهای آزاد منفی (مثبت) را در راستای مخالف (موافق) جهت شارش حرکت می‌دهد. در نتیجه، جریان خالص بارهای منفی که در راستای خلاف شارش تولید می‌شود، آنقدر است که جریان همرفتی اولیه را خنثی کند. با این شرط می‌توانیم اندازه‌ی میدان الکتریکی القا شده را هم بدست آوریم.

راستای عمود بر صفحه را با z نشان می‌دهیم. فرض کنید شارش برشی در راستای $\hat{x}$ بصورت $\mathbf{u} = \gamma z \hat{x}$ بالای صفحه برقرار باشد که در آن γ اندازه‌ی برش شاره است. اندازه‌ی صفحه در راستای $\hat{y}$ (عمود بر جهت شارش) را با $L_y \gg \lambda_{DH}$ و ضخامت شاره‌ی بالای صفحه را با $L_z \gg \lambda_{DH}$ نشان می‌دهیم. جریان همرفتی بارها برابر است با:

$$L_y e \gamma \int_0^{L_z} (n^+ - n^-) z dz,$$

با جایگزاری نتایج تقریبی دبای-هاکل برای توزیع بار کنار صفحه، جریان همرفتی به صورت $-L_y \gamma e \epsilon_0 \zeta \lambda_{DH}^{-2}$ می‌شود. اکنون فرض کنید، میدان الکتریکی القا شده با اندازه‌ی E داریم. با صرفنظر کردن از لایه‌ی دبای، جریان یونی متناظر با این میدان در خارج ناحیه‌ی دبای برابر است با: $2 L_y L_z e^2 \mu n_b E$. این دو جریان باید همدیگر را خنثی کنند. در نتیجه برای رسیدن به حالت ایستا میدان الکتریکی القا شده برابر می‌شود با:

$$\mathbf{E} = \frac{\gamma \zeta \lambda_{DH}^2}{L_z \mu k_B T} \hat{x}.$$

۴.۱۲ الکترواسموسیس

تولید شارش کنار مرزهای باردار توسط میدان الکتریکی خارجی به مساله‌ی الکترواسموسیس معروف است. صفحه‌ی باردار قبلی را در نظر بگیرید. اکنون میدان الکتریکی خارجی $\mathbf{E} = E_\infty \hat{x}$ را به مساله اعمال می‌کنیم. می‌خواهیم میدان سرعت تولید شده را به دست آوریم. با توجه به هندسه‌ی مساله و تقارن آن، میدان سرعت به شکل $\mathbf{u} = u(z) \hat{x}$ خواهد بود. با صرفنظر کردن از میدان فشار، معادله‌ی دینامیکی شارش و معادله‌ی پتانسیل الکتریکی به صورت زیر می‌شوند:

$$\eta u'' = -e(n^+ - n^-) E_\infty, \quad \psi'' = -\frac{e}{\epsilon \epsilon_0} (n^+ - n^-).$$

با ترکیب این دو معادله، به معادله‌ی $u'' = (\epsilon\epsilon_0/\eta)E_\infty\psi''$ برای میدان شارش می‌رسیم. با انتگرالگیری از این معادله به رابطه‌ی $u = (\epsilon\epsilon_0/\eta)E_\infty(\psi - \zeta)$ و با جایگزینی پاسخ دبی-هاکل خواهیم داشت:

$$u = (\epsilon\epsilon_0/\eta)E_\infty\zeta(e^{-z/\lambda_{DH}} - 1).$$

از میدان سرعت بدست آمده دیده می‌شود که با دور شدن از صفحه و پس از یک لایه‌ی نازک دبی، شارش به مقدار حدی و یکنواخت خود می‌رسد. در مورد مساله‌ی الکترواسموسیس، اگر در مقیاس‌های طولی بزرگتر از طول دبی نگاه کنیم، به نظر می‌رسد که شارش در شرط لغزشی کنار سطح باردار صدق می‌کند.

۵.۱۲ الکتروفورسیس

کلوئیدهای باردار معلق در محلولهای نمکی، در اثر نیروهای ناشی از میدان الکتریکی خارجی حرکت می‌کنند. به این پدیده، الکتروفورسیس گفته می‌شود. با توجه به وابستگی اندازه‌ی سرعت حرکت به اندازه‌ی کلوئیدها و مقدار پتانسیل سطحی آنها، از آزمایش الکتروفورسیس به عنوان یک روش تجربی برای اندازه‌سنجی کلوئیدها استفاده می‌شود. کلوئیدی کروی شکل به اندازه‌ی a و بار کل سطحی Q را در نظر بگیرید. این کلوئید درون یک محلول آبی حاوی نمک تک ظرفیتی است (انتخاب نمک تک ظرفیتی، برای ساده‌تر کردن معادلات است و بررسی حالت کلی‌تر پیچیدگی خاصی ندارد). نمک تک ظرفیتی، مثل نمک طعام، در آب یونیزه شده و یونهای مثبت و منفی با بار تک الکترون ($e = 1.6 \times 10^{-19}C$) را ایجاد می‌کنند. با اعمال میدان الکتریکی خارجی $\mathcal{E}$ ، کلوئید با سرعت پایای U_s حرکت می‌کند. هدف ما پیدا کردن رابطه‌ی برای سرعت کلوئید است.

خصوصیاتی از شاره که در حرکت کلوئید مهم هستند عبارتند از: شکسانی شاره η ، چگالی شاره ρ ، ثابت دی‌الکتریک محیط $\epsilon\epsilon_0$ ، انرژی گرمایی محیط $k_B T$ ، ضریب دیفیوژن یونها و موبیلیتی یونها. برای سهولت ضریب دیفیوژن و موبیلیتی هر دو نوع یون را با هم برابر و آنها را به ترتیب با D و μ نشان می‌دهیم. غلظت نیز نقشی اساسی در رفتار شارش دارد. پیش از وارد کردن کلوئید و اعمال میدان الکتریکی، نمک بصورت یکنواخت در سرتاسر محلول توزیع

می‌شود که غلظت این حالت یکنواخت را با n_b نشان می‌دهیم.

دستگاه بدون بعد

پیش از حل معادلات، بهتر است آنها را در دستگاه واحدهای بدون بعد بازنویسی کنیم. برای این منظور ابتدا کمیت‌های مشخصه‌ی مسأله را تشخیص می‌دهیم. انتخاب طبیعی برای طول و پتانسیل مشخصه به قرار زیرند:

$$\frac{k_B T}{e} \sim \text{پتانسیل مشخصه}, \quad a \sim \text{طول مشخصه}$$

برای تعیین سرعت مشخصه‌ی v_0 ، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\eta a v_0 \times a \sim \frac{(\text{انرژی گرمایی})^2}{\text{انرژی الکتریکی}} \sim \frac{(k_B T)^2}{e^2 / (\epsilon \epsilon_0 a)},$$

که از آنجا به دست می‌آید:

$$v_0 \sim \frac{\epsilon \epsilon_0}{\eta a} \left(\frac{k_B T}{e} \right)^2,$$

اکنون نیروی مشخصه هم به صورت زیر می‌شود:

$$\eta a v_0 \sim \text{نیروی مشخصه}.$$

علاوه بر کمیات مشخصه‌ی بالا، در ادامه از اعداد بدون بعد زیر هم استفاده خواهد شد:

$$\begin{aligned} Pe &= \frac{\epsilon \epsilon_0 k_B T}{e^2 \eta \mu}, & \lambda_{DH}^* &= \frac{\epsilon \epsilon_0 k_B T}{2 e^2 n_b}, \\ x &= \frac{a e \mathcal{E}}{k_B T}, & q &= \frac{e Q}{4 \pi \epsilon \epsilon_0 a} \frac{1}{k_B T}, \\ \delta &= \frac{\lambda_{DH}}{a}. \end{aligned}$$

معادلات بدون بعد

با تعاریف بالا برای کمیات مشخصه، می‌توانیم تمامی روابط را بر حسب متغیرهای بدون بعد (متغیر اصلی تقسیم بر کمیت مشخصه‌ی مربوطه) بازنویسی کنیم. برای شلوغ نشدن روابط،

از نمادهای جدیدی برای متغیرهای بدون بعد استفاده نمی‌کنیم و باز هم از نمادهای قبلی برای متغیرهای بدون بعد جدید استفاده می‌کنیم:

$$\nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p + \nabla^2 \psi \nabla \psi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.12)$$

$$\nabla^2 \psi = -\delta^{-2}(n^+ - n^-), \quad (3.12)$$

$$Pe \mathbf{u} \cdot \nabla n^\pm = \nabla \cdot (\nabla n^\pm \pm n^\pm \nabla \psi), \quad (4.12)$$

شرایط مرزی:

$$-\partial_n \psi(r=1) = q, \quad \mathbf{u}(r=1) = 0, \quad \hat{n} \cdot (\nabla n^\pm \pm n^\pm \nabla \psi)(r=1) = 0,$$

$$\mathbf{u}(r \rightarrow \infty) = -U_s \hat{z}, \quad n^\pm(r \rightarrow \infty) = 1, \quad -\nabla \psi(r \rightarrow \infty) = x \hat{z},$$

دقت کنید که در این روابط، غلظت یونها را با n_b بدون بعد کرده‌ایم. با توجه به پیچیده بودن معادلات، حل آنها را در دو حالت حدی $\delta \gg 1$ و $\delta \ll 1$ به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم.

۶.۱۲ حالت $\delta \gg 1$

در این حالت، سمت راست رابطه‌ی ۳.۱۲ صفر شده و در نتیجه جمله‌ی نیروی الکتریکی هم از رابطه‌ی ۲.۱۲ حذف می‌شود. در حد $Pe \ll 1$ ، جفت‌شدگی بین اثرهای الکتریکی و هیدرودینامیکی در رابطه‌ی ۴.۱۲ کاملاً از بین می‌رود. در این صورت با دو مسأله‌ی الکتریکی و هیدرودینامیک مستقل روبرو هستیم. در قسمت هیدرودینامیکی کره‌ای ساکن در میدان خارجی یکنواخت قرار دارد. از قانون استوکس نیروی هیدرودینامیکی وارد بر کره می‌شود:

$$\mathbf{f}_H = -6\pi U_s \hat{z}.$$

قسمت الکتریکی مسأله هم ساده است، نیروی الکتریکی وارد بر کره‌ی باردار از جانب میدان

خارجی می‌شود:

$$\mathbf{f}_e = x\hat{z}.$$

چون کره ساکن است، پس $\mathbf{f}_H + \mathbf{f}_e = 0$ و از آنجا سرعت کره می‌شود:

$$U_s = \frac{Q}{6\pi\eta a}\mathcal{E},$$

دقت کنید که در این رابطه، بعد فیزیکی کمیات در نظر گرفته شده است. اکنون پتانسیل سطحی کره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\zeta = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 a},$$

در این صورت موبیلیتی الکتروفورسیس به صورت زیر می‌شود، داریم:

$$\mathcal{M}(\delta \rightarrow \infty) = \frac{U_s}{\mathcal{E}} = \frac{2}{3} \frac{\epsilon\epsilon_0}{\eta} \zeta.$$

موبیلیتی الکتروفورسیس، کمیتی است که به صورت مستقیم از آزمایش به دست می‌آید.

۷.۱۲ حالت $\delta \ll 1$

باز هم فرض می‌کنیم: $Pe \ll 1$ و برای سهولت جواب را برای حالت $x \ll 1$ (میدان خارجی بسیار ضعیف) بررسی می‌کنیم. در این صورت متغیرهای مسأله را بر حسب x بسط اختلالی می‌دهیم:

$$p = p_0 + xp_1 + \mathcal{O}(x)^2,$$

$$\mathbf{u} = x\mathbf{u}_1 + \mathcal{O}(x)^2,$$

$$\psi = \psi_0 + x\psi_1 + \mathcal{O}(x)^2,$$

$$n^\pm = n_0^\pm + xn_1^\pm + \mathcal{O}(x)^2,$$

$$U_s = xU_1 + \mathcal{O}(x)^2,$$

معادلات مرتبه‌ی صفرم:

$$-\nabla p_0 + \nabla^2 \psi_0 \nabla \psi_0 = 0, \quad (۵.۱۲)$$

$$\nabla^2 \psi_0 = -\delta^{-2} (n_0^+ - n_0^-), \quad (۶.۱۲)$$

$$0 = \nabla \cdot (\nabla n_0^\pm \pm n_0^\pm \nabla \psi_0), \quad (۷.۱۲)$$

معادلات مرتبه‌ی یکم اختلال:

$$\nabla^2 \mathbf{u}_1 - \nabla p_1 + \nabla^2 \psi_0 \nabla \psi_1 + \nabla^2 \psi_1 \nabla \psi_0 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (۸.۱۲)$$

$$\nabla^2 \psi_1 = -\delta^{-2} (n_1^+ - n_1^-), \quad (۹.۱۲)$$

$$Pe \mathbf{u}_1 \cdot \nabla n_0^\pm = \nabla \cdot (\nabla n_1^\pm \pm n_0^\pm \nabla \psi_1 \pm n_1^\pm \nabla \psi_0), \quad (۱۰.۱۲)$$

شرایط مرزی معادلات مرتبه‌ی صفرم:

$$-\partial_n \psi_0(r=1) = q, \quad \hat{n} \cdot (\nabla n_0^\pm \pm n_0^\pm \nabla \psi_0)(r=1) = 0,$$

$$n_0^\pm(r \rightarrow \infty) = 1, \quad \psi_0(r \rightarrow \infty) = 0,$$

شرایط مرزی معادلات مرتبه‌ی یکم:

$$\partial_n \psi_1(r=1) = 0, \quad \mathbf{u}_1(r=1) = 0, \quad \hat{n} \cdot (\nabla n_1^\pm \pm n_1^\pm \nabla \psi_0 \pm n_0^\pm \nabla \psi_1)(r=1) = 0,$$

$$\mathbf{u}_1(r \rightarrow \infty) = -U_1 \hat{z}, \quad n^\pm(r \rightarrow \infty) = 0, \quad -\nabla \psi_1(r \rightarrow \infty) = \hat{z},$$

حل معادلات مرتبه‌ی صفرم

از معادله‌ی ۷.۱۲ نتیجه می‌شود:

$$n_0^\pm = e^{\mp \psi_0},$$

با قرار دادن در رابطه‌ی ۶.۱۲ و خطی سازی معادله برای دماهای بزرگ (ψ_0 کوچک) به معادله‌ی

خطی شده‌ی پواسون-بولتزمن می‌رسیم:

$$\nabla^2 \psi_0 = \delta^{-2} \psi_0,$$

با توجه به تقارن کروی داریم:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\psi_0) = \delta^{-2}\psi_0,$$

که جواب‌های آن به صورت زیر است:

$$\psi_0 = \frac{A}{r} e^{-\delta^{-1}r} + \frac{B}{r} e^{\delta^{-1}r},$$

پس از اعمال شرایط مرزی:

$$\psi_0 = \frac{\psi_0^s}{r} e^{-\delta^{-1}(r-1)},$$

که در آن پتانسیل سطحی (بدون بعد) به پتانسیل زتا: $\zeta = \frac{k_B T}{e} \psi_0^s$ مربوط می‌شود.

معادلات مرتبه‌ی یکم

برای حل معادلات مرتبه‌ی یکم به صورت زیر عمل می‌کنیم. با توجه به خطی بودن این معادلات، می‌توانیم جواب‌های آن را از حل دو مسأله‌ی فرضی I و II به دست آوریم:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^I + \mathbf{u}_1^{II}, \quad \psi_1 = \psi_1^I + \psi_1^{II},$$

این دو مسأله‌ی فرضی، هر دو در معادلاتی مشابه معادلات اصلی ولی با شرایط مرزی متفاوت صدق می‌کنند:

$$\mathbf{u}_1^I(r=1) = 0, \quad \mathbf{u}_1^I(r=\infty) = 0, \quad \partial_n \psi_1^I(r=1) = 0, \quad -\nabla \psi_1^I(r=\infty) = \hat{z},$$

$$\mathbf{u}_1^{II}(r=1) = 0, \quad \mathbf{u}_1^{II}(r=\infty) = -U_1, \quad \partial_n \psi_1^{II}(r=1) = 0, \quad -\nabla \psi_1^{II}(r=\infty) = 0,$$

دقت کنید که ترکیب شایط مرزی بالا، شرایط مرزی مسأله‌ی اصلی را می‌دهد.

حل مسأله‌ی II

اگر $Pe \ll 1$ باشد، طبق روابط ۱۰.۱۲ و ۹.۱۲، می‌توانیم ابتدا قسمت الکتروستاتیکی را مستقل از قسمت هیدرودینامیکی حل کنیم. شرایط مرزی مربوطه جوابی به صورت $\psi_1^{II} = 0$ پیشنهاد می‌کند و از آنجا می‌توانیم معادله‌ی ۸.۱۲ را ساده‌سازی کنیم. اکنون پاسخ قسمت هیدرودینامیکی از قانون استوکس به‌دست می‌آید. نیروی وارد شده به کره در مسأله‌ی دوم برابر می‌شود با:

$$F^{II} = -6\pi U_1.$$

حل مسأله‌ی I

برای حل مسأله‌ی I، فضای شاره را به دو ناحیه‌ی داخل لایه‌ی دبای ($1 < r < 1 + \delta$) و خارج لایه‌ی دبای ($r > 1 + \delta$) تقسیم می‌کنیم که در آن $\delta = \frac{\lambda_{DH}}{a} \ll 1$. با توجه به افت نمایی پتانسیل مرتبه‌ی صفرم، انتظار داریم در ناحیه‌ی خارج، پتانسیل الکتریکی و به دنبال آن چگالی یونها تقریباً صفر شوند. در این صورت معادلات حاکم بر پتانسیل و میدان سرعت در ناحیه‌ی خارج به صورت زیر می‌شوند:

$$\nabla^2 \psi_1^I \sim 0, \quad \nabla^2 \mathbf{u}_1^I - \nabla p_1^I \sim 0.$$

جواب پتانسیل که با شرایط مرزی در فواصل بی‌نهایت هم سازگار باشد به سهولت به‌دست می‌آید:

$$\psi_{1\text{خ}}^I = -\left(r + \frac{c}{r^2}\right) \cos \theta,$$

با اعمال شرط مرزی $\partial_r \psi_{1\text{خ}}^I(r = 1 + \delta \sim 1) = 0$ ، مقدار ثابت عددی هم برابر می‌شود با: $c = -\frac{1}{4}$. برای محاسبه‌ی میدان سرعت شاره در ناحیه‌ی خارج، از جواب‌های معادله‌ی استوکس بدون نیرو (چون در ناحیه‌ی خارج پتانسیل تقریباً صفر است، جملات مربوط به نیرو از رابطه‌ی ۸.۱۲ حذف می‌شوند) که بر حسب چندقطبیه‌ها بسط داده می‌شود استفاده می‌کنیم. میدان سرعت را برابر با میدان ناشی از یک تک‌قطبی نیرو و یک دوقطبی چشمه-چاه در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{u}_{1\text{خ}}^I = \frac{\mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \hat{r} \hat{r}}{8\pi r} + \frac{\mathbf{p} - 3\mathbf{p} \cdot \hat{r} \hat{r}}{8\pi r^3},$$

که در آن مقدار نیرو و دو قطبی به ترتیب با $\mathbf{f}$ و $\mathbf{p}$ نشان داده شده‌اند و مقدار 8π در عبارت دو قطبی چشمه و چاه، برای ساده شدن روابط بعدی است. به توجه به تقارن مسأله حدس می‌زنیم که $\mathbf{p} = p\hat{z}$ و $\mathbf{f} = f\hat{z}$. مقدار f و p با اعمال شرط پیوستگی جواب‌های ناحیه‌ی داخل و خارج به‌دست می‌آیند.

اکنون برای محاسبه‌ی میدان سرعت در ناحیه‌ی درونی قرار می‌دهیم: $\mathbf{u}_D^I = u\hat{r} + v\hat{\theta}$. با توجه به ضخامت ناچیز ناحیه‌ی درونی ($\delta \ll 1$)، می‌توانیم مسأله را بسیار ساده‌تر کنیم. میدان سرعت در معادله‌ی پیوستگی صدق می‌کند:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 u) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta v) = 0,$$

با استفاده از معادله‌ی پیوستگی می‌توانیم مرتبه‌ی بزرگی مولفه‌های مختلف سرعت را برآورد کنیم. در ناحیه‌ی درونی داریم: $r \sim 1$ و $\partial_r \sim 1/\delta$. از اینجا و با قرار دادن در معادله‌ی پیوستگی به دست می‌آید: $\frac{u}{v} \sim \delta \ll 1$. پس: $u \ll v$ ، یعنی در ناحیه‌ی درونی یک شارش تقریباً مماسی داریم. اکنون کافیت تا مولفه‌ی زاویه‌ای معادله‌ی هیدرودینامیکی مربوطه را بررسی کنیم. از معادله‌ی ۸.۱۲ داریم:

$$-\frac{1}{r} \partial_\theta p + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \psi_0) - \frac{1}{r} \partial_\theta \psi_0 + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r v) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta v) - \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} = 0,$$

با استفاده از مرتبه‌های بزرگی و به صورت تقریبی داریم:

$$-\partial_\theta p + \partial_r^2 \psi_0 \partial_\theta \psi_0 + \partial_r^2 v \sim 0,$$

دقت کنید که به سبب ضخامت ناچیز ناحیه‌ی درونی، مقدار پتانسیل در این ناحیه تقریباً برابر با مقدار محاسبه شده برای ناحیه‌ی خارجی و در مرز مشترک آنهاست: $\psi_D = \psi_0(r=1)$ و از آنجا با محاسبه‌ی مشتق طرفین نسبت به شعاع داریم:

$$\partial_r^2 \psi_0 \partial_\theta \psi_0 + \partial_r^2 v \sim 0,$$

که چون:

$$\partial_\theta \psi_0(r \sim 1) \sim \frac{3}{4} \sin \theta,$$

پس:

$$\partial_r^3 v = -\frac{3}{4} \sin \theta \partial_r^3 \psi_0,$$

که جوابی به صورت تقریبی زیر دارد:

$$v(r) = -\frac{3}{4} \sin \theta (\psi_0(r) - \psi_0(1)),$$

با اعمال پیوستگی جواب‌های میدان سرعت در نواحی بیرونی و درونی ($r = 1 + \delta \sim 1$) داریم:

$$u(r=1) = \frac{2}{8\pi} (f-p) \cos \theta, \quad v(r=1) = \frac{-1}{8\pi} (f+p) \sin \theta$$

و از آنجا: $f = -p = 8\pi \frac{3}{4} \psi_0(1)$ ، دقت کنید که: $\psi_0(1+\delta) \sim 0$.

اکنون می‌توانیم نیروی وارد شده به کره در مسأله‌ی حاضر را محاسبه کنیم. میدان سرعت نواحی دور کره، به صورت یک تک‌قطبی نیرو و یک دوقطبی چشمه‌وچاه است. از آنجا که چشمه‌وچاه نیرویی به شاره وارد نمی‌کنند (آنها جواب‌های تکیه‌ی شارش بدون اصطکاک هستند)، پس نیروی وارد بر کره، دقیقاً مقدار نیروی $\mathbf{f}$ است:

$$\mathbf{F}^I = \mathbf{f} = 6\pi \psi_0(1) \hat{z}.$$

از آنجا که حرکت کره با سرعت ثابت انجام می‌شود، نیروی کل وارد بر آن صفر است:

$$\mathbf{F}^I + \mathbf{F}^{II} = 0,$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{U}_1 = \psi_0(1) \hat{z}.$$

و موبیلیتی الکتروفورتیک برابر می‌شود با:

$$\mathcal{M}(\delta \rightarrow 0) = \frac{U_s}{\mathcal{E}} = \frac{x\psi_0 v_0}{\mathcal{E}} = \frac{\epsilon\epsilon_0}{\eta} \zeta,$$

که در آن $\psi_0(1) = e\zeta/k_B T$.

برای محاسبه‌ی موبیلیتی به عنوان تابعی از غلظت یونها، $\mathcal{M}(\delta)$ ، و در مقادیر میانی δ از روشهای عددی استفاده می‌شود.

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

هیدرودینامیک: ترمودینامیک غیرتعادلی

موضوع ترمودینامیک غیرتعادلی که یکی از پیچیده‌ترین شاخه‌های فیزیک است، بررسی پدیده‌شناختی سامانه‌های فیزیکی دور از تعادل است. دور از تعادل بودن سامانه‌های فیزیکی به یکی از صورت‌های گرمایی، مکانیکی و شیمیایی رخ می‌دهد. مثلاً در شکل گرمایی آن، یک سامانه‌ی دور از تعادل با دمای غیریکنواخت و شار انرژی گرمایی مشخص می‌شود. یک سامانه‌ی هیدرودینامیکی، مثالی از سامانه‌های غیرتعادلی است که در آن حرکت مکانیکی و بزرگ‌مقیاس، سامانه را از حالت تعادل دور کرده است. مطالعه‌ی سامانه‌های دور از تعادل در حالت عام کار ساده‌ای نیست ولی با این فرض که سامانه‌ی غیرتعادلی مورد نظر به وضعیت تعادلی نزدیک است، می‌توان توصیفی ارائه کرد که کم‌ویش رفتارهای ماکروسکوپی آن را توضیح دهد. در این فصل به توصیف رفتار ترمودینامیکی سامانه‌ای که در آن تعادل مکانیکی و گرمایی نداریم می‌پردازیم [۲۴].

۱.۱۳ قوانین پایستگی

سامانه‌ی ترمودینامیکی دور از تعادلی را در نظر بگیرید که وضعیت آن با مجموعه‌ای از میدان‌های پیوسته‌ی، چگالی $\rho(\mathbf{r}, t)$ سرعت $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ دما $T(\mathbf{r}, t)$ و فشار $P(\mathbf{r}, t)$ توصیف می‌شود. برای

سهولت سامانه‌ی تک مولفه‌ای که در آن واکنش‌های شیمیایی صورت نمی‌گیرد را در نظر می‌گیریم. این سامانه تحت اثر نیروی خارجی پایستار (برواحد جرم) $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\nabla\psi(\mathbf{r})$ است. معادلات تحولی این سامانه از مجموعه‌ای از قوانین پایستگی به دست می‌آید. قانون پایستگی جرم، اولین قانون پایستگی است که بصورت زیر است:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.13)$$

پیش از این نشان داده‌ایم که معادله‌ی حرکت سامانه‌ای که ذرات آن تحت اثر نیروهای درونی کوتاه برد و نیروی خارجی هستند در حد پیوستار به صورت $\rho(\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{f}$ است. شکل ذرات را همسانگرد در نظر می‌گیریم تا به هم گشتاور خالص وارد نکرده و تانسور تنش متقارن باشد. از این معادله می‌توانیم قانون پایستگی تکانه را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \sigma) = \rho \mathbf{f}. \quad (2.13)$$

در رابطه‌ی بالا $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$ قسمت همرفتی شار تکانه را نشان می‌دهد. برای استخراج قانون پایستگی انرژی، با کمک روابط بالا و اندکی محاسبه می‌توان دید که تحول مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \psi \right) + \nabla \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \psi \right) \mathbf{u} - \sigma \cdot \mathbf{u} \right) = -\text{tr}(\sigma \cdot (\nabla \mathbf{u})). \quad (3.13)$$

از رابطه‌ی بالا و به سبب وجود جمله‌ی سمت راست، دیده می‌شود که مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل پایسته نیست. با در نظر گرفتن سهم انرژی درونی سامانه (بر واحد جرم) که با ϵ نشان داده می‌شود، انرژی کل سامانه (بر واحد جرم) که پایسته است را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e = \frac{1}{2} u^2 + \psi + \epsilon. \quad (4.13)$$

در واقع رابطه‌ی بالا تعریف ترمودینامیکی انرژی درونی است. برای روشن تر شدن موضوع، توجه کنید که پایسته بودن انرژی کل مستلزم آن است که در رابطه‌ی پیوستگی به شکل زیر صدق کند:

$$\partial_t(\rho e) + \nabla \cdot (\mathbf{J}_e) = 0, \quad (5.13)$$

که در آن $\mathbf{J}_e$ جریانی است که شار انرژی را نشان می‌دهد. از ترکیب تعاریف و روابط بالا دیده می‌شود که شار انرژی کل علاوه بر جمله‌های متداول همرفتی باید شامل یک جمله‌ی اضافی هم باشد که در واقع همان شارش گرماست و آن را با $\mathbf{J}_q$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbf{J}_e = \rho e \mathbf{u} - \sigma \cdot \mathbf{u} + \mathbf{J}_q. \quad (۶.۱۳)$$

از نظر ریزمقیاس، انرژی درونی ϵ شامل سهم برهمکنش‌ها و انرژی افت‌وخیزهای گرمایی می‌شود. به سهولت می‌توان دید که انرژی درونی هم به تنهایی پایسته نیست، زیرا در رابطه‌ای به شکل زیر صدق می‌کند:

$$\partial_t(\rho \epsilon) + \nabla \cdot (\rho \epsilon \mathbf{u} + \mathbf{J}_q) = \text{tr}(\sigma \cdot (\nabla \mathbf{u})). \quad (۷.۱۳)$$

اکنون سعی می‌کنیم قانون پایستگی انرژی کل که در آن سهم گرما هم وجود دارد را به صورت آشناتری بازنویسی کنیم. اگر گرمای داده شده به واحد جرم را با dq تعریف کنیم، می‌توانیم بنویسیم: $\nabla \cdot \mathbf{J}_q = -\rho \frac{dq}{dt}$. در واقع از دید ناظر همراه شاره^۱، شارش انرژی گرمایی، همان گرمایی است که به ماده داده می‌شود. برای ادامه‌ی بحث سهم فشار هیدروستاتیک در تانسور تنش را به صورت: $\sigma = -P\mathbf{I} + \Sigma$ جدا می‌کنیم. اکنون می‌توانیم قانون پایستگی انرژی را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dq}{dt} - P \nabla \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \text{tr}(\Sigma \cdot \nabla \mathbf{u}) = \frac{dq}{dt} - P \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \text{tr}(\Sigma \cdot \nabla \mathbf{u}), \quad (۸.۱۳)$$

که در آن از قانون پایستگی جرم به شکل $d\rho/dt = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$ استفاده کرده‌ایم. رابطه‌ی بالا قانون اول ترمودینامیک است. مطابق رابطه‌ی بالا و در حالت تعادل، تغییرات انرژی درونی با میزان گرمای مبادله شده و کار انجام شده داده می‌شود. جمله‌ی آخر رابطه‌ی بالا مختص حالت‌های غیر تعادلی است و آن اثرهای هیدرودینامیکی را نشان می‌دهد.

۲۰۱۳ قانون آنتروپی و شرط تعادل موضعی

مطابق اصول ترمودینامیک، آنتروپی سامانه که آن را با S نشان می‌دهیم، یک تابع حالت است.

^۱ مشتق زمانی در رابطه‌ی شار گرمایی، تغییرات زمانی از دید ناظر همراه شاره است.

آنتروپی بر واحد جرم را با s نشان می‌دهیم. برای یک سامانه‌ی تعادلی، آنتروپی یک متغیر حالت است که به متغیرهای سامانه یعنی انرژی درونی و چگالی با رابطه‌ای به شکل $s = s(\epsilon, \rho)$ وابسته است. از مشخصه‌های اساسی ترمودینامیک این است که رابطه‌ی حالت یعنی رابطه‌ی بین آنتروپی، چگالی و انرژی سیستم وجود دارد. تغییرات آنتروپی یک سامانه در یک فرآیند ترمودینامیکی دارای دو سهم است. سهم ناشی از تولید آنتروپی درون سامانه که آن را با dS_i نشان می‌دهیم و سهم ناشی از تزریق آنتروپی به سامانه که از طریق مرزها انجام می‌شود و آن را با dS_e نشان می‌دهیم. توجه کنید که هر کدام از این سهم‌ها به تنهایی دیفرانسیل کامل نیستند و تغییرات آنتروپی کلی، دیفرانسیل کامل است. مطابق قانون دوم ترمودینامیک، سهم درونی تولید آنتروپی در فرآیندهای برگشت‌پذیر (تعادلی) صفر و برای فرآیندهای برگشت ناپذیر مثبت است.^۱

$$dS = dS_i + dS_e, \quad dS_i \geq 0, \quad (9.13)$$

رابطه‌ی بالا، قانون دوم ترمودینامیک است. بحث را با یک فرض بسیار مهم ادامه می‌دهیم. رابطه‌ی بالا برای سامانه‌ی ترمودینامیکی به عنوان یک سامانه‌ی واحد، صادق است. می‌خواهیم فرض کنیم که این رابطه به صورت موضعی برای هر جزی‌بی نهایت کوچک آن هم صادق است. در این صورت می‌توانیم رابطه‌ی بالا را به یک رابطه‌ی دیفرانسیلی تبدیل کنیم. برای این منظور شار کل آنتروپی را با $\mathbf{J}_{s,t}$ و نرخ تولید آنتروپی درون سامانه را با نماد $\dot{S}$ نشان می‌دهیم.^۲ در این صورت برای هر سامانه‌ی کوچک، سهم خارجی تغییرات آنتروپی در واحد زمان از انتگرال شار آنتروپی روی سطح و سهم داخلی تغییرات آنتروپی در واحد زمان از انتگرال نرخ تولید آنتروپی در حجم کل به دست می‌آیند. به بیان دقیق‌تر داریم:

$$S = \int \rho s dV, \quad \frac{dS_e}{dt} = - \int \mathbf{J}_{s,t} \cdot d\mathbf{a}, \quad \frac{dS_i}{dt} = \int \dot{S} dV, \quad (10.13)$$

^۱ برای یک سامانه که بصورت بی‌دررو ایزوله است، از خارج هیچ آنتروپی به سامانه تزریق نمی‌شود ($dS_e = 0$) پس در این مورد داریم: $dS \geq 0$. در سامانه‌های بسته که در آنها فقط مبادله‌ی گرما با خارج مجاز است، طبق قضیه‌ی کارنو-کلاسیوس $\frac{dQ}{T} = dS_e$ در نتیجه در مورد سامانه‌های بسته داریم: $dS \geq \frac{dQ}{T}$.^۲ توجه کنید که این فقط یک نماد است.

اکنون شکل دیفرانسیلی رابطه‌ی ۹.۱۳ بصورت زیر می‌شود:

$$\partial_t(\rho s) + \nabla \cdot \mathbf{J}_{s,t} = \dot{s}, \quad \dot{s} \geq 0. \quad (11.13)$$

اکنون فرض بسیار مهم دیگری را هم می‌پذیریم، فرض تعادل موضعی. برای یک سامانه‌ی تعادلی آنتروپی تابع حالتی است به صورت $s = s(\epsilon, \rho)$. در این صورت دیفرانسیل کامل آنتروپی مطابق روابط ترمودینامیک تعادلی به شکل $Tds = d\epsilon + Pd(\rho^{-1})$ است. برای مطالعه‌ی سامانه‌های دور از تعادل، فرض اساسی تعادل موضعی کار را ساده‌تر می‌کند. فرض می‌کنیم برای یک سامانه‌ی دور از تعادل، هم‌چنان به صورت موضعی تعادل برقرار است و آنتروپی به صورت موضعی، همان شکل تابعی تعادلی قبلی را بر حسب انرژی درونی و چگالی دارد. درواقع سیستم دور از تعادل را می‌توان به سیستم‌های کوچکی افراز کرد که هر کدام از آنها به تنهایی یک سامانه‌ی تعادلی است. این زیر سیستم‌ها در تماس با یکدیگرند و هر کدام از آنها به تنهایی شامل تعداد زیادی ذره است، بصورتی که مفاهیم بزرگ مقیاس ترمودینامیک قابل استفاده باشد. با پذیرفتن شرط تعادل موضعی، به طور مشخص‌تر فرض می‌کنیم که دیفرانسیل آنتروپی برای هر عنصر جرمی (سامانه‌ی کوچک موضعی) در دستگاه مختصاتی که همراه آن عنصر جرمی حرکت می‌کند، با رابطه‌ی شبیه سامانه‌ی تعادلی و به شکل زیر داده می‌شود:

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{d\epsilon}{dt} + P \frac{d}{dt} \rho^{-1}. \quad (12.13)$$

مشتق زمانی ظاهر شده در رابطه‌ی بالا، مشتق همرفتی است و تغییرات زمانی را از دید ناظری که همراه ذرات حرکت می‌کند، می‌سنجد. شرط صحت رابطه‌ی بالا، با آزمایش یا با رهیافت‌های ریزمقیاس قابل بررسی است. ولی به صورت خلاصه، می‌توان انتظار داشت سامانه‌هایی که خیلی از تعادل دور نیستند با تقریب خوبی از رابطه‌ی بالا تبعیت کنند. رابطه‌ی بالا را با قانون اول ترکیب می‌کنیم تا به رابطه‌ی ساده‌تری برسیم:

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T} \nabla \cdot \mathbf{J}_q + \frac{1}{T} \text{tr}(\Sigma \cdot \nabla \mathbf{u}). \quad (13.13)$$

با بازنویسی رابطه‌ی بالا و مقایسه‌اش با قانون دوم ترمودینامیک به روابط زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{J}_{s,t} = \rho s \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{J}_q, \quad \dot{s} = -\frac{1}{T} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T + \frac{1}{T} \text{tr}(\Sigma \cdot \nabla \mathbf{u}) \geq 0. \quad (14.13)$$

از رابطه ی بالا مشاهده می شود که نرخ تولید آنتروپی بصورت حاصل ضرب شار یک کمیت ترمودینامیکی در گرادیان یک متغیر ترمودینامیکی نافزونور ظاهر شده است. در ادامه خواهیم دید که حالت ماکروسکوپی یک سامانه ی غیرتعادلی با مجموعه ای از متغیرهای ترمودینامیکی فزونور مشخص می شوند. این متغیرهای فزونور، در واقع همان جملاتی هستند که بصورت گرادیانی در رابطه ی بالا ظاهر می شوند و به آنها نیروهای ترمودینامیکی گفته می شود. توجه کنید که مثلاً، دما نافزونور است ولی گرادیان آن بصورت فزونور رفتار می کند. برای اینکه معادلات دینامیکی توصیف کننده ی سامانه ی غیرتعادلی کامل شوند، لازم است تا اطلاعاتی از شارهای ترمودینامیکی و وابستگی آنها به نیروهای ترمودینامیکی داده شود. مشابه قسمت های دیگر ترمودینامیک، این روابط از نتایج آزمایشگاهی استخراج می شوند.

۳.۱۳ روابط پدیده شناختی خطی

از بحث قبلی دیدیم که نرخ تولید آنتروپی درون یک سامانه ی غیرتعادلی از حاصلضرب نیروها و جریان های ترمودینامیکی بدست می آیند. در حالت تعادل ترمودینامیکی نیروهای ترمودینامیکی صفر هستند و در نتیجه شار ماکروسکوپی در سامانه وجود ندارد. برای سامانه ی غیرتعادلی نزدیک به تعادل، و به عنوان نتیجه ای تجربی، می توان فرض کرد روابط خطی بین نیروها و شارهای ترمودینامیکی برقرار است. نیروهای ترمودینامیکی را در حالت کلی با $X_i^{\pm}$ نشان می دهیم. متغیرها با پاریمته ی زمانی زوج و فرد تحت عملگر وارونی زمان را با علامت های $\pm$ مشخص کرده ایم^۱. دلیل جداسازی متغیرها با پاریمته های زوج و فرد در ادامه معلوم می شود. جریان های متناظر با نیروهای ترمودینامیکی $X_i^{\pm}$ را با $J_i^{\pm}$ نشان می دهیم. در جدول زیر به مثال هایی از نیروهای ترمودینامیکی در سامانه های مختلف اشاره شده است.

^۱ توجه کنید: عبارات و تمایزاتی که در بالا بیان شد منحصرأ بدین معنی است X^+ تابعی زوج از سرعت حرکت ذرات و X^- تابعی سرعت حرکت ذرات می باشد.

سامانه‌ی ترمودینامیکی	$X^{\pm}$	پاریته‌ی نیرو	$J^{\pm}$	پاریته‌ی جریان
تک ذره با نیروی خارجی	$\mathbf{f}$	+	سرعت ذره	-
مایع با دمای ناهمگن	∇T	+	جریان گرما	-
چگالی ناهمگن	∇n	+	جریان ذرات	-
محلول شیمیایی چندفازی	$\nabla \mu$	+	جریان ذرات	-
الکترولیت	$\nabla \phi$	+	جریان بارها	-
شاره و شکسان	$\nabla \mathbf{u}$	-	جریان تکانه (تانسور تنش)	+

کلی‌ترین شکلی که برای روابط خطی بین نیروها و جریان‌ها می‌توان نوشت به شکل زیر است:

$$J_i^+ = \sum_j \left(L_{ij}^{++} X_j^+ + L_{ij}^{+-} X_j^- \right)$$

$$J_i^- = \sum_j \left(L_{ij}^{-+} X_j^+ + L_{ij}^{--} X_j^- \right), \quad (15.13)$$

ضرایب پدیده‌شناختی را با $L_{ij}^{\pm\pm}$ نشان داده‌ایم. ضرایب L_{ij}^{++} و L_{ij}^{--} نشان دهنده‌ی پدیده‌های غیربازگشتی هستند و به آنها ضرایب اتلافی گفته می‌شود. در ادامه می‌بینیم که این ضرایب در تولد آنتروپی نقش دارند. از طرف دیگر، ضرایب L_{ij}^{+-} و L_{ij}^{-+} ، نقشی در تولید آنتروپی ندارند و به آنها ضرایب ری‌اکتیو (غیر اتلافی) گفته می‌شود. در جریانهای ترمودینامیکی، پدیده‌های بازگشت‌پذیر و بازگشت‌ناپذیر، هر دو سهم دارند. سهم دو قسمت اتلافی و ری‌اکتیو (غیر اتلافی) را می‌توان به صورت زیر جداکرد:

$$J_i^{\pm} = \sum_j L_{ij}^{\pm\mp} X_j^{\mp}, \quad J_i^{\text{d}\pm} = \sum_j L_{ij}^{\pm\pm} X_j^{\pm}. \quad (16.13)$$

در صورتی که میدان مغناطیسی خارجی ^۱ $\mathbf{B}$ حضور داشته باشد، ضرایب پدیده‌شناختی به بردار میدان هم بستگی خواهند داشت. با توجه به ناوردایی معادلات حرکت میکروسکوپیک تحت وارونی زمان، انزاگر نشان داده است که مجموعه‌ی تمامی ضرایب پدیده‌شناختی که در رابطه‌ی بالا معرفی شده‌اند، استقلال کامل ندارند. به طور خلاصه نتایج انزاگر به قیود زیر

^۱ در سیستم‌های چرخان نیروی کوریولیس نقشی شبیه نیروی مغناطیسی دارد. در این سیستم‌ها ضرایب پدیده‌شناختی به بردار سرعت چرخشی نیز بستگی دارند و برای حفظ تقارن وارونی زمان، راستای چرخش نیز باید وارون شود.

می انجامد:

(۱۷.۱۳)

$$L_{ij}^{++}(\mathbf{B}) = L_{ji}^{++}(-\mathbf{B}), \quad L_{ij}^{--}(\mathbf{B}) = L_{ji}^{--}(-\mathbf{B}), \quad L_{ij}^{+-}(\mathbf{B}) = -L_{ji}^{+-}(-\mathbf{B}).$$

با در نظر گرفتن عملگر وارونی زمان $\hat{T}$ ، روابط بالا را بصورت ساده‌تری بازنویسی کنیم. ابتدا توجه کنید که اثر عملگر وارونی زمان بصورتی است که راستای میدان را وارون می‌کند: $\hat{T}\mathbf{B} = -\mathbf{B}$. چون $\hat{T}[L(\mathbf{B})] = L(-\mathbf{B})$ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\hat{T}[L^{++}(\mathbf{B})] = L^{++T}(\mathbf{B}), \quad \hat{T}[L^{--}(\mathbf{B})] = L^{--T}(\mathbf{B}), \quad \hat{T}[L^{+-}(\mathbf{B})] = -L^{-+T}(\mathbf{B}).$$

توجه کنید که در سمت راست روابط بالا علامت T نشانگر ترانهاده کردن ماتریس‌هاست. نیروها و جریان‌های ترمودینامیکی به گونه‌ای تعریف شده‌اند که نرخ تولید آنتروپی از حاصل ضرب نیروها و شارهای ترمودینامیکی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\dot{s} = \sum_i (J_i^+ X_i^+ + J_i^- X_i^-).$$

بخش مهمی از روابط انزاگر را می‌توانیم با استدلالی مبتنی بر پاریتی زمانی تحقیق کنیم. قسمت‌هایی از روابط نیرو-جریان که متناسب با L^{++} و L^{--} هستند، فرآیندهای ترمودینامیکی بازگشت ناپذیر هستند و این فرآیندها باید همراه اتلاف انرژی و تزریق آنتروپی به سیستم باشند. بازگشت ناپذیری این جملات، از پاریتی عکسی که دو طرف رابطه‌ی بالا دارند پیداست. سمت چپ این رابطه دارای پاریتی زمانی منفی است. در نتیجه در سمت راست این رابطه فقط جملاتی با پاریتی کلی منفی سهم خواهند داشت. برای مثال پاریتی دو طرف رابطه‌ی $J^+ = L^{++} X^+$ عکس هم هستند و چنین رابطه‌ای، یک فرآیند بازگشت ناپذیر را می‌رساند.

برای درک بهتر، ساده‌ترین سامانه‌ی ترمودینامیکی که یک ذره‌ی کروی غوطه‌ور در سیال ویسکوز است را در نظر بگیرید. این ذره در حضور نیروی خارجی است. برای این کره‌ی متحرک، رابطه‌ی نیرو-سرعتی به شکل $v = \xi^{-1} f$ است. در این مورد نرخ اتلاف از حاصل ضرب نیرو و سرعت بصورت $T\dot{s} = f v$ بدست می‌آید. در اینجا نیرو دارای پاریتی زمانی زوج و سرعت (جریان ترمودینامیکی) دارای پاریتی فرد است.

بنا به استدلال بالا، جملات متناسب با L^{+-} و L^{-+} در رابطه‌ی نیرو-جریان نمی‌توانند یک فرآیند بازگشت ناپذیر را نشان دهند پس این جملات اگر در نرخ تولید آنتروپی جایگزین شوند، نباید سهم خالصی داشته باشند. فرض کنید میدان مغناطیسی نداریم، با جایگذاری جملات غیر اتلافی در نرخ تولید آنتروپی، داریم:

$$\sum_{ij} \left(L_{ij}^{+-} X_i^+ X_j^- + L_{ij}^{-+} X_i^- X_j^+ \right) = \sum_{ij} \left(L_{ij}^{+-} + L_{ji}^{-+} \right) X_i^+ X_j^- = 0,$$

که در آن برای رسیدن به تساوی دوم، اندیس‌هایی که رویشان جمع بسته می‌شود را تغییر نام داده‌ایم. از این اتحاد اخیر، رابطه‌ی انزاگر $L_{ij}^{+-} = -L_{ji}^{-+}$ بدست می‌آید. البته اثبات کامل روابط انزاگر در بخش بعد و با دیدگاه میکروسکوپی بدست خواهد آمد.

روابط انزاگر را به صورت دیگری هم می‌توان نوشت. برای نمونه، قسمت اتلافی ضرایب انزاگر L_{ij}^{++} را در نظر بگیرید. در نمایش ماتریسی این ضرایب را می‌توانیم به دو سهم متقارن و پادمقارن بصورت: $L(B) = L^s(B) + L^a(B)$ تفکیک می‌کنیم که در آن $L_{ij}^s = L_{ji}^s$ و $L_{ij}^a = -L_{ji}^a$. برای خلوت ماندن نوشته‌ها، علامت‌هایی که نشان دهنده‌ی پارته‌ی زمانی است را حذف کرده‌ایم. اکنون به سهولت می‌بینید که رابطه‌ی انزاگر به صورت زیر می‌شود:

$$L^s(B) = L^s(-B), \quad L^a(B) = -L^a(-B).$$

علاوه بر روابط بالا، قید اساسی دیگری هم از تقارن‌های سامانه به این ضرایب اعمال می‌شود. هرچند که در بحث بالا برای فشرده شدن روابط، تمامی مولفه‌های نیروها و جریان‌ها را در کنار هم و بصورت برداری نشان داده‌ایم، ولی واقعیت این است که نیروها و شارهای ترمودینامیکی مربوط به پدیده‌های متفاوت، ساختارهای تانسوری متنوعی دارند. مثلاً برخی اسکالر، بردار یا تانسورهای مراتب بالاتری هستند. برای یک سامانه‌ی همسانگرد، با ملاحظات تقارنی می‌توان نشان داد که شارهای ترمودینامیکی تنها به نیروهای ترمودینامیکی که از نظر تانسوری هم جنس هستند وابسته می‌شوند. این موضوع به قانون کوری موسوم است. در غیر این صورت تقارن‌های سامانه‌ی همسانگرد در معادلات (نرخ تولید آنتروپی) منعکس نمی‌شوند. این موضوع، قسمتی از آزادی عملی که ظاهراً در روابط خطی نیرو-جریان وجود دارد را کم می‌کند و درواقع تعداد ضرایب پدیده‌شناختی مستقل را محدودتر می‌کند.

برای دریافت پیغام اساسی که در روابط انزاگر وجود دارد، سیستم غیر تعادلی که در آن دما و چگالی ذرات همزمان نایکناخت هستند را در نظر بگیرید. در این سیستم، دو نوع جریان داریم، جریان ذرات J و جریان گرما J_q . در این سیستم کلی‌ترین روابط خطی بصورت زیر است:

$$J = -D\nabla n + L\nabla T$$

$$J_q = L\nabla n - D_q\nabla T. \quad (۱۸.۱۳)$$

مطابق روابط انزاگر، گرادیان دما می‌تواند باعث جریان ذرات شود و گرادیان چگالی ذرات باعث تولید جریان گرمایی می‌شود. توجه کنید که این دو پدیده‌ی اخیر منشا میکروسکوپی کاملاً متفاوت دارند ولی ضرایب پدیده‌شناختی آنها یکسان است و هر دو با L نشان داده شده است.

در قسمت زیر، مبانی میکروسکوپی که بر پایه‌ی آن خواص تقارنی روابط انزاگر بدست می‌آید را مرور می‌کنیم.

۴.۱۳ روابط انزاگر

انزاگر در سال ۱۹۳۱ با ملاحظات عمومی روابطی بین ضرایب پدیده‌شناختی در رابطه‌ی نیرو-جریان بدست آورد که جایزه‌ی نوبل شیمی سال ۱۹۶۸ را نصیب ایشان کرد. برای درک ایده‌ی اساسی انزاگر، توجه کنید که معادلات حرکت تک تک ذرات در حد میکروسکوپی تحت وارونی زمان ناوردا هستند (برای سهولت میدان مغناطیسی را فعلاً در نظر نمی‌گیریم). این تقارن وارونی زمان در حد میکروسکوپی، برای یک سیستم غیر تعادلی که تحت حرکت دینامیکی بازگشت ناپذیر به سمت تعادل می‌رود نیز همچنان پابرجاست. واضح است که در این شرایط و علی‌رغم این بازگشت پذیری میکروسکوپی، معادلات توصیف کننده‌ی متغیرهای ماکروسکوپی با تحولی بازگشت ناپذیر (عموماً به شکل نمایی) به سمت تعادل می‌روند. انتظار بدیهی این است که معادلات حرکت در حد ماکروسکوپی در ارتباط مستقیم با معادلات میکروسکوپی باشند. انزاگر نشان می‌دهد که رد این ارتباط در سیستم‌های غیر تعادلی بسیار نزدیک به تعادل، بصورت قیدهایی روی ضرایب پاسخ خطی نمودار می‌شود.

برای بررسی روابط انزاگر، یک توصیف میکروسکوپی از سیستم ترمودینامیکی غیرتعادلی را در نظر بگیرید. ریزحالت‌های این سیستم با مشخص شدن وضعیت تکانه $\{p\}$ و مکان $\{r\}$ تمامی ذرات در فضای فاز و با تابع توزیع $\rho(\{r\}, \{p\})$ داده می‌شود. وضعیت ماکروسکوپی یک سیستم غیر تعادلی توسط چه متغیرهای ترمودینامیکی ماکروسکوپیکی مشخص می‌شود؟ برای درک این موضوع، حالت غیر تعادلی با دمای نایکناخت را در نظر بگیرید. مطابق بحث قبلی، می‌خواهیم شرط تعادل موضعی را بکار گیریم. سیستم غیر تعادلی را می‌توان به زیر سیستم‌هایی افراز کرد که تک‌تک آنها در تعادل هستند. آسان‌تر است تا حالت ماکروسکوپی این سیستم غیر تعادلی با مجموعه‌ای از متغیرهای فزونور، مانند جرم و انرژی این زیر سیستم‌ها، مشخص شود. این متغیرهای فزونور را بصورت ϕ_i^+ با $i = 1 \dots N^+$ و ϕ_j^- با $j = 1 \dots N^-$ مشخص می‌کنیم. مشابه قبل، متغیرها با زوج یا فرد بودن نسبت به سرعت ذرات (پارته‌ی زوج و فرد) دسته‌بندی شده‌اند. متغیرهای ماکروسکوپیکی که به این صورت مشخص شده‌اند، در واقع متغیرهای کند تغییر سیستم هستند. تابع توزیع برای متغیرهای ماکروسکوپیکی، علی‌القاعده از انتگرال‌گیری تابع توزیع ریزحالت‌ها روی قسمتی از فضای فاز که متناظر با ماکر حالتهای مورد نظر ماست به دست می‌آید. انحراف از مقادیر تعادلی متغیرهای ماکروسکوپیکی را با $\alpha_i^\pm = \phi_i^\pm - \phi_{i,e}^\pm$ نشان می‌دهیم. این انحراف از مقادیر میانگین تعادلی، به دو دلیل می‌تواند رخ دهد. وجود نیروهایی که سامانه را غیر تعادلی کرده‌اند و افت‌وخیزهای تعادلی در سامانه‌های تعادلی، هر دو می‌توانند عامل انحراف از تعادل باشند. در ادامه‌ی بحث، هر دو مورد را می‌توان تصور کرد.

برای آسان شدن بررسی، فعلاً فرض کنید هیچ میدان مغناطیسی خارجی یا نیروی کوریولیس ناشی از چرخش نداشته باشیم و برای سهولت بیشتر، تنها افت‌وخیزهای متغیرها با پارته‌ی زوج را در نظر بگیرید. برای خلاصه شدن نمادگذاری، علامت زوج بودن پارته را هم برمی‌داریم. در انتها، نتایج برای حالت عام ارائه خواهد شد. در بحث بالا شرح داده شد که تابع توزیع برای متغیرهای ماکروسکوپیکی را چگونه می‌توان از جزییات ریزمقیاس بدست آورد ولی اکنون فرض می‌کنیم برای یک سامانه‌ی ایزوله و بسته، تابع توزیع افت‌وخیزهای متغیرهای ماکروسکوپیکی به فرم زیر باشد:

$$f(\alpha) = \mathcal{N}^{-1} e^{-\frac{1}{\hbar k_B} \alpha^T \mathbf{g} \alpha},$$

که برای سهولت از نمادگذاری ماتریسی استفاده شده و مجموعه‌ی افت‌وخیزها با بردار ستونی α نشان داده شده است و $\mathbf{g}$ ماتریس متقارن مثبت و معین ضرایب بسط است. توجه کنید که در بسط بالا از این واقعیت که در حالت تعادل آنتروپی ماکزیمم است استفاده شده است. ضریب نرمالیزاسیون $\mathcal{N}$ را می‌توان به‌سهولت از شرط $\int d\alpha f(\alpha) = 1$ بدست آورد. در واقع تابع توزیعی به فرم بالا برای افت‌وخیزهای کوچک و برای متغیرهای فزونوری صادق است که آنها را می‌توان بصورت حاصل‌جمع‌ی از تعداد زیادی متغیر میکروسکوپی که در مورد آنها قضیه‌ی حد مرکزی صادق است، در نظر گرفت. با استفاده از این تابع توزیع، متوسط توان دوم افت‌وخیزها را می‌توان در رابطه‌ی ماتریسی $\langle \alpha \alpha^T \rangle = k_B \mathbf{g}^{-1}$ خلاصه کرد. با داشتن تابع توزیع بالا و توجه به اصل آنتروپی بولتزمن می‌توان تغییر آنتروپی ناشی از افت‌وخیز یعنی ΔS را بدست آورد. چون $f \sim \exp(\Delta S/k_B)$ پس:

$$\Delta S = -\frac{1}{\gamma} \alpha^T \mathbf{g} \alpha.$$

اکنون متغیرهای ترمودینامیکی نافزونور متناظر با متغیرهای ماکروسکوپی فزونور را بصورت برداری $X = \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta S$ تعریف می‌کنیم. با محاسبه دیده می‌شود که: $X = -\mathbf{g} \alpha$. در ادامه خواهیم دید که این متغیرهای نافزونور، نیروهای ترمودینامیکی تعمیم یافته‌ای هستند که سیستم ترمودینامیکی مورد نظر را به وضعیت غیر تعادلی می‌برند. نرخ تغییرات آنتروپی ناشی از افت‌وخیز را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\dot{s} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta S \right)^T \frac{d}{dt} \alpha.$$

یادآوری می‌شود که برای سهولت، افت‌وخیزهای متغیرها با پاریت‌ی زوج را در نظر گرفته‌ایم. در حالت عام، متغیرهای ترمودینامیکی نافزونور با پاریت‌ی فرد را می‌توان به همین روش تعریف کرد.

در نمادگذاری ماتریسی استفاده شده در روابط بالا، از قانون ضرب ماتریس‌ها استفاده شده است. برای نمونه، توجه کنید که از بردار ستونی α دو کمیت $\alpha \alpha^T$ و $\alpha^T \alpha$ را می‌توان تعریف

کرد که اولی یک ماتریس مربعی و دومی یک اسکالر است. به صورت نمادین داریم:

$$\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2\alpha_3 \\ \alpha_1\alpha_3 & \alpha_2\alpha_3 & \alpha_3^2 \end{bmatrix}, \quad \alpha^T\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \end{bmatrix}$$

بدون ورود به جزئیات محاسبات و بنا به تقارن وارونی زمان می‌توان نشان داد تابع همبستگی افت‌وخیزها، تقارنی به فرم زیر بر حسب زمان دارد:

$$\langle \alpha(\circ)\alpha^T(\tau) \rangle = \langle \alpha(\tau)\alpha^T(\circ) \rangle.$$

به بردار بودن افت‌وخیزها و شکل ماتریسی رابطه‌ی بالا توجه کنید. طبق تعریف، توابع همبستگی بالا بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\langle \alpha(\circ)\alpha^T(\tau) \rangle = \int \int d\alpha d\alpha' \alpha\alpha'^T f(\alpha)P(\alpha|\alpha', \tau),$$

که در آن $P(\alpha|\alpha', \tau)$ احتمال این است که افت‌وخیز در زمان τ مقدار α' را داشته باشد به شرطی که در زمان اولیه مقدار α را داشته باشد. با توجه به تقارن وارونی زمانی معادلات حرکت میکروسکوپی، بسهولت دیده می‌شود که شرط تعادل جزیه‌جزیه بصورت زیر برقرار است:

$$f(\alpha)P(\alpha|\alpha', \tau) = f(\alpha')P(\alpha'|\alpha, \tau).$$

از این رابطه به راحتی تقارن زمانی تابع همبستگی که در بالا معرفی شد، بدست خواهد آمد. دو رابطه‌ی اخیر با هم معادل هستند و روابطی کلیدی در استدلال انزاگر هستند. برای اثبات روابط اخیر، باید از تابع توزیع متغیرهای ماکروسکوپی و تحول زمانی این توابع توزیع استفاده کنیم. در بحث بالا شرح دادیم که چگونه از فضای میکروحالت‌ها و انتگرالگیری روی آن می‌توان تابع توزیع متغیرهای ماکروسکوپی را بدست آورد. از آنجا که دینامیک میکروسکوپی تحت وارونی زمان ناورداست، می‌توانیم قیودی را روی توابع توزیع ماکروسکوپی و متوسط‌های آماری بدست آوریم. این قیود عملاً همان‌هایی هستند که در بالا بدون اثبات به آنها اشاره شد. برای استخراج روابط انزاگر، متوسط شرطی افت‌وخیزها را بصورت $\langle \alpha \rangle(t)$ در نظر بگیرید.

طبق تعریف، این کمیت متوسط افت و خیز در زمان دلخواه t را نشان می‌دهد به شرطی که آن متغیر در زمان اولیه $t = 0$ مقدار داده شده‌ی α_0 را داشته باشد. درواقع داریم:

$$\langle \alpha \rangle_0(t) = \int d\alpha \alpha P(\alpha_0 | \alpha, t)$$

فرض کنید که در یک لحظه افت و خیزهای یک متغیر (مثلاً α_i) مقادیر بسیار بزرگی، حتی بزرگتر از مقدار واریانس تعادلش، کسب کند. سوال این است که میانگین این کمیت افت و خیز کننده چطور متحول می‌شود تا به میزان تعادلش بازگردد؟ عامل ایجاد این افت و خیز بزرگ، یک نیروی خارجی بوده که در لحظه‌ای به سیستم اعمال شده است. فرض اساسی آنراگر این است که به صورت میانگین، افت و خیزها به همان صورتی که متغیرهای هیدرودینامیکی ماکروسکوپی به تعادل می‌رسند، متحول می‌شوند. بصورت تجربی می‌دانیم که متغیرهای هیدرودینامیکی بصورت نمایی به حالت تعادلی بازمی‌گردند. پس:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha \rangle_0(t) = -M \langle \alpha(t) \rangle_0 \rightarrow \langle \alpha \rangle_0(t) = e^{-Mt} \alpha_0.$$

پس داریم:

$$\int d\alpha \alpha P(\alpha_0 | \alpha, t) = e^{-Mt} \alpha_0.$$

طرفین رابطه‌ی بالا را از سمت راست در $\alpha_0^T f(\alpha_0)$ ضرب کرده و روی α انتگرال می‌گیریم. سپس سمت چپ رابطه‌ی بدست آمده را با استفاده از رابطه‌ی تعادل جزیه‌جزیه جایگزین کرده و در ادامه نام متغیرهای انتگرالگیری α و α_0 را جابجا می‌کنیم تا بدست آید:

$$\int d\alpha_0 \int d\alpha \alpha \alpha_0^T P(\alpha_0 | \alpha, t) f(\alpha_0) = \int d\alpha_0 e^{-Mt} \alpha_0 \alpha_0^T f(\alpha_0).$$

حالا با توجه به رابطه‌ی متوسط گیری اصلی، انتگرال روی α در سمت چپ رابطه‌ی بالا را جایگزین می‌کنیم:

$$\int d\alpha_0 \alpha_0 \alpha_0^T e^{-Mt} f(\alpha_0) = \int d\alpha_0 e^{-Mt} \alpha_0 \alpha_0^T f(\alpha_0).$$

نتیجه به صورت فشرده‌تر $\langle \alpha_0 \alpha_0^T \rangle e^{-Mt} = e^{-Mt} \langle \alpha_0 \alpha_0^T \rangle$ می‌شود. با توجه به رابطه‌ی

که برای متوسط توان دوم افت و خیزها قبلاً بدست آورده بودیم، می‌توانیم ببینیم که ماتریس‌های معرفی شده باید در اتحاد $\mathbf{Mg}^{-1}\mathbf{M}^T = \mathbf{g}^{-1}$ صدق کنند.

اکنون رابطه‌ی تحول زمانی برای افت و خیزها را بصورت زیر بر حسب متغیر ترمودینامیکی نافزونور X بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \alpha \rangle_\circ(t) = -\mathbf{Mg}^{-1} \mathbf{g} \langle \alpha \rangle_\circ(t) = \mathbf{L} \langle X(t) \rangle_\circ.$$

که در آن $\mathbf{L} = \mathbf{Mg}^{-1}$. با توجه به بحث‌های بالا، رابطه‌ی بسیار مهم انزاگر بصورت $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$ بدست می‌آید. دقت کنید که با تعریف شار جریان متناظر با متغیر ترمودینامیکی فزونور بصورت $J = \frac{d}{dt} \alpha$ ، رابطه‌ی اخیر را می‌توان بصورت متوسط رابطه‌ی خطی زیر که بین نیروها و جریان برقرار است، در نظر گرفت:

$$J = \mathbf{L}X$$

که در آن ماتریس ضرایب $\mathbf{L}$ متقارن است. نیروهای ترمودینامیکی و جریان‌ها، متغیرهای ترمودینامیکی همیوگ یکدیگرند. در اینجا به ساده‌ترین شکل قضیه‌ی انزاگر را بدست آوردیم. در بحث بالا برای اینکه بتوانیم دیدگاه مناسبی از ایده‌ی انزاگر بدست آوریم، از برخی جزئیات مربوط به حضور متغیرها با پاریته‌ی فرد صرف‌نظر کرده بودیم و حضور میدان مغناطیسی خارجی را نیز نادیده گرفته بودیم. محاسبات بالا را بسهولت می‌توان به حالت عام تعمیم داد. در حالت عمومی افت و خیزهای مربوط به متغیرها با پاریته‌ی فرد را هم در نظر می‌گیریم. از آنجا که حضور میدان مغناطیسی تاثیر بنیادی در نوع ناوردایی نسبت به وارونی زمان دارد، در ادامه میدان مغناطیسی خارجی B هم حضور دارد. توجه کنید که معادلات حرکت میکروسکوپیک، تقارن وارونی زمان را تنها به شرطی دارند که همراه با وارونی زمان، میدان مغناطیسی هم بصورت $B \rightarrow -B$ تبدیل شود^۱. در این حالت عمومی، تابع توزیع افت و خیزها با رابطه‌ی زیر جایگزین می‌شود:

$$f(\alpha^\pm, B) = \mathcal{N}^{-1} e^{-\frac{1}{\hbar k_B} (\alpha^{+T} \mathbf{g} \alpha^+ + \alpha^{-T} \mathbf{h} \alpha^- + \alpha^{+T} \mathbf{m} \alpha^- + \alpha^{-T} \mathbf{m}^T \alpha^+)},$$

^۱ نیروی کوریولیس در سیستم چرخان، مشابه نیروی مغناطیسی و متناسب با سرعت ذره است. برای متقارن شدن معادلات حرکت تحت وارونی زمان، باید بردار چرخش زاویه‌ای سیستم را نیز وارون کرد.

که تابع توزیع دارای خاصیت تقارنی $f(\alpha^\pm, B) = f(\pm\alpha^\pm, -B)$ است. در این صورت ماتریس‌های g و h توابعی زوج و m تابعی فرد از میدان مغناطیسی هستند. نیروهای ترمودینامیکی تعمیم یافته با پارитеی زوج و فرد، به صورتی مشابه قبل و بصورت $X^\pm = \frac{\partial}{\partial \alpha^\pm} \Delta S$ تعریف می‌شوند. جریان‌های وابسته به افت‌وخیزها با پارитеی زوج و فرد هم با تعمیم روابط قبلی بصورت $J^\pm = \dot{\alpha}^\pm$ تعریف می‌شوند. شرط تعادل جز به جز با رابطه‌ای به صورت زیر جابجا می‌شود:

$$f(\alpha^\pm, B)P(\alpha^+, \alpha^- | \alpha'^+, \alpha'^-, B, \tau) = f(\pm\alpha'^\pm, B)P(\alpha'^+, -\alpha'^- | \alpha^+, -\alpha^-, -B, \tau).$$

با کمک این روابط، کلی‌ترین قیودی که روی ضرایب خطی است به صورتی که در قسمت قبلی به آنها اشاره شد، بدست خواهد آمد. نرخ تغییرات آنتروپی ناشی از افت‌وخیز را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\dot{s} = \frac{d}{dt} \Delta S = X^+ J^+ + X^- J^-.$$

۵.۱۳ سامانه‌ی ۲ بعدی، اثر هال

اثر هال یکی از مثال‌های ساده‌ای است که خواص تقارنی ماتریس ضرایب را در حالت دو بعدی نشان می‌دهد. یک ورقه‌ی فلزی دو بعدی را در نظر بگیرید که تحت اثر میدان مغناطیسی خارجی عمود قرار دارد. دستگاه مختصاتی را در نظر بگیرید که راستاهای $\hat{x}$ و $\hat{y}$ آن درون صفحه و راستای $\hat{z}$ بر صفحه عمود است. با اعمال میدان الکتریکی درون صفحه، جریانی تولید خواهد شد. در این سیستم ترمودینامیکی غیر تعادلی، میدان الکتریکی نقش نیروی ترمودینامیکی را دارد. رابطه‌ی کلی بین جریان الکتریکی و میدان را به شکل عمومی $J_i = R_{ij}^{-1} E_j$ در نظر بگیرید. در این سامانه، عناصر تانسور مقاومت، ضرایب خطی انزاگر $L_{ij}^{++} = R_{ij}^{-1}$ هستند. در این حالت دو بعدی برای اندیس‌های تانسور مقاومت داریم: $i = x, y$.

رابطه‌ی انزاگر بصورت $\hat{T}[R_{ij}(B)] = R_{ij}(-B) = R_{ji}(B)$ است. توجه کنید که در این نمایش دو بعدی، میدان مغناطیسی نقش یک پارامتر (اسکالر) را دارد. با تفکیک تانسور مقاومت به دو تانسور متقارن و پادمتقارن بصورت $R = R^s + R^a$ داریم:

$$\hat{T}[R_{ij}^s(B)] = R_{ij}^s(B), \quad \hat{T}[R_{ij}^a(B)] = -R_{ij}^a(B).$$

برای یک ورقه‌ی الکتریکی همسانگرد، کلی‌ترین تانسورهای متقارن و پادمتقارن فضای دو بعدی به ترتیب با δ_{ij} و ϵ_{ij} مشخص می‌شوند. در این صورت کلی‌ترین شکل تانسور مقاومت بصورت زیر می‌شود:

$$R_{ij}^s = e(B)\delta_{ij}, \quad R_{ij}^a = o(B)\epsilon_{ij}.$$

که در آن از دو تابع اسکالر عمومی زوج و فرد بصورت زیر استفاده شده است:

$$e(-B) = e(B), \quad o(-B) = -o(B).$$

محاسبات متداول کلاسیکی، مقدار ثابت $e = (m/ne^2\tau)$ و تابع $o = (B/ne)$ را نتیجه‌ی می‌دهند که در آن m و n به ترتیب جرم و چگالی حجمی بارهای الکتریکی و τ زمان بین برخوردها است. در نهایت و بصورت خلاصه تانسور مقاومت سیستم دو بعدی بصورت زیر می‌شود:

$$R = \frac{m}{ne^2\tau} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{B}{ne} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

نرخ اتلاف انرژی در سامانه‌ی هال از رابطه‌ای به شکل $T\dot{s} \sim E^T J = \sum_{i,j} J_i J_j R_{ij} = J^T (R^s + R^a) J$ محاسبه می‌شود. توجه کنید که چون $J^T R^a J = 0$ ، پس قسمت پادمتقارن تانسور رسانندگی سهمی در اتلاف انرژی ندارد.

موضوع مهمی که باید به آن اشاره کرد تقارن‌های شکسته شده در سامانه‌ی هال است. یک سامانه‌ی دو بعدی کاملاً همسانگرد در غیاب میدان مغناطیسی دارای تمامی تقارن‌های وارونی زمان، انعکاس آینه‌ای و دوران است. این موضوع از قسمت متقارن تانسور مقاومت سامانه پیداست. از طرف دیگر قسمت پادمتقارن تانسور مقاومت زمانی غیر صفر است که ۲ تقارن مهم وارونی زمان و انعکاس آینه‌ای بشکند. درواقع قسمت پادمتقارن تانسور مقاومت الکتریکی تحت تبدیلات وارونی زمان و تقارن آینه‌ای ناوردا نیست. شکست تقارن وارونی زمانی، از رابطه‌ی $\hat{T}[R_{ij}^a(B)] = -R_{ij}^a(B) \neq R_{ij}^a(B)$ پیداست. تبدیل انعکاس آینه‌ای با ماتریس $\hat{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ داده می‌شود. قسمت پادمتقارن تانسور مقاومت شامل تانسور ϵ است که تحت تبدیل انعکاس بصورت زیر عوض می‌شود:

$$\epsilon \rightarrow \hat{\Pi}^T \epsilon \hat{\Pi} = -\epsilon.$$

نتیجه اینکه وجود قسمت پادمقارن مستلزم شکست تقارن انعکاس است. با مثال ارایه شده در این بخش، در مورد شکل کلی تانسور ضرایب مرتبه‌ی ۲ در یک سامانه‌ی ۲ بعدی بحث کردیم. مشخص شد که قسمت پادمقارن تانسور مقاومت در یک سامانه‌ی همسانگرد با یک عدد مستقل مشخص می‌شود. تعمیم به حالتی که تانسور ضرایب یک تانسور مرتبه‌ی ۴ باشد، در قسمت‌های بعدی و زمانی که وشکسانی شاره‌ها مطالعه می‌شود، صورت می‌گیرد. البته مطالعه‌ی این مساله‌ی اخیر در مورد سامانه‌های ۲ و ۳ بعدی باید به تفکیک صورت گیرد.

۶.۱۳ معادلات حرکت سامانه‌ی تک مولفه‌ای متعارف

اکنون می‌توانیم به سامانه‌ی غیر تعادلی تک مولفه‌ای بدون میدان مغناطیسی بازگردیم. در قسمت بعدی، بحث عمومی‌تر مربوط به حضور میدان مغناطیسی را بصورت مختصر بررسی می‌کنیم. به طور مشخص در مورد این سامانه‌ی تک مولفه‌ای همسانگرد، شار گرمایی و تانسور تنش، شارهای ترمودینامیکی سامانه را تشکیل می‌دهند. در این مورد، شار گرمایی کمیتی برداری و شار انرژی مکانیکی (تانسور تنش) کمیتی تانسوری از مرتبه‌ی دو است. در سامانه‌ی مورد نظر، بردار ∇T و تانسور متقارن گرادیان سرعت $\Gamma^s = (1/2)[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$ ، نیروهای ترمودینامیکی هستند که شرایط غیر تعادلی را ایجاد می‌کنند. برای اینکه دقیق‌تر باشیم، تانسور تنش را می‌توانیم به صورت $\Sigma = (1/3)\text{tr}\Sigma I + \tilde{\Sigma}$ تفکیک کنیم. در واقع تانسور تنش از یک قسمت اسکالر $\text{tr}\Sigma$ و یک قسمت تانسور مرتبه‌ی دو بدون تریس $\tilde{\Sigma}$ تشکیل شده است. تفکیکی مشابه برای تانسور گرادیان سرعت نیز انجام می‌شود. پس روابط پدیده شناختی با ۳ عدد اسکالر L_{qq} و L_{vv} و L به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\mathbf{J}_q = -L_{qq} \frac{\nabla T}{T^2}, \quad \frac{1}{3}\text{tr}\Sigma = l_{vv} \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{T}, \quad \tilde{\Sigma} = L \frac{\tilde{\Gamma}}{T}, \quad (19.13)$$

که در آن چون تانسور تنش متقارن است، در نتیجه تنها قسمت متقارن بردار گرادیان سرعت که بدون تریس هم شده است سهم دارد:

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma^s - \frac{1}{3}\nabla \cdot \mathbf{u} I, \quad \text{tr}\Gamma = \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

اکنون نرخ تولید آنتروپی بر حسب ضرایب پدیده‌شناختی به صورت زیر می‌شود:

$$\dot{s} = \frac{l_{vv}}{T^2} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{L_{qq}}{T^2} (\nabla T)^2 + \frac{L}{T^2} \text{tr}(\tilde{\Gamma} \cdot \tilde{\Gamma}) \geq 0. \quad (20.13)$$

مثبت بودن نرخ تولید آنتروپی، از رابطه‌ی به دست آمده به صورت مشهود دیده می‌شود. اکنون می‌توانیم معادلات تحولی سامانه‌ی هیدرودینامیکی تک مولفه‌ای را بنویسیم. چگالی، میدان سرعت، انرژی درونی، فشار و دما متغیرهای این سامانه هستند. معادلات توصیف کننده عبارتند از معادله‌ی پیوستگی جرم ۱.۱۳، معادله‌ی پایستگی تکانه ۲.۱۳، معادله‌ی تحولی انرژی درونی ۸.۱۳ و معادلات حالت. با تعریف $\lambda = L_{qq}/T^2$ و $\eta_v = l_{vv}/T$ ، $\eta = L/2T$ با تعریف معادلات اساسی را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \quad P = P(\rho, T), \quad \epsilon = \epsilon(\rho, T), \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + (\eta_v + \eta/2) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}), \\ \rho \frac{d\epsilon}{dt} &= \lambda \nabla^2 T - P \nabla \cdot \mathbf{u} + \eta_v (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + 2\eta \text{tr}(\tilde{\Gamma} \cdot \tilde{\Gamma}). \end{aligned} \quad (21.13)$$

معادله‌ی نویه-استوکس که تحول شار را مشخص می‌کند، در بین روابط بالا نمودار است. بررسی یک حالت خاص که در آن هیچ حرکت مکانیکی در سامانه وجود ندارد، جالب توجه است. در این مورد چون حرکت نداریم، میدان سرعت صفر است پس: $d\epsilon/dt = \partial_t \epsilon = c_v \partial_t T$. با استفاده از این رابطه، معادله‌ی آخر از روابط بالا را می‌توان به شکل ساده شده‌ی $\rho c_v \partial_t T = \lambda \nabla^2 T$ نوشت. این معادله، به معادله‌ی انتقال حرارت موسوم است و تحول زمانی میدان دما را در یک سامانه‌ی جامد می‌دهد.

۷.۱۳ شارش وشکسان-کشسان

شارش وشکسان-کشسان در فصول قبل معرفی شده است. در این قسمت نشان می‌دهیم که جریان ترمودینامیکی در این شارها، قسمت غیر اتلافی هم دارد. آن چنان که گفته شد، مدل ماکسول شارهایی را توصیف می‌کند که رفتار آنها در زمان‌های کوتاه بصورت کشسان و در زمان‌های بلند بصورت ویسکوز است. واضح است که رفتار کشسانی، پدیده‌ای غیر اتلافی

است. در این شماره‌ها روابط پدیده‌شناختی بین جریان (تنش) و نیروی ترمودینامیکی (گرادیان سرعت) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(1 + \tau \frac{D}{Dt}) \tilde{\Sigma} = \gamma \eta \tilde{\Gamma}. \quad (22.13)$$

قسمت‌های اتلافی و غیراتلافی تنش را بصورت $\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^r + \tilde{\Sigma}^d$ جدا می‌کنیم. با جایگزاری این رابطه در رابطه‌ی بالا و توجه به پاریتی زمانی طرفین داریم:

$$\tilde{\Sigma}^r + \tau \frac{D}{Dt} \tilde{\Sigma}^d = 0, \quad \tilde{\Sigma}^d + \tau \frac{D}{Dt} \tilde{\Sigma}^r = \gamma \eta \tilde{\Gamma}, \quad (23.13)$$

پس با داشتن تنش، می‌توانیم قسمت‌های اتلافی و غیر اتلافی آن را بصورت زیر جدا کنیم:

$$\tilde{\Sigma}^r = -\tau \frac{D}{Dt} \tilde{\Sigma}^d, \quad (1 - \tau^2 \frac{D^2}{Dt^2}) \tilde{\Sigma}^d = \gamma \eta \tilde{\Gamma} = \tilde{\Sigma}. \quad (24.13)$$

۸.۱۳ دینامیک کریستال مایع نماتیک

به عنوان مثالی دیگر از کاربرد نظریه‌ی پاسخ خطی، دینامیک یک سامانه‌ی کریستال مایع نماتیک را بررسی می‌کنیم. در مورد کریستال مایع، نظریه‌ی دینامیکی مورد نظر باید به صورت همزمان حرکت مدهای انتقالی و مدهای چرخشی مولکول‌ها که به ترتیب با میدان‌های $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ و $\hat{n}(\mathbf{r}, t)$ مشخص می‌شوند را در نظر بگیرد. توجه کنید که میدان $\hat{n}(\mathbf{r}, t)$ جهت گیری مولکولهای میله‌ای شکل کریستال مایع نماتیک را نشان می‌دهد. معادلات حرکت را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\rho \frac{d}{dt} \mathbf{u} = -\nabla P + \nabla \cdot \Sigma, \quad \frac{d}{dt} \hat{n} = \mathbf{N},$$

که در آن جریان‌های ترمودینامیکی Σ و $\mathbf{N}$ باعث حرکت و دورشدن سامانه از تعادل می‌شوند. برای استفاده‌های بعدی توجه کنید که شار تکانه که با Σ نشان داده شده است، جریان وابسته به میدانی را نشان می‌دهد که دارای پاریتی زمانی فرد است. از طرف دیگر $\mathbf{N}$ جریان وابسته به میدانی با پاریتی زمانی زوج است. مشابه حالت یک شارهی ساده، نیروی ترمودینامیکی $\Gamma_{ij} = \partial_i u_j$ باعث ایجاد شار تکانه می‌شود. عامل حرکت چرخشی مولکول‌ها را با $\mathbf{h}$ نشان

می‌دهیم. این نیرو قاعدتا از برهمکنش بین مولکول‌های کریستال مایع ناشی می‌شود. پیش از پرداختن به جزییات، به نتیجه‌ی نهایی زیر برای نیروهای مولد حرکت نگاه کنید:

$$\Sigma - \Sigma^e = -\frac{1}{\gamma} \left(\mathbf{h}^\perp \hat{n} - \hat{n} \mathbf{h}^\perp \right) - \frac{\lambda}{\gamma} \left(\hat{n} \mathbf{h}^\perp + \mathbf{h}^\perp \hat{n} \right) + \Sigma^d$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{nn} - I) \mathcal{D} \mathbf{n} + \gamma^{-1} \mathbf{h}. \quad (25.13)$$

که در آن $\mathcal{D} = \Gamma^a + \lambda \Gamma^s$ و λ یک پارامتر بدون بعد است که شکل هندسی مولکول‌های کریستال مایع را مشخص می‌کند. $\lambda = 0$ مولکول‌ها همسانگرد و کروی شکل را نشان می‌دهد. برای یک مولکول بیضی‌گون با اندازه‌ی نیم-قطر بزرگ ℓ و نیم-قطر کوچک $\Delta \ell$ داریم: $\lambda = \frac{\Delta^2 - 1}{\Delta^2 + 1}$. دقت کنید که برای $\lambda < 0$ یا بطور معادل $\Delta < 1$ ، مولکول میله-گون (کشیده) است و برای $\lambda > 0$ یا بطور معادل $\Delta > 1$ ، مولکول پخت (صفحه-گون) است.

در این روابط Σ^d قسمت اتلافی تنش شاره است که جزییات آن بعدا بیان می‌شود. جمله‌ی متناسب با γ^{-1} نیز اتلاف در مدهای چرخشی را نشان می‌دهد. در غیاب جریان‌های انتقالی خالص، هر گونه انحراف در جهت‌گیری مولکول‌ها از حالت تعادل که با کمینه‌ی انرژی چرخشی مشخص می‌شود، بواسطه‌ی یک فرآیند اتلافی به وضعیت تعادلی باز می‌گردد. این رفتار واهلشی به حالت تعادل در جمله‌ی متناسب با γ^{-1} مستتر است. تنش اریکسون با Σ^e مشخص شده است و بیانگر این موضوع است که در انرژی برهمکنشی مدهای چرخشی (که بعدا تعریف می‌شود)، عملا مدهای انتقالی هم به صورتی خود را نشان می‌دهند. گذشته از جملات مطرح شده، بقیه‌ی جملات موجود در روابط ترمودینامیکی بالا اثرهای غیر اتلافی هستند و سهم همرفت را نشان می‌دهند. در واقع مولکول‌های کریستال مایع با توجه به حجم و شکل هندسی که دارند، قاعدتا می‌توانند سوار شاره شده و همراه آن حرکت کنند. این حرکت‌های همرفتی، باعث حرکت انتقالی و چرخشی مولکول‌ها می‌شوند. وجود چرخش یا کرل در میدان شارشی، قادر است تا مولکول‌های همسانگرد و ناهمسانگرد را بچرخاند. از طرف دیگر شارش بدون چرخش نیز قادر است تا مولکول‌های ناهمسانگرد را بچرخاند. این جملات همرفتی، قاعدتا فرآیندهای غیر اتلافی هستند.

اکنون با استفاده از خواص تقارنی انزاگر و با جزییات بیشتری به استخراج روابط بالا می‌پردازیم. در مورد کریستال‌های مایع، عموما حالت تعادل از تابعی چگالی انرژی آزادی به

شکل $\mathcal{F}(\nabla \hat{n})$ و با رابطه‌ی $\mathbf{h} = -\delta \mathcal{F} / \delta \hat{n} = 0$ به دست می‌آید. توجه کنید که انرژی آزاد مربوط به درجات آزادی چرخشی مولکولها از رابطه‌ی $F = \int d^3x \mathcal{F}(\nabla \hat{n})$ بدست می‌آید. برای حالت دینامیکی دور از تعادل که مولکولها حرکت چرخشی دارند، نیروی ترمودینامیکی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$h_i = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial n_i} + \partial_j \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_j n_i)}.$$

توجه شود که قید ثابت بودن طول بردار جهت‌گیری، $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$ ، (که می‌توان با قید لاگرانژ آنرا در نظر گرفت) اجازه‌ی مولفه‌ی طولی برای نیروی چرخشی را نمی‌دهد. با در نظر گرفتن این نکته، نیروی ترمودینامیکی که قاعدتا تنها دارای مولفه‌ی عمودی است را به شکل $\mathbf{h}_\perp = (I - \hat{n}\hat{n}) \cdot \mathbf{h} = 0$ در نظر می‌گیریم.

نکته‌ی مهمی که باید به آن توجه کرد، این واقعیت است که انرژی آزاد $\mathcal{F}$ ، بصورت ذاتی می‌تواند درجات آزادی انتقالی و چرخشی را به هم مربوط سازد. درست است که انرژی آزاد فاز نماتیک تنها به درجات آزادی چرخشی مولکولها بستگی دارد، ولی با جابجا کردن مرکز جرم مولکولها، در شرایطی شاهد تغییرات در این انرژی آزاد خواهیم بود. برای فهم این موضوع، یک میدان جابجایی $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ ، در نظر بگیرید که در نتیجه‌ی این میدان جابجایی، مرکز جرم مولکولها جابجا می‌شود در حالیکه در طی این فرآیند جهت‌گیری مولکولها ثابت می‌ماند. در نتیجه‌ی اعمال این جابجایی، مرکز جرم هر مولکول به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{w}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}'(\mathbf{r}') = \mathbf{n}(\mathbf{r}),$$

توجه کنید که رابطه‌ی دوم تضمین می‌کند که جهت مولکولها در فرآیند جابجایی ثابت بماند. یک محاسبه‌ی ساده نشان می‌دهد که در فرآیند بالا که جهت‌گیری را ثابت نگاه می‌دارد، گرادیان جهت مولکولها تغییر می‌کند. تغییرات گرادیان میدان جهت‌گیری بصورت زیر می‌شود:

$$\frac{\partial n'_j}{\partial r'_i} = \frac{\partial n_j}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial r'_i} \sim \partial_i n_j - \partial_i w_k \partial_k n_j,$$

در نتیجه داریم:

$$\Delta(\partial_i n_j) = -\partial_i w_k \partial_k n_j.$$

پس انتظار داریم انرژی آزاد فاز نماتیک به میزان زیر تغییر کند:

$$\Delta F = \int d^3x \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i n_j)} \Delta (\partial_i n_j) = \int d^3x \Sigma_{ki}^e \partial_i w_k,$$

که در رابطه‌ی نهایی، تانسور اریکسون بصورت زیر تعریف شده است:

$$\Sigma_{ki}^e = -(\partial_k n_j) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i n_j)}.$$

در واقع این تنش که ناشی از همبستگی مدهای چرخشی و انتقالی در انرژی آزاد کشسانی است، باید به تنش اصلی سامانه اضافه شود.

در ادامه، برای یافتن شکل کلی دیگر قسمت‌های تانسور تنش و گشتاور وارد بر مولکول‌ها از نظریه‌ی خطی انزاگر استفاده می‌کنیم. معادلات انزاگر را به صورت عمومی زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \Sigma_{ij} - \Sigma_{ij}^e = \eta_{ijkl} \Gamma_{kl} + \Lambda_{ijk}^{-+} h_k^\perp \\ N_i = \Lambda_{ijk}^{+-} \Gamma_{jk} + L_{ij} h_j^\perp, \end{cases} \quad (26.13)$$

که در آن تانسور مرتبه دوم L و تانسور مرتبه‌ی چهارم η متقارن هستند: $\eta_{ijkl} = \eta_{klij}$. تانسورهای مرتبه‌ی سوم Λ^{+-} و Λ^{-+} دارای تقارن $\Lambda_{kij}^{+-} = -\Lambda_{ijk}^{-+}$ هستند. توجه شود که جملات ری‌اکتیو Λ^{+-} و Λ^{-+} نقشی در اتلاف انرژی ندارند. پس داریم:

$$T\dot{s} = \int d\mathbf{r} (h_i^\perp N_i^d + \Gamma_{ij} \Sigma_{ji}^d) \geq 0, \quad \int d\mathbf{r} (h_i^\perp N_i^r + \Gamma_{ij} \Sigma_{ji}^r) = 0.$$

اکنون برای اعمال تقارن‌های هندسی یک سامانه‌ی همگن و همسانگرد و بدست آوردن شکل کلی ضرایب پدیده‌شناختی، تانسور گردایان سرعت را به دو قسمت متقارن و پادمتقارن تفکیک می‌کنیم: $\Gamma = \Gamma^a + \Gamma^s$. در نتیجه‌ی این تفکیک، می‌توانیم قرار دهیم: $\Lambda^{+-} = \Lambda^{a+-} + \Lambda^{s+-}$. که $\Lambda_{ijk}^{s+-} = \Lambda_{ikj}^{s+-}$ و $\Lambda_{ijk}^{a+-} = -\Lambda_{ikj}^{a+-}$ است. ابتدا با قسمت پادمتقارن شروع می‌کنیم. کلی‌ترین شکل پیشنهادی به صورت زیر است:

$$\Lambda_{ijk}^{a+-} = c(n_j \delta_{ik} - n_k \delta_{ij}).$$

با استفاده از این نتیجه داریم:

$$\Lambda_{ijk}^{a+-} \Gamma_{jk}^a = c[(\nabla \times \mathbf{u}) \times \hat{n}]_i.$$

برای یک حالت ساده که کل سامانه بصورت صلب و با سرعت ثابت $\Omega = (1/2)\nabla \times \mathbf{u}$ می‌چرخد، انتظار داریم که یک جمله‌ی غیر اتلافی به شکل $\mathbf{N} = \Omega \times \hat{n}$ داشته باشیم. این نتیجه‌ای از چرخش کل سامانه است. در این صورت مجبوریم قرار دهیم $c = (1/2)$. این موضوع، همان حرکت همرفتی (هم-چرخشی) است که پیش از این مطرح شد. اکنون با استفاده از روابط تقارنی انزاگر و صفر شدن اتلاف ناشی از جملات ری‌اکتیو، خواهیم داشت:

$$\Lambda^{a-+} = -\frac{1}{4}(n_j\delta_{ik} - n_i\delta_{jk}).$$

برای قسمت متقارن Λ ، حدسی به شکل عام زیر را داریم:

$$\Lambda_{ijk}^{s+-} = \frac{\lambda}{4} (2n_i n_j n_k - (n_j\delta_{ik} + n_k\delta_{ij})),$$

که در آن علاوه بر خواص تقارنی سامانه‌ی متقارن و همسانگرد از قید $\hat{n} \cdot \mathbf{N} = 0$ نیز استفاده شده است. با در دست داشتن روابط بالا، داریم:

$$\Lambda_{ijk}^{s-+} = \frac{\lambda}{4} (2n_i n_j n_k - (n_j\delta_{ik} + n_i\delta_{jk})).$$

در نهایت قسمت ری‌اکتیو تانسور تنش بصورت زیر می‌شود:

$$\Sigma_{ij}^r = -\frac{\lambda}{4} (n_i h_j^\perp + h_i^\perp n_j) - \frac{1}{4} (h_i^\perp n_j - n_i h_j^\perp),$$

و

$$N_i^r = \Lambda_{ijk}^{a+-}\Gamma_{jk}^a + \Lambda_{ijk}^{s+-}\Gamma_{jk}^s = (n_i n_j - \delta_{ij}) \mathcal{D}_{jk} n_k.$$

توجه کنید که در رابطه‌ی آخر از فشردن نویسی $\mathcal{D} = \Gamma^a + \lambda\Gamma^s$ استفاده شده است. توجه کنید

که در آنجا از اتحاد $n_i n_j \mathcal{D}_{jk} n_k = \lambda n_i n_j \Gamma_{jk}^s n_k$ نیز استفاده شده است.

بار دیگر اتلاف انرژی را بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه چرخش صلب با اتلاف همراه نیست، نتیجه می‌گیریم که قسمت پادمقارن تانسور تنش اتلافی باید برابر باشد با $\Sigma^{d,a} = 0$.

پس

$$T\dot{s} = \int d\mathbf{r} (h_i^\perp N_i^d + \Gamma_{ij}^s \Sigma_{ji}^{d,s}) \geq 0,$$

توجه کنید که برای چرخش صلب $\hat{n} \times \Omega = \mathbf{N} = \mathbf{N}^T = \mathbf{0}$ ، $\mathbf{N}^d = \mathbf{0}$ و $\Gamma^s = \mathbf{0}$ که نتیجه می‌دهد $T\dot{s} = 0$.

برای تعیین قسمت اتلافی تانسور تنش، تانسور ویسکوزیته را به صورت $\eta = \eta^s + \eta^a$ تفکیک می‌کنیم که در آن متقارن و پادمتقارن بودن نسبت به جایگشت دو اندیس اول و دو اندیس دوم تعریف شده است. می‌توان نشان داد که در عدم حضور میدان مغناطیسی تانسور ویسکوزیته قسمت پادمتقارن ندارد. علاوه بر آن تانسور ویسکوزیته باید نسبت به دو اندیس اول و همچنین دو اندیس دوم متقارن باشد. با در نظر گرفتن همه‌ی این قیود شکل عمومی زیر برای تانسور ویسکوزیته پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij}^d = & \quad 2\nu_2 \Gamma_{ij}^s + 2(\nu_3 - \nu_2)(n_i \Gamma_{jk} + n_j \Gamma_{ik})n_k + (\nu_2 - \nu_4) \Gamma_{kk} \delta_{ij} \\ & - 2(\nu_1 + \nu_2 - 2\nu_3)n_i n_j n_k n_l \Gamma_{kl}^s \\ & + (\nu_5 - \nu_4 + \nu_2)(n_k n_l \Gamma_{kl}^s \delta_{ij} + \Gamma_{kk} n_i n_j). \end{aligned} \quad (27.13)$$

که همانطور که دیده می‌شود، دارای ۵ ضریب پدیده‌شناختی ویسکوزیته است. در نهایت ساده‌ترین شکل اتلافی برای گشتاور اتلافی به صورت زیر، معادلات حرکت را کامل می‌کند:

$$\mathbf{N}^d = \gamma^{-1} \mathbf{h}.$$

مطابق این مدل ساده، در غیاب هر گونه شارش و حرکت انتقالی، مدهای چرخشی دور از تعادل بصورت نمایی به حالت‌های تعادل (نقاط کمینه‌ی انرژی آزاد) واهلیده می‌شوند.

دینامیک پارامتر نظم نماتیک

کریستال مایع نماتیک با پارامتر نظم $Q = q(\hat{n}\hat{n} - (1/3)\mathbf{I})$ در $d = 3$ مشخص می‌شود. در این صورت عموماً علاقه داریم، دینامیک پارامتر نظم را بررسی کنیم. فرض کنیم که قدرت نظم نماتیک که با q نشان داده شده است، کمیتی ثابت است. با استفاده از رابطه‌ی $\partial_t \hat{n} =$

$$-(\mathbf{u} \cdot \nabla) \hat{n} + \mathbf{N}^r + \mathbf{N}^d$$

(۲۸.۱۳)

$$\partial_t Q_{ij} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) Q_{ij} = -[\Gamma^a, Q]_{ij} - \lambda \{\Gamma^s, \bar{Q}\}_{ij} + 2\lambda \bar{Q}_{ij} (n_k n_l \Gamma_{lk}^s) + \dot{Q}_{ij}^d,$$

که در آن $\bar{Q} = Q + (q/3)I$ و همچنین سهم اتلاف را با رابطه‌ی $\dot{Q}^d = -\gamma^{-1}(\delta\mathcal{F})/(\delta Q)$ نشان داده‌ایم. جابجاگر و پادجابجاگر دو تانسور بصورت زیر تعریف شده‌اند:

$$[A, B]_{ij} = A_{ik}B_{kj} - B_{ik}A_{kj}, \quad \{A, B\}_{ij} = A_{ik}B_{kj} + B_{ik}A_{kj}.$$

۹.۱۳ ویسکوزیته‌ی پادمقارن

آنطور که دیده شد، بحث قسمت قبلی مربوط به سامانه‌های هیدرودینامیکی متعارف بود. با بررسی دقیق‌تر روابط خطی بین نیروها و جریان‌ها می‌توانیم برخی حالت‌های غیر متعارف را نیز بازشناسی و بررسی کنیم. جریان‌ها و نیروهای ترمودینامیکی در یک سامانه‌ی غیرتعادلی هیدرودینامیکی-شارشی با تانسورهای مرتبه‌ی دوم تنش و گرادیان سرعت متناظر هستند. تانسورهای مقارن مرتبه‌ی دو تنش و گرادیان سرعت را به ترتیب با Σ و $\Gamma = (\nabla \mathbf{u} + [\nabla \mathbf{u}]^T)/2$ نشان داده‌ایم. عام‌ترین رابطه‌ی خطی بین این دو کمیت را بصورت $\Sigma_{ij} = L_{ijkl}\Gamma_{kl}$ در نظر بگیرید که در آن ضرایب پدیده‌شناختی با تانسور مرتبه‌ی چهار L_{ijkl} نشان داده شده است. بحثی که در بخش پیشین ارایه شد مختص شارهای سه بعدی همسانگرد و همگن، در غیاب میدان مغناطیسی و نیروهای کوریولیس بود. آن بحث نشان می‌داد که در شرایط گفته شده، تانسور ضرایب تنها با دو عنصر مستقل (ویسکوزیته‌ی برشی η و ویسکوزیته‌ی حجمی η_v) مشخص می‌شود. اکنون شرایط را کمی عام‌تر می‌کنیم و سیستم همسانگرد و همگنی را در نظر می‌گیریم که میدان مغناطیسی خارجی نیز بر آن اثر می‌کند. در ادامه می‌بینیم که روابط بدست آمده در قسمت قبلی، حالت خاصی از روابط این قسمت، خواهند شد. تانسور ضرایب، به علت مقارن بودن تانسورهای تنش و گرادیان سرعت، باید نسبت به جایگشت‌های $(ji) \leftrightarrow (ij)$ و $(lk) \leftrightarrow (kl)$ مقارن باشد. تانسور ضرایب، تانسوری است مرتبه‌ی چهار، در نتیجه در فضای سه بعدی، اصولاً باید دارای ۸۱ عضو باشد. تقارن‌هایی که در مورد دو اندیس اول و دو اندیس آخر به آنها اشاره شد، تعداد عناصر مستقل را تقلیل می‌دهد. یک راه ساده برای اینکه تعداد عناصر مستقل را بشماریم، این

است که توجه کنیم چون تانسورهای متقارن تنش و گرادیان سرعت، هر کدام ۶ عضو مستقل در فضای سه بعدی دارند، پس تانسور ضرایبی که این عناصر را به هم پیوند می‌دهد باید حداکثر ۳۶ عضو مستقل داشته باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که عناصر مستقل از این تعداد هم کمتر هستند. از نظر تقارن نسبت به جایگشت اندیس‌های $(kl) \leftrightarrow (ij)$ ، تانسور ضرایب را به دو قسمت متقارن و پادمتقارن بصورت $L = L^s + L^a$ تفکیک می‌کنیم (این نوع تفکیک برای هر تانسور قابل اجراست). قسمت‌های متقارن و پادمتقارن دارای خاصیت $L_{ijkl}^s = L_{klij}^s$ و $L_{ijkl}^a = -L_{klij}^a$ هستند. آن‌چنان که پیشتر اشاره شد و بنا به خواص تقارنی انزاگر، و در حضور میدان مغناطیسی خارجی، قسمت‌های متقارن و پادتقارن تانسور ضرایب باید نسبت به وارونی زمان همراه با وارونی میدان خارجی، به ترتیب دارای پاریتی زوج و فرد باشند:

$$L_{ijkl}^s(B) = L_{ijkl}^s(-B), \quad L_{ijkl}^a(B) = -L_{ijkl}^a(-B).$$

با استفاده از ملاحظات تقارنی، کلی‌ترین شکل تانسور ضرایب را می‌توانیم حدس بزنیم. اجازه دهید با حالت سیستم سه بعدی شروع کنیم. واضح است، تنها در صورتی که میدان خارجی نداشته باشیم، سیستم مورد نظر همسانگرد است. بنا به ملاحظات تقارنی برای سامانه‌های همگن و همسانگرد سه بعدی، قسمت متقارن به شکل زیر می‌شود:

$$L_{ijkl}^s = a_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + a_2 (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{jl} \delta_{ik}),$$

این شکل، تنها صورتی از ماتریس ضرایب است که تقارن‌های گفته شده را می‌تواند برآورده کند. برای حدس بالا، از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که δ_{ij} ، تانسور واحد، تنها تانسوری مرتبه‌ی دو با خواص کامل تقارنی و همسانگردی در فضای سه بعدی است. برای یافتن شکل عمومی یک تانسور مرتبه‌ی چهار در این فضا، می‌توانیم تمامی ترکیب‌هایی که با کنار هم قرار دادن دو تانسور واحد با جایگشت‌های متفاوت اندیس‌ها می‌توان ساخت را در نظر بگیریم. رابطه‌ی بالا عملاً همین ترکیبی که گفته شد است، با این تفاوت که ضرایب هر جمله به گونه‌ای برگزیده شده است تا خواص تقارنی اضافی مورد نظر را هم برآورده کند. توجه کنید که در این حالت، تانسور ضرایب با دو عنصر مستقل مشخص می‌شود. این دو عنصر مستقل همان ضرایب ویسکوزیته‌ی معمول هستند که در قسمت پیشین به آنها اشاره شد. با مقایسه، دیده می‌شود که: $a_2 = \eta$ و

$a_1 = \eta_v - (2/3)\eta$. قسمتی از تانسور تنش که متناظر با قسمت متقارن تانسور ضرایب است، در نمایش ماتریسی به صورت $\Sigma^s = a_1 \text{tr} \Gamma \mathbf{I} + 2a_2 \Gamma$ است که در آن $\mathbf{I}$ ماتریس واحد است. از این نتیجه برای بدست آوردن معادلات حرکت و نرخ اتلاف انرژی استفاده می‌شود. تنها در شرایطی که میدان مغناطیسی خارجی حضور دارد (تقارن وارونی زمان معادلات میکروسکوپی شکسته می‌شود)، قسمت پادمتقارن تانسور ضرایب ممکن است در شرایطی جواب غیر بدیهی و غیر صفر داشته باشد. البته محاسبات نشان می‌دهد برای سامانه‌های همگن و همسانگرد در فضای سه بعدی، حتی در حضور میدان خارجی، قسمت پادمتقارن ضرایب باید صفر باشد.

در مورد سامانه‌های دو بعدی در حضور میدان مغناطیسی، وضعیت متفاوت است. راستای میدان را بر صفحه‌ی دو بعدی که شارش در آن جریان دارد، عمود می‌گیریم تا شرط همسانگردی در صفحه‌ی شارش حفظ شود. برای این سامانه‌های دو بعدی همگن و همسانگرد، می‌توانیم انتخابی به شکل زیر برای قسمت پادمتقارن تانسور ضرایب در نظر بگیریم که خواص تقارنی را برآورده می‌کند:

$$L_{ijkl}^a = \eta^\circ (\delta_{jk} \epsilon_{il} + \delta_{jl} \epsilon_{ik} + \delta_{il} \epsilon_{jk} + \delta_{ik} \epsilon_{jl}),$$

که در آن، $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ تانسور کاملاً پادمتقارن در فضای دو بعدی است. دیده می‌شود که، قسمت پادمتقارن تانسور ضرایب با یک عنصر مستقل وابسته به میدان η° مشخص شده است. وابستگی این ویسکوزیته‌ی نامتعارف به میدان مغناطیسی باید به شکل $\eta^\circ(B) = -\eta^\circ(-B)$ باشد و در حالت میدان صفر، ویسکوزیته‌ی نامتعارف صفر می‌شود. با استفاده از این شکل اخیر برای ماتریس ضرایب، سهم این جمله در تانسور تنش را بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\Sigma_{ij}^\circ = L_{ijkl}^a \Gamma_{kl} = 2\eta^\circ (\epsilon_{ik} \Gamma_{kj} + \epsilon_{jk} \Gamma_{ki}).$$

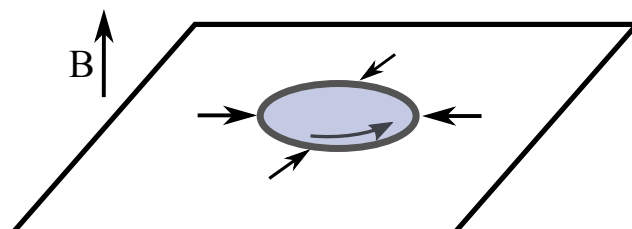
برای استفاده در معادله‌ی حرکت شار، به $\nabla \cdot \Sigma^\circ$ احتیاج داریم. با محاسبه‌ی مستقیم مولفه‌ها می‌توان به راحتی دید که:

$$[\nabla \cdot \Sigma^\circ]_i = \eta^\circ \epsilon_{ij} \nabla^2 u_j = \eta^\circ \partial_i \omega + \eta^\circ \epsilon_{ij} \partial_j (\nabla \cdot \mathbf{u}),$$

که در آن، $\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$ چرخش شاره در فضای دو بعدی را نشان می‌دهد. اکنون می‌توانیم معادلات تحولی شارش تراکم ناپذیر دو بعدی را در حضور ویسکوزیته‌های متعارف و ویسکوزیته‌ی نامتعارف به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\rho_{2D} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \nabla(-P + \eta^\circ \omega) + \eta_{2D} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

که در آن، چگالی جرم در واحد سطح با ρ_{2D} و ویسکوزیته‌ی متعارف شاره‌ی دو بعدی با η_{2D} نشان داده شده است. دیده می‌شود که در شارش‌های تراکم ناپذیر، اثر ویسکوزیته‌ی نامتعارف بصورت جمله‌ی متناسب با چرخش است که به فشار همسانگرد اضافه شده است. رد این اثر بصورت شهودی در ارتباط بین چرخش و فشار نمودار می‌شود. به عنوان مثال در شارش دو بعدی فرض کنید یک دیسک دایره‌ای صلب با شرط مرزی بدون لغزش داریم که درون صفحه‌ی شارش و حول مرکزش با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. اثر ویسکوزیته‌ی متعارف در این آزمایش را می‌توانیم در گشتاور چرخشی که از جانب شاره به دیسک وارد می‌شود، مشاهده کنیم. این گشتاور ناشی از ویسکوزیته‌ی متعارف، اثری اتلافی است که تمایل دارد از چرخش دیسک جلوگیری کند. ویسکوزیته‌ی نامتعارف، اثری غیر اتلافی است و رد آن در آزمایش شرح داده شده یک نیروی شعاعی است که از لبه‌های دیسک چرخان به آن اثر می‌کند. این تنش شعاعی تمایل دارد دیسک را فشرده‌تر (بسته به جهت چرخش، گسترده‌تر) کند و مقدار آن نیرو یا فشار شعاعی متناسب با $\eta^\circ(B)\omega$ است. این اثر پادمتقارن است، به این معنی که اگر دیسک را تحت فشار شعاعی قرار دهیم، نباید انتظار داشته باشیم که آن دیسک شروع به چرخش کند. برای ایجاد شهود بهتر، یک لایه‌ی بسیار نازک از آب را در نظر بگیرید که یک میدان مغناطیسی عمود بر آن اعمال کرده‌ایم. اکنون یک قطره‌ی کوچک روغن را روی آن قرار می‌دهیم. انتظار داریم به علت کشش سطحی، قطره شروع کند به پخش شدن روی لایه‌ی نازک. تصور کنید پیش از آن‌که پخش قطره آغاز شود، یک چرخش اولیه‌ی به لکه‌ی قطره بدهیم. انتظار داریم به علت ویسکوزیته‌ی پادمتقارن، قطره که شبیه دیسک چرخان است، یک نیروی شعاعی کسب کند. این نیروی شعاعی وابسته به جهت میدان است و با تغییر جهت میدان، از حالت نیروی پخش کننده به نیروی جمع کننده تبدیل می‌شود. قاعدتا با آنالیز دقیق این آزمایش باید بتوان اندازه‌ی ویسکوزیته‌ی پادمتقارن را اندازه‌گیری کرد.



شکل ۱۰.۱۳ یک قطره‌ی چرخان روغن روی لایه‌ی نازکی از یک شاره با ویسکوزیته‌ی پادمتقارن، تمایل دارد جمع شود.

توجه کنید که در شاره‌ی باردار دوبعدی، ویسکوزیته بعد جرم بر زمان دارد. برای برآورد مرتبه‌ی ویسکوزیته‌ی متعارف، توجه کنید که در دیدگاه ریزمقیاس جرم مولکول‌ها از مرتبه‌ی 10^{-26}Kg و زمان مشخصه‌ی انتقال انرژی بین مولکول‌ها برابر با 10^{-14}s است. در نتیجه انتظار داریم ویسکوزیته از مرتبه‌ی $10^{-12} \sim \eta_{2D}$ باشد. در مورد ویسکوزیته‌ی نامتعارف، از اندازه‌ی میدان مغناطیسی خارجی و بارالکتریکی ذرات برای آنالیز ابعادی استفاده می‌کنیم تا بدست آوریم: $qB \sim \eta^\circ$ که در آن q بار الکتریکی ذرات است. برای تخمین، یک محلول نمکی معمولی در میدان مغناطیسی قوی $1 \text{T} \sim B$ را در نظر بگیرید. دیده می‌شود که $10^{-19} \sim \eta^\circ$ در نتیجه $10^{-7} \sim \eta^\circ / \eta_{2D}$ و عملاً انتظار نداریم ویسکوزیته‌ی پادمتقارن اثر قابل توجهی را در پی داشته باشد.

در مثال بالا، تخمینی از مقدار ویسکوزیته‌ی نامتعارف برای یک سیستم شاره‌ی باردار که در میدان مغناطیسی قرار دارد ارایه شد. اخیراً آزمایش‌هایی شده است که در آن شاره‌های غیر متعارفی را بصورت آزمایش فراهم آورده‌اند که تقارنی و ارونی زمانی ندارند. یک مجموعه از کلویدهای چرخان را در نظر بگیرید که مجبورند به دلیل محدودیتهای هندسی که به آنها اعمال شده، روی یک ناحیه‌ی دوبعدی حرکت کنند. چرخش کلویدها به صورتی است که بردار چرخش همه‌ی آنها با هم موازی و عمود بر سطح است. این سیستم تقارن و ارونی زمانی و انعکاس آینه‌ای را ندارد در نتیجه انتظار داریم وشکسانی نامتعارف در آن دیده شود. از نظر آزمایشگاهی، این کلویدها دارای گشتاور مغناطیسی هستند و با اعمال یک میدان مغناطیسی خارجی چرخان، به گردش در آمده‌اند. برای تخمین میزان وشکسانی نامتعارف در این سامانه، کافیهست eB روابط

قسمت قبلی را با $m\omega$ جایگزین کنیم. در اینجا m و ω به ترتیب، جرم و سرعت چرخش کلویدها هستند.

اشاره شد که پدیده‌های ناشی از ویسکوزیته‌ی نامتعارف، اتلاف انرژی به همراه ندارند. برای نشان دادن این موضوع در حالت کلی، لازم است تا نرخ تولید آنتروپی را محاسبه کنیم. بر حسب ماتریس‌های متقارن تنش و گرادیان سرعت، نرخ تولید آنتروپی از رابطه‌ی $T\dot{s} = \text{tr}(\Sigma\Gamma)$ بدست می‌آید. برای محاسبه‌ی سهم جمله‌ی ویسکوزیته‌ی نامتعارف در نرخ تولید آنتروپی، رابطه‌ی تنش فرد را بصورت ماتریسی $\Sigma^\circ = 2\eta^\circ(\epsilon\Gamma - \Gamma\epsilon)$ در نظر بگیرید. که در آن ماتریس‌های استفاده شده دارای تقارن‌های $\Gamma = \Gamma^T$ و $\epsilon = -\epsilon^T$ می‌باشند. با یک محاسبه‌ی ساده ریاضی می‌بینید که: $\text{tr}(\Sigma^\circ\Gamma) = 0$. در نتیجه، قسمت پادمتقارن ضرایب خطی سهمی در اتلاف انرژی ندارد.^۱

^۱ برای محاسبه‌ی سهم اتلاف ناشی از قسمت متقارن تانسور ضرایب، توجه کنید که برای حالت ساده‌ی $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ و در نمایش ماتریسی داریم: $\Sigma^s = 2\eta\Gamma$ و از آنجا $\text{tr}(\Sigma^s\Gamma) = 2\eta\text{tr}(\Gamma^2) = -\eta(\nabla \times \mathbf{u})^2$.

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

پیوست آ

مقدمه‌ای بر نرم‌افزار COMSOL

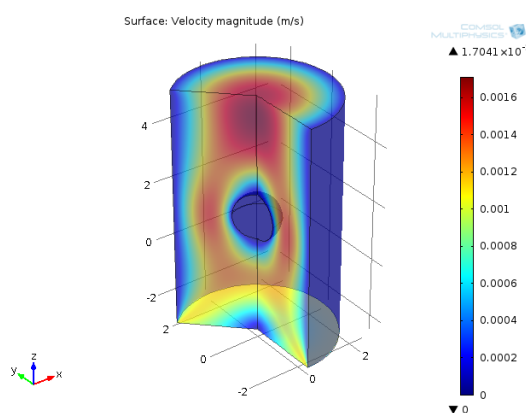
بسیاری از مسائل واقعی مکانیک شاره‌ها، با روش‌های تحلیلی که در این کتاب توضیح داده شد، قابل بررسی نیستند. این موضوع به سبب پیچیدگی ریاضی مسائل واقعی است. در این گونه موارد ناچاریم معادلات دیفرانسیل ناویه-استوکس را با روش‌های عددی حل کنیم. علاوه بر این، معمولاً حل عددی احساس شهودی بهتری در مورد مسائل می‌دهد. کتاب‌های بسیاری اصول حل عددی معادلات مکانیک شاره‌ها را به تفصیل بیان کرده‌اند. امروزه با گسترش دانش رایانه و توسعه‌ی روش‌های عددی، برای بسیاری از مسائل، نرم‌افزارهای کاربر پسندی ساخته شده است.

در اینجا می‌خواهیم به معرفی یکی از قدرتمندترین نرم‌افزارهای عددی بپردازیم. نرم‌افزار COMSOL یا COMSOL-Multiphysics برپایه‌ی روش عددی اجزا محدود طراحی شده است. این نرم‌افزار تحقیقاتی قادر است تا مسائل شاخه‌های مختلفی از علوم و مهندسی را بصورت عددی حل کند. شبیه‌سازی و حل عددی مسائل مربوط به مهندسی برق، مکانیک شاره‌ها، مکانیک محیط‌های کشسان، مسائل اکوستیک، امواج الکترومغناطیسی در ناحیه‌های مرزدار، محیط‌های پلازما، انتقال جرم، انتقال حرارت، تلاطم و پخش، همگی از قابلیت‌های این نرم افزار است. امکان مطالعه‌ی مسائل ترکیبی (مثل مساله‌ی پخش که با معادلات شارشی جفت می‌شود) نیز به سهولت در این برنامه وجود دارد.

از قابلیت‌های این نرم‌افزار، امکان موازی سازی برنامه‌هاست. اگر پردازشگر رایانه دارای چند هسته باشد، این نرم‌افزار می‌تواند محاسبات را بصورت موازی و همزمان روی همه‌ی پردازشگرها انجام دهد تا جواب نهائی را سریعتر به دست آورد. این نرم‌افزار امکان نصب روی اکثر سیستم‌های عامل را داراست. تمامی مطالب این بخش با نسخه‌ی 4.3-COMSOL و روی سیستم عامل Linux-OpenSUSE-13.2 اجرا شده است.

یک مثال

در اینجا به یک مسأله‌ی شارشی می‌پردازیم. مسأله عبارتست از شارش درون یک استوانه‌ی صلب. این جریان از یک سو وارد و از دیگر سوی استوانه خارج می‌شود. یک کره‌ی صلب که درست روی محور استوانه و در یک جایگاه ثابت نسبت به استوانه قرار دارد، جلوی جریان را می‌گیرد. جریان فرودی پس از برخورد با کره، مسیر خود را تغییر داده و از اطراف کره می‌گذرد



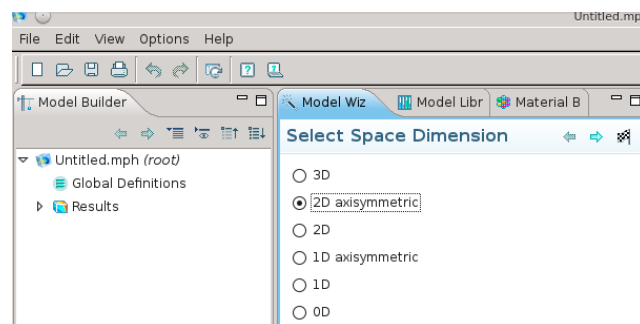
شکل ۱.آ

تا از دیگر سوی استوانه خارج شود. طول استوانه برابر با 8mm ، شعاع آن برابر با 2mm و شعاع کره نیز برابر با 0.75mm است. جریان فرودی از پایین وارد استوانه می‌شود. سرعت شارش ورودی درست روی محور استوانه برابر با 1mm/s و بصورت یک تابع توان ۲ برحسب فاصله از محور، کاهش می‌یابد و روی سطح استوانه به صفر می‌رسد. جنس شاره، روغن موتور با

وشکسانی سینماتیکی $\nu = 0.1cSt$ است. نتیجه‌ی نهایی حل این مسأله با نرم‌افزار COMSOL، در شکل ۱.آ نشان داده شده است. در این شکل اندازه‌ی سرعت در هر نقطه، برحسب رنگ‌ها نمایش داده شده است.

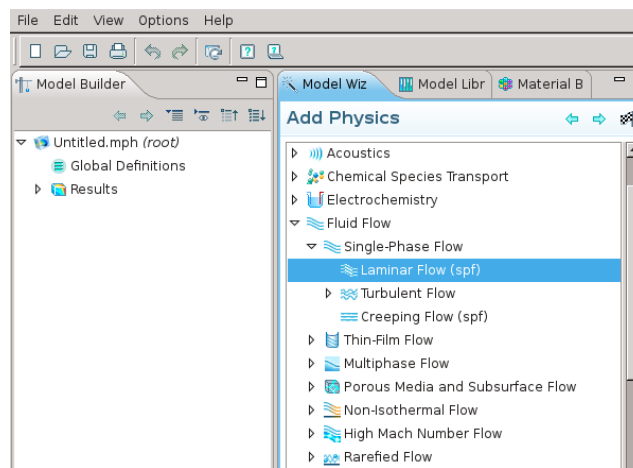
برای حل عددی این مسأله، ابتدا دقت می‌کنیم که عدد رینولدز کوچک است: $Re \ll 1$. بنابراین با یک مسأله‌ی شارش لایه‌ای سروکار داریم. علاوه براین موضوع، به خاطر تقارن سمتی عملاً با یک مسأله‌ی دو بعدی مواجهیم.

مطابق شکل ۲.آ در صفحه‌ی آغازین کامسال گزینه 2D Axisymmetric را برمی‌گزینیم. حال کلید آبی رنگ روبروی Select Space Dimension را انتخاب می‌کنیم تا به مرحله‌ی بعد برویم.

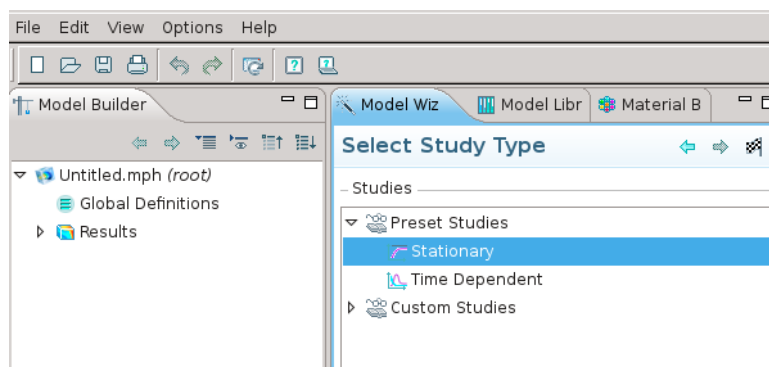


شکل ۲.آ

مطابق شکل‌های ۳.آ و ۴.آ، گزینه‌های مربوط به Laminar Flow و Stationary را انتخاب و به مراحل بعدی می‌رویم. بعد از انتخاب هر گزینه و برای رفتن به مرحله‌ی بعدی، روی پیکان رو به جلو که در بالای صفحه و روبه‌روی Select Space Dimension است، کلیک کنید. در نهایت برای اینکه این مرحله کامل شود، روی گزینه‌ی Finish که در مجاورت پیکان‌های قبلی است کلیک کنید.

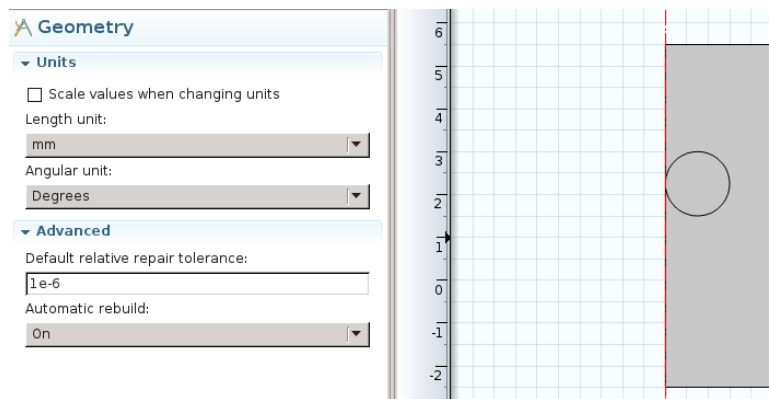


شکل ۳.آ



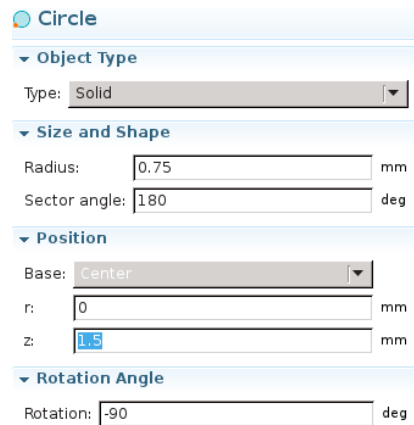
شکل ۴.آ

حال در این مرحله، مطابق شکل ۵.آ، هندسه‌ی مسأله، که عبارت است از یک مستطیل و نیم‌دایره را رسم می‌کنیم. در واقع به خاطر تقارن سمتی، مستطیل نماینده‌ی استوانه و نیم‌دایره معرف کره است. برای تولید نیم‌دایره، ابتدا یک دایره‌ی کامل رسم کرده و مطابق شکل ۶.آ



شکل ۵.آ

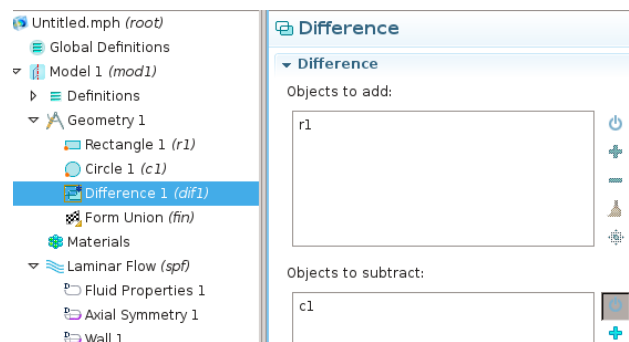
مشخصات دایره را تغییر می‌دهیم. فراموش نکنید که در پایان هر مرحله برای اینکه تغییرات



شکل ۶.آ

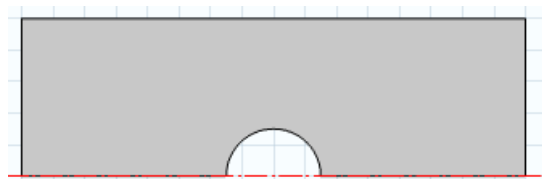
اعمال شوند باید روی گزینه‌ی Built All کلیک کنید.

فضای مسأله، ناحیه‌ی درون استوانه و خارج کره است. بنابراین فضای درون دایره را از هندسه‌ی مسأله کم می‌کنیم. مطابق شکل ۷.آ، روی گزینه‌ی Geometry کلیک راست کنید و گزینه‌ی Boolean Operation و از آنجا گزینه‌ی Differences را انتخاب کنید. مطابق شکل، با کلیک کردن روی مستطیل آنرا به مستطیل بالا Object to Add اضافه کنید. نیم‌دایره را هم به مستطیل پایین یعنی Object to Subtract اضافه کنید. حالا با انتخاب گزینه‌ی Build All به هدفمان می‌رسیم. فضای داخل کره از هندسه‌ی مسأله حذف می‌شود. نتیجه‌ی به‌دست آمده در



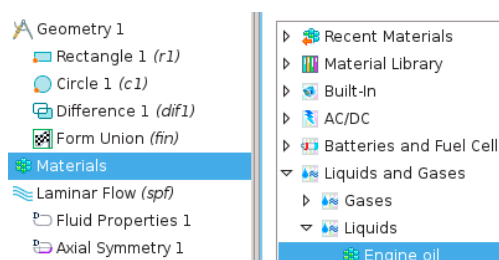
شکل ۷.آ

شکل ۸.آ نشان داده شده است.

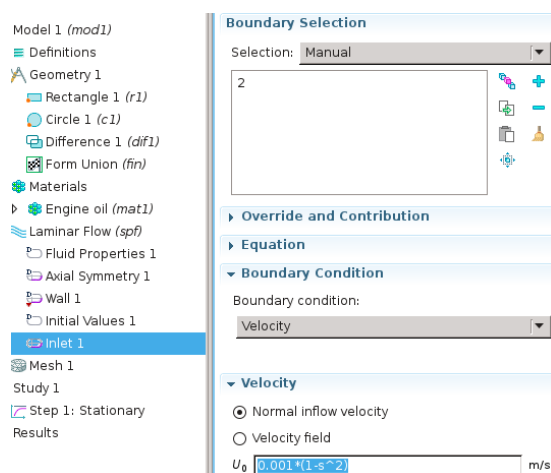


شکل ۸.آ

مطابق شکل ۹.آ، با کلیک راست روی گزینه‌ی Material و انتخاب Open Material Browser مایع مورد نظر را که اینجا روغن موتور است، برمی‌گزینیم. برای انتخاب شرایط مرزی، روی Laminar Flow کلیک راست کنید. به تمام گزینه‌ها نگاه کنید. تمام شرایط مرزی مختلف وجود دارد. برای اعمال شرایط شارهی ورودی، Inlet Flow را انتخاب می‌کنیم. مطابق شکل ۱۰.آ، مرز شماره ۲ را به عنوان مرز ورودی به مستطیل بالای صفحه یعنی قسمت Selection اضافه می‌کنیم. شرط مرزی مسأله را از نوع سرعت و بصورت m/s $(1 - s^2) * 10^{-5}$ انتخاب می‌کنیم. با این کار، شار ورودی را مطابق قانونی که ابتدا گفتیم، انتخاب می‌کنیم.

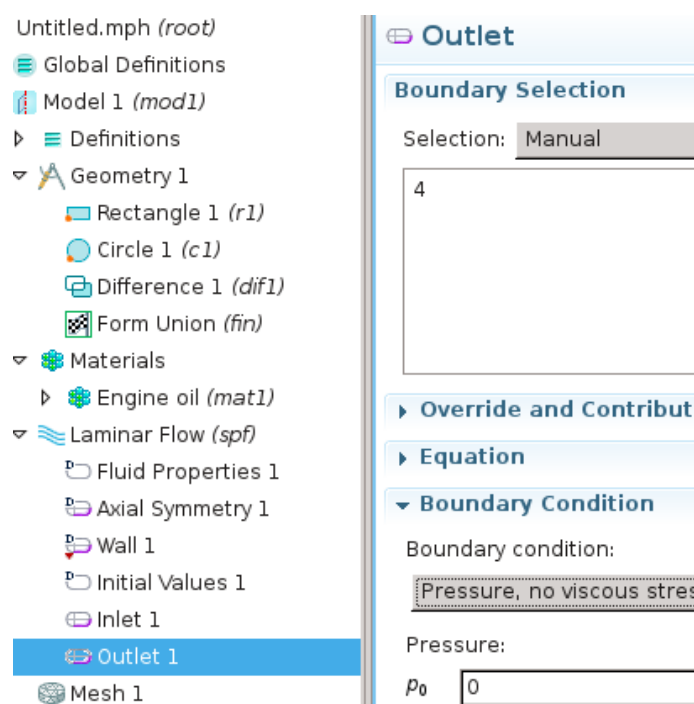


شکل ۹.آ



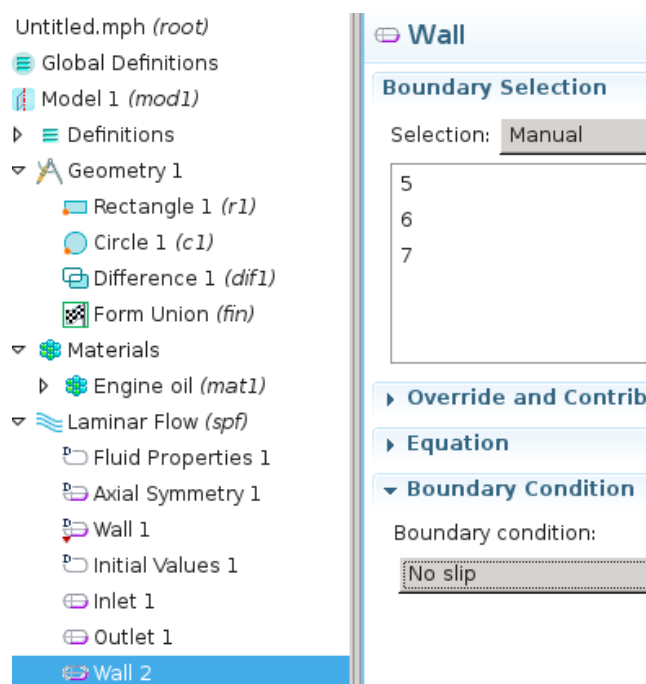
شکل ۱۰.آ

مطابق شکل ۱۱.آ، با کلیک راست روی Laminar Flow شرط مرزی از نوع Outlet Flow را انتخاب می‌کنیم. بالای استوانه یعنی ضلع شماره‌ی ۴ به مستطیل Selection اضافه می‌شود. به صورت پیش‌فرض فشار صفر برای این مرز انتخاب شده است.



شکل ۱۱.آ

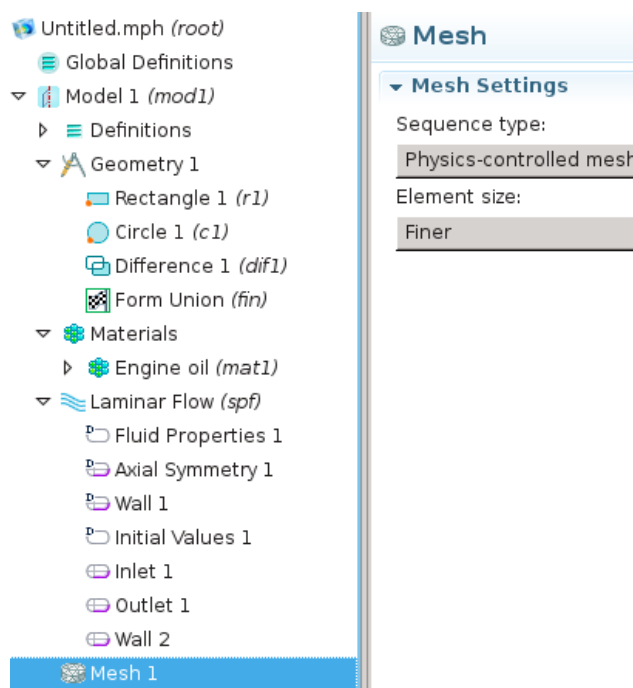
شرط مرزی روی دیگر مرزها از نوع بدون لغزش است. مطابق شکل ۱۲.آ، با کلیک راست روی Laminar Flow گزینه‌ی Wall را انتخاب می‌کنیم. از این گزینه برای اعمال شرط مرزی بدون لغزش روی دیگر مرزها استفاده شده است.



شکل ۱۲.آ

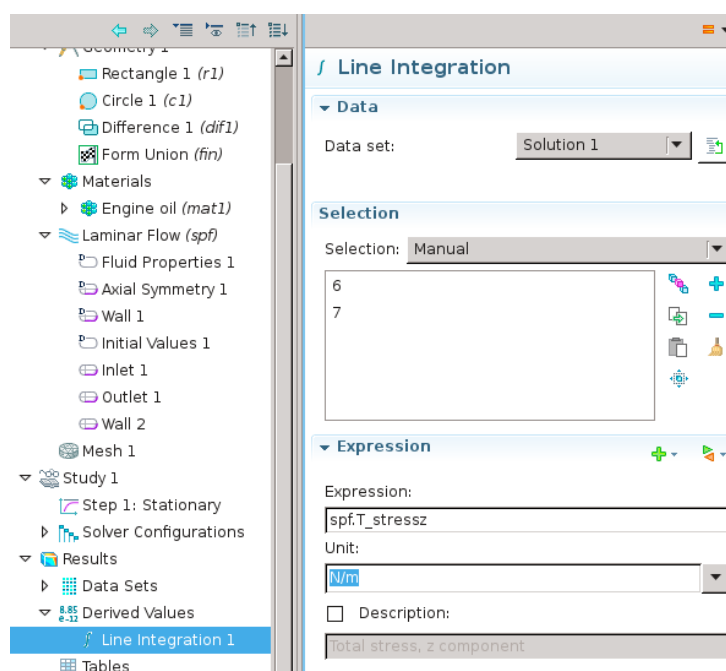
هندسه‌ی مسأله کامل شده، نوع شماره تعیین و شرایط مرزی هم اعمال شده است. برای حل عددی مسأله باید فضای درونی سیستم را گسسته کنیم. طبق شکل ۱۳.آ، گزینه‌ی Mesh را انتخاب کنید. در مستطیل وسط و در قسمت Element Size گزینه‌ی Finer را انتخاب کنید. حالا با انتخاب Build All شبکه را می‌سازیم.

برای اجرای برنامه و انجام محاسبات روی Study کلیک راست و از آنجا Compute را انتخاب کنید. زمان اجرای برنامه بسته به پیچیدگی مسأله متغیر خواهد بود. با اجرای کامل برنامه، نتایج به‌دست می‌آیند. شکل ۱.آ، یکی از نتایج بود که قبلاً به آن اشاره کردیم. بعد از اجرای برنامه بصورت پیش‌فرض فقط بعضی از نتایج نمایش داده می‌شوند. ولی این قابلیت وجود دارد که از تمام اطلاعات استفاده کرد. این اطلاعات را از قسمت Results کسب کنید.



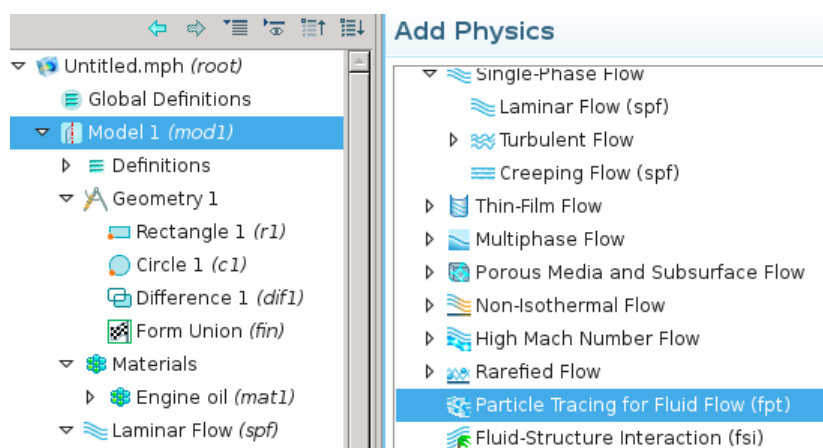
شکل ۱۳.آ

به عنوان نمونه می‌خواهیم نیروی وارد بر کره را حساب کنیم. در قسمت Results و Derived Values، گزینه‌ی Integration و از آنجا Line Integration را انتخاب کنید. با این انتخاب می‌توانیم از تمام کمیات مورد نظر روی هر مسیری انتگرال بگیریم. برای محاسبه‌ی نیروی وارد بر کره از تانسور تنش روی کره (نیم‌دایره) انتگرال می‌گیریم. در قسمت شکل هندسی مسأله با انتخاب مرزهای نیم‌دایره آنها را به مستطیل Selection اضافه می‌کنیم. در اینجا مرزهای شماره‌ی ۶ و ۷ نیم‌دایره را می‌سازند. مطابق شکل ۱۴.آ، بعد از افزودن مرزها باید عبارت انتگرال‌گیری را هم انتخاب کنیم. در قسمت Expressions و روی علامت + کلیک کنید و تمامی انتخاب‌های ممکن را نگاه کنید. در این مثال عبارت مؤلفه‌ی z تنش کلی، یعنی -Total Stress Tensor ZComponent انتخاب شده است. حالا روی Evaluate کنار علامت = کلیک کنید تا محاسبه شود. نتیجه‌ی نهایی، زیر شکل گزارش شده است و برابر با ۱۴۵۹٪- است. این نتیجه، مؤلفه‌ی z نیروی وارد بر کره است.



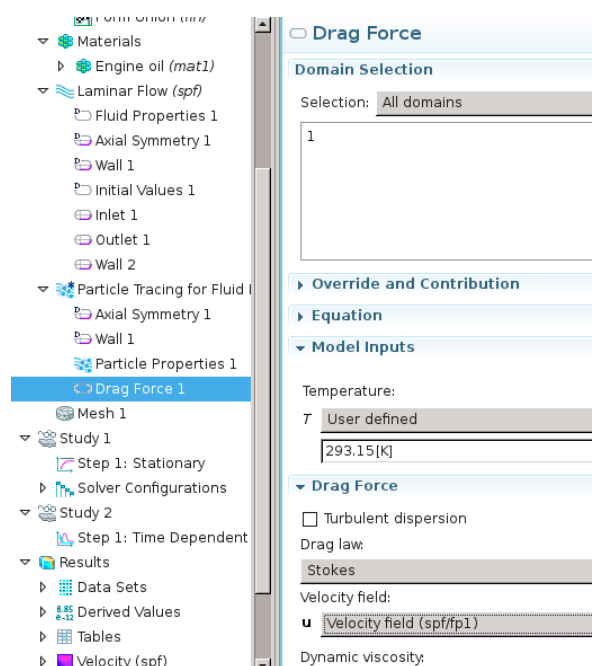
شکل ۱۴.آ

اکنون می‌خواهیم یک مسأله‌ی ترکیبی را حل کنیم. اگر کلوئیدهای کروی شکل را به شاره‌ی درون استوانه اضافه کنیم، این ذرات همراه شاره حرکت می‌کنند. با استفاده از کامسال مسیر حرکت این ذرات را بدست می‌آوریم. حرکت این ذرات به خاطر نیروی وارد شده از طرف شارش است. مطابق شکل ۱۵.آ، در قسمت Model 1 با کلیک راست، گزینه‌ی Add Physics و از آنجا فیزیک مربوطه، یعنی Particle Tracing for Fluid Flow را انتخاب می‌کنیم و به مرحله‌ی بعدی می‌رویم (با انتخاب فلش آبی‌رنگ رو به جلو). در قسمت بعد گزینه‌ی Time Dependent را انتخاب و با انتخاب علامت پرچم یا Finish به مرحله‌ی بعد می‌رویم.



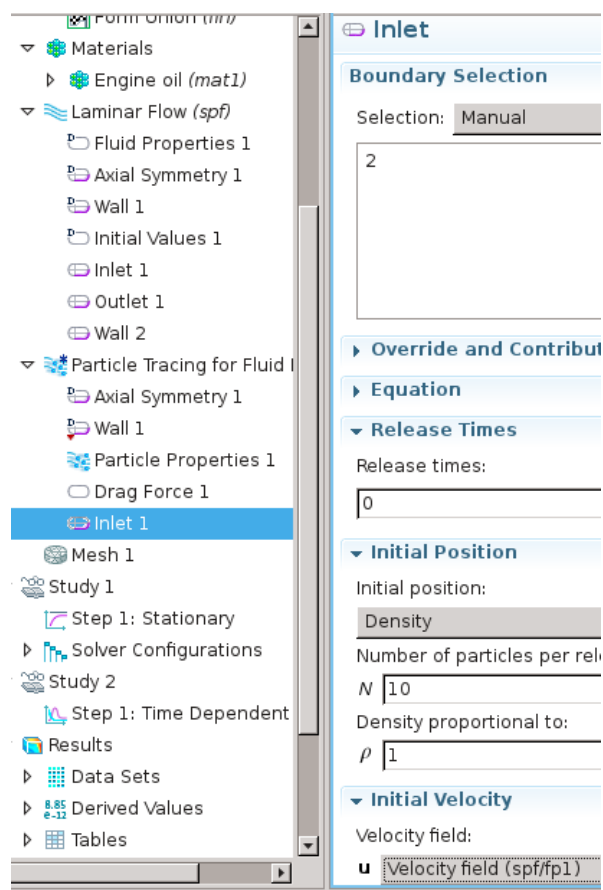
شکل ۱۵.آ

باید تصمیم بگیریم چه نیروهایی به ذرات وارد می‌شوند. با کلیک راست روی Particle باید تصمیم بگیریم چه نیروهای درگ Drag Force را انتخاب کنیم (شکل ۱۶.آ). در مستطیل مربوط به این نیرو، گزینه‌ی All Domains را انتخاب کنید. در قسمت Velocity Field مورد Velocity Field spf/fp1 را انتخاب کنید.



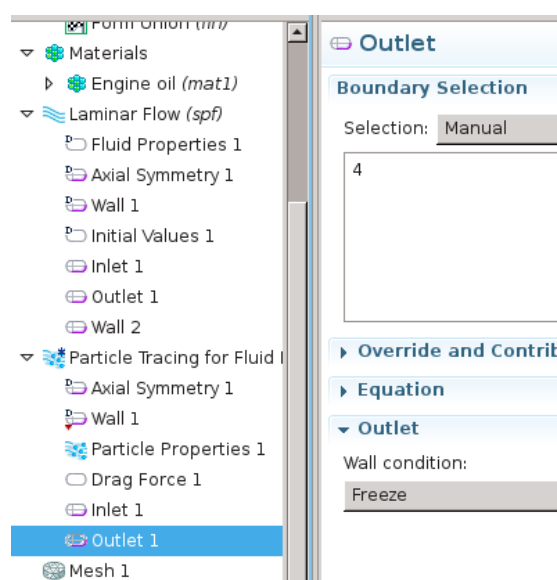
شکل ۱۶.آ

مطابق شکل ۱۷.آ شرایط ورودی ذرات را تنظیم می‌کنیم. شرایط ذرات ورودی را با کلیک راست روی Particle Tracing و انتخاب Inlet تعیین می‌کنیم. مرز پایین را به عنوان مرز ورودی به مستطیل Selection اضافه کنید. در قسمت Initial Position گزینه‌ی Density و تعداد ذرات را برابر با ۱۰ انتخاب کنید. در قسمت Initial Velocity گزینه‌ی Velocity field spf /fp1 را انتخاب کنید.



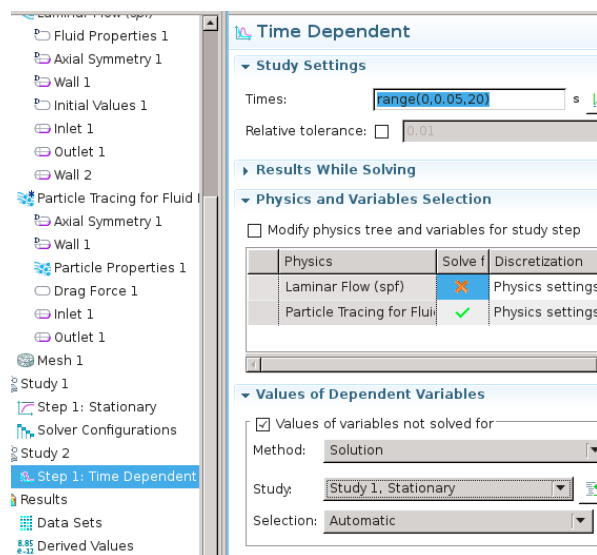
شکل ۱۷.آ

شکل ۱۸.آ، نحوه‌ی تنظیم شرایط خروجی ذرات را نشان می‌دهد. باید برای شرایط خروجی و دیواره‌ها تصمیم بگیریم. کلیک راست روی Particle Tracing for Fluid Flow و از آنجا Outlet را انتخاب می‌کنیم. مرز شماره ۴ را به قسمت Selection اضافه و شرط دیواره را بصورت Freeze انتخاب می‌کنیم. اگر در لیست زیر Laminar Flow به قسمت Wall1 بروید می‌بینید که بصورت پیش فرض برای تمام دیگر دیواره‌ها گزینه‌ی Freeze انتخاب شده است که مناسب است.



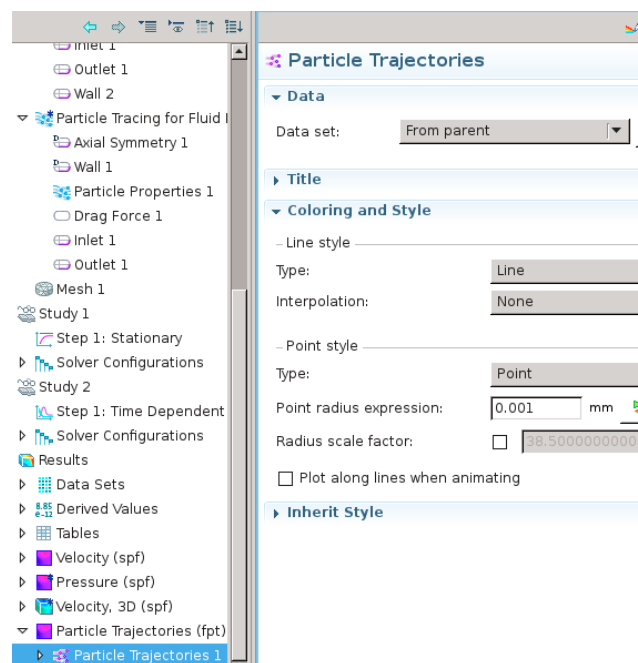
شکل ۱۸.آ

برای اینکه مسیر ذرات بدست آید به قسمت Step 1: Time Dependent از Study2 بروید (شکل ۱۹.آ). در قسمت Study Setting گزینه‌ی Time را مطابق شکل تغییر دهید. در قسمت Physics and Variable Selection فقط قسمت Particle Tracing را تیک بزنید. در واقع چون قبلاً مسأله‌ی شارش حل شده دیگر لازم به حل نیست. قسمت Values of Dependent Variables را هم مطابق شکل زیر تغییر دهید.

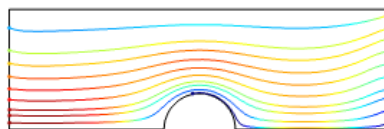


شکل ۱۹.آ

برای اجرای برنامه، مطابق شکل ۲۰.آ، روی Study2 کلیک راست و Compute را انتخاب کنید و صبر کنید تا مسأله حل شود و مسیرها بدست آیند. برای نمایش مسیرهای ذرات در قسمت Particle Trajectories مطابق شکل، قسمت Line Style را در حالت Line قرار دهید و روی Plot کلیک کنید. مسیرهای ذرات در شکل ۲۱.آ نمایش داده شده است. چون مسأله‌ی حل شده دینامیکی بود می‌توانید مسیرها را بصورت انیمیشن هم رسم کنید.



شکل ۲۰.آ



شکل ۲۱.آ

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

منابع

- برای مبانی مکانیک شاره‌ها، منابع و مراجع متعددی به زبان انگلیسی موجود است. از بین منابع مختلف، مراجعه به منابع زیر توصیه می‌شود:
 - [1] L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Fluid dynamics*, (Butterworth-Heinemann 1995).
 - [2] G. K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, (Cambridge university press, New York 2000).
 - [3] C. Pozrikidis, *Introduction to theoretical and computational fluid dynamics*, (Oxford university press 2011).
- منابع زیر، بیشتر با دیدگاه شهودی‌تری به مکانیک شاره‌ها پرداخته‌اند:
 - [4] E. Guyon, J. P. Hulin, L. Petit, and C. D. Matescu, *Physical hydrodynamics*, (Oxford university Press 2001).
 - [5] T. E. Faber, *Fluid dynamics for physicists*, (Cambridge university press 1995).
 - [6] D. J. Tritton, *Physical fluid dynamics*, (Oxford university press, London 2007).
- برای مطالعه‌ی مکانیک شاره‌ها در شرایط بی‌اینرسی، ریزشارش و هیدرودینامیک ریزشناگرها، مراجعه به منابع زیر توصیه می‌شود:
 - [7] J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, (Martinus Nijhoff publishers, the Netherlands 1983).
 - [8] A. Najafi, R. Golestanian, *Simple swimmer at low Reynolds number: Three linked spheres*, Phys. Rev. E **69**, 062901 (2004).

- [9] H. Bruus, *Theoretical microfluidics*, (Oxford university press, Oxford 2008).
- برای مطالعه‌ی پدیده‌های فیزیکی در فصل مشترک شاره‌ها، استفاده از مراجع زیر توصیه می‌شود:
- [10] S. A. Safran, *Statistical thermodynamics of surfaces, interfaces, and membranes*, (Westview press, 2003).
- [11] P. G. de Gennes, *Wetting: statics and dynamics*, Rev. Mod. Phys. **57**, 827 (1985).
- [12] P. G. de Gennes, *Soft interfaces*, (Cambridge university press, New York 1997).
- شاره‌های نانیوتنی، از دیدگاه پدیده شناختی و ریزمقیاس در منابع زیر بررسی شده‌اند:
- [13] R. B. Bird, R. C. Armstrong, O. Hassager, *Dynamics of polymeric liquids*, (John Wiley and Sons, York 1987).
- [14] G. Astarita, G. Marrucci, *Principles of non-newtonian fluid mechanics*, (McGraw-Hill, Maidenhead 1974).
- [15] H. A. Barnes, J. F. Hutton, and K. Walters, *An introduction to rheology*, (Elsevier science publishers, 1989).
- دیگر مراجع استفاده شده در متن:
- [16] D. R. Acheson, *Elementary fluid dynamics*, (Oxford University Press, Oxford 1990).
- [17] A. Bennett, *Lagrangian fluid dynamics*, (Cambridge University Press, Cambridge 2006).
- [18] H. C. Berg, *E. coli in motion*, (Springer-Verlag, New York 2004).
- [19] D. Bonn, J. Eggers, J. Indekeu, J. Meunier, and E. Rolley, *Wetting and spreading*, Rev. Mod. Phys. **81**, 739 (2009).
- [20] F. Charru, *Hydrodynamic Instabilities, Volume 37 of Cambridge Texts in Applied Mathematics*, (Cambridge University Press, Cambridge 2011).
- [21] P. G. de Gennes, *Scaling concepts in polymer physics*, (Cornell university press, Cornell 1979).
- [22] P. G. de Gennes, *Scaling theory of polymer adsorption*, Journal de Physique **37**(12), 1445 (1976).
- [23] P. G. de Gennes, F. B. Wyard, D. Quéré, *Cappillary and wetting phenomena: drops, bubbles, pearls, waves*, (Springer, New York 2002).
- [24] S. R. de Groot and P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, (North-Holland Publishing Comp., Amsterdam/ London. 1969).
- [25] J. K. G. Dhont, *An Introduction to Dynamics of Colloids*, (Elsevier, Amsterdam 1996).

- [26] U. Frisch, A. M. Kolmogorov *Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov*, (Cambridge University Press 1995).
- [27] M. Gad-el-hak, *Fluid mechanics from the beginning to the third millennium*, Int. J. Eng. **14**(3), 177 (1998).
- [28] R. Golestanian, and R. Elie, *Relaxation of a moving contact line and the Landau-Levich effect* Euro. Phys. Lett. **55**(2), 228 (2001).
- [29] L. Landau, and B. Levich, Acta Physicochim. USSR **17**, 42 (1942).
- [30] L. D. Landau, and E. M. Lifshitz. *Statistical physics, part I. Course of theoretical physics* (Addison-wesley, 1969).
- [31] H. L. Langhaar, *Dimensional analysis and theory of models*, (John Wiley and sons, New York 1951).
- [32] E. Lauga, M. P. Brenner, and H. A. Stone, in *Handbook of Experimental Fluid Dynamics*, edited by J. Foss, C. Tropea, and A. Yarin (Springer, New York 2007), Chap. 19, p. 1219.
- [33] A. Najafi, S. H. Raad, R. Yousefi, *Self-propulsion in a low-Reynolds-number fluid confined by two walls of a microchannel*, Phys. Rev. E **88**, 045001 (2013).
- [34] A. Najafi, R. Zargar, *Two-sphere low-Reynolds-number propeller*, Phys. Rev. E **81**, 067301 (2010).
- [35] A. Najafi, *Hydrodynamics of a microhunter: A chemotactic scenario*, Phys. Rev. E **83**, 060902(R) (2011).
- [36] A. Najafi, R. Golestanian, *Coherent Hydrodynamic Coupling for Stochastic Swimmers*, Eur. Phys. Lett. **90**, 68003 (2010).
- [37] J. Oldroyd, *On the Formulation of Rheological Equations of State*, Proc. R. Soc. London A, **200**(1063), 523 (1950).
- [38] A. R. Piriz, O. D. Cortazar, and J. J. Lopez Cela, *The Rayleigh-Taylor instability*, Am. J. Phys. **74**(12), 1095 (2006).
- [39] C. Pozrikidis, *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*, (Cambridge University Press, Cambridge 1992).
- [40] L. E. Reichl, *A Modern course in statistical physics*, (Wiley-VCH verlag GmbH, Weinheim 2009).
- [41] J. Rotne and S. Prager, *Variational Treatment of Hydrodynamic Interaction in Polymers*, J. Chem. Phys. **50**, 4831 (1969).
- [42] R. E. Salvino and R. D. Puff, *Microscopic theory of surface tension*, Phys. Rev. B **34**, 6351 (1986).

- [43] F. Scheck, *Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos*, (Springer-Verlag, Berlin 2010).
- [44] R. Shiri, A. Najafi, and M. Habibi, *Sampling moire technique and the dynamics of a spreading droplet on a solid surface*, Measurement Science and Technology **25**(3), 035305 (2014).
- [45] J. W. Strutt, and Lord Rayleigh, *On the instability of jets*, Proc. London Math. Soc. **10**, 4 (1878).
- [46] L. H. Tanner, *The spreading of silicone oil drops on horizontal surfaces*, Journal of Physics D: Applied Physics **12**(9) 1473 (1979).
- [47] G. A. Tokaty, *A history and philosophy of fluid mechanics*, (Courier Dover Publications, 1994).
- [48] K. Weissenberg, *A continuum theory of rheological phenomena*, Nature **159**(4035), 310 (1947).
- [49] B. R. White and J. C. Schulz, *Magnus effect in saltation*, Journal of Fluid Mechanics **81**, 497 (1977).
- [50] A. L. Yarin, *Drop impact dynamics: splashing, spreading, receding, bouncing*, Annu. Rev. Fluid Mech. **38**, 159 (2006).
- [51] R. Zargar, A. Najafi, M. F. Miri, *Three-sphere low-Reynolds-number swimmer near a wall*, Phys. Rev. E **80**, 026308 (2009).
- [۵۲] ج. آرفکن، روشهای ریاضی در فیزیک، جلد ۱ و جلد ۲، (مرکز نشر دانشگاهی، تهران ۱۳۷۱).
- [۵۳] ر. شیر، دینامیک یک قطره روی سطوح جامد، (پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه زنجان ۱۳۹۱).
- [۵۴] م. ضرغام، بررسی امواج سطحی روی شاره‌های غیر نیوتنی با روشهای اپتیکی، (پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه زنجان ۱۳۹۲).
- [۵۵] ر. کرمی، مطالعه‌ی تجربی و نظری انقباض استوانه‌ی باریک و شکسان در حضور کشش سطحی، (پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه علوم پایه‌ی پیشرفته ۱۳۹۰).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

نمایه

انتشار صوت ، ۹۲	۱
انحراف از معیار، ۲۷۲	آزمایش باریکه‌ی عسل، ۲۳۳
انحنا ، ۱۸۵	آزمایش دو صفحه، ۱۰۹
ب	آزمایش سرنگ، ۲۳۰
باکتری‌ها، ۱۶۷	اثر دوپلر ، ۹۵
بال نازک ، ۱۰۰	اثر مارانگونی، ۲۱۳
بدون تاو ، ۶۱	اثر وایزنبرگ ، ۲۷۹
بردار، ۶، ۷	اجزا محدود، ۳۶۳
برهمکنش هیدرودینامیکی، ۱۶۱	استوانه‌ی چرخان، ۷۶
بسط برحسب چند قطبیه‌ها، ۱۵۵	اسکالر ، ۶
پ	اعداد بدون بعد، ۲۱۹، ۲۲۷
پایستگی جرم ، ۴۴	افت‌وخیز، ۲۲۳
پخش ، ۲۲۲	الکتروکینتیک ، ۳۱۳
	امواج ، ۱۹۵

- پراش، ۲۰۲ ج
- ت
- تابع پاسخ، ۲۷۹
- تابع جریان، ۴۶
- تابع همبستگی، ۲۲۷
- تاژک، ۱۶۷
- تانسور، ۷، ۶
- تانسور اُسین، ۱۶۲
- تانسور تنش، ۲۷، ۱۱۱
- تانسور لوی چوییتا، ۱۲
- تبدیل پاریتته، ۱۲۷
- تبدیلات گالیه‌ای، ۱۷
- تحلیل ابعادی، ۲۱۹
- تراکم ناپذیر، ۴۶
- ترکندگی، ۱۸۶
- ترمودینامیک، ۲۲۴
- ترمودینامیک غیرتعادلی، ۳۳۱
- تعادل، ۲۴۱
- تعبیر شهودی چرخش، ۲۱
- تقارن، ۲۷
- تلاطم، ۲۸۵
- تنش، ۲۶۲، ۲۵
- تنش برشی، ۳۰
- تنش پلیمرها، ۲۷۳، ۲۷۴
- تنش عمودی، ۲۷
- جرم موثر، ۷۶
- جریان لایه‌ای، ۱۱۶
- جسم شناور، ۵۱، ۵۷
- چ
- چاه، ۶۵
- چرخش، ۲۱، ۱۰
- چشمه، ۶۵
- چند قطبیه‌ها، ۱۵۵
- چهارقطبی نیرو، ۱۶۹
- ح
- حباب صابون، ۱۸۳
- حرکت براونی، ۲۲۶
- حل عددی، ۳۶۳
- خ
- خط جریان، ۱۸، ۵۹
- خط رنگ، ۲۱
- خط مسیر، ۲۰
- خطوط جریان اطراف کره، ۷۲، ۱۳۰
- خطوط میدان، ۱۸
- د
- دستگاه استوانه‌ای، ۱۱۶
- دستگاه دکارتی، ۱۱۵، ۳
- دستگاه قطبی-کروی، ۳

- دستگاه مختصات ، ۳
- دوران ، ۴
- دوقطبی نیرو، ۱۵۴
- دینامیک قطره، ۲۳۵
- دیوار صوتی ، ۹۷، ۱۰۴
- دیورژانس ، ۹
- ر
- رابطه‌ی پاشندگی ، ۱۹۸، ۲۰۰
- رشد قطره، ۲۳۸
- روش اویلر ، ۱۶
- روش تجربی ، ۲۰۲
- روش لاگرانژ ، ۱۶
- ریزشارش، ۱۱۵، ۱۵۱
- ریزموجودات، ۱۶۷
- رئولوژی، ۲۶۱، ۲۷۷
- س
- سالیتون، ۲۱۰
- سرعت موج ، ۹۳
- سطح شیبدار ، ۱۱۹
- سطح ماخ ، ۹۹
- سطوح خمیده ، ۱۸۵
- سینماتیک شاره‌ها ، ۱۵
- ش
- شارش اتلافی، ۱۰۹
- شارش اویلری ، ۴۳
- شارش بدون لختی، ۱۵۱
- شارش برشی ، ۳۰، ۲۷۷
- شارش برشی تناوبی، ۲۷۸
- شارش پایستار ، ۴۳
- شارش پتانسیل ، ۴۳، ۶۲
- شارش پوآزوی، ۱۱۸
- شارش تراکم پذیر ، ۸۹
- شارش کوئت، ۱۱۸
- شاره، ۱۵، ۲۸
- شاره نیوتی ، ۱۱۱
- شاره‌ی پلیمری، ۲۷۰
- شاره‌ی ساکن ، ۵۰
- شاره‌ی وشکسان- کشسان، ۲۷۶
- شرط مرزی ، ۱۱۴
- شناگر سه- کره‌ای، ۱۶۷
- شناگرها، ۱۶۳
- شیب، ۸
- ص
- صفحه‌ی لرزان، ۱۲۲
- صوت ، ۹۲
- ض
- ضریب اصطکاک، ۲۲۰
- ضریب پخش ، ۲۲۵

- ط
- طرح پشت کشتی‌ها، ۲۰۸
- طول موئینگی، ۱۸۹
- ع
- عدد رینولدز، ۲۳۳، ۲۳۲، ۲۲۸، ۲۲۱
- عدد فرود، ۲۲۹
- عدد ماخ، ۲۳۱-۲۲۹، ۹۴
- عدد موئینگی، ۲۳۰
- غ
- غرش فراصوت، ۹۸
- غیر خطی، ۳۴
- ف
- فشار، ۴۸، ۲۷
- فعال سطحی، ۱۷۸
- ق
- قانون استوکس، ۲۲۲، ۱۵۶، ۱۳۱
- قانون برنولی، ۲۰۰
- قانون پانگ-لاپلاس، ۲۲۸
- قانون هوک، ۲۶۲
- قانون یانگ-لاپلاس، ۱۸۱
- قضیه‌ی کلونین، ۶۳
- قطره، ۱۹۰
- ک
- کانال کم‌عمق، ۲۱۰
- کرل، ۱۰
- کره شتابدار، ۷۵
- کره متحرک، ۷۵
- کره‌ی متحرک، ۱۲۵، ۷۱
- کشش سطحی، ۱۸۰، ۱۷۵
- کلونید، ۱۵۱
- کلونیدها، ۱۶۱
- گ
- گرادیان، ۸
- گرادیان عرضی فشار، ۵۲
- گشت تصادفی، ۲۲۴
- ل
- لختی، ۲۲۱
- م
- ماتریس دوران، ۱۲، ۶
- ماده شوینده، ۱۷۸
- مارانگونی، ۲۱۳
- مافوق صوت، ۹۸
- مایع چرخان، ۵۶
- محیط پیوسته، ۲۳، ۱۵
- مختلط، تکنیک مختلط، ۸۱
- مخروط ماخ، ۹۸
- مخروط-صفحه، ۳۱
- مدل الدرود، ۲۷۶

ناپایداری ریلی- تیلور ، ۲۴۳ ، ۲۴۸

ناپایداری سفمن- تیلور ، ۲۵۳

ناپایداری کلون- هلمهولتز ، ۲۴۴ ، ۲۵۰

ناظر متحرک ، ۱۷

نانیوتنی ، ۳۴ ، ۲۵۹ ، ۲۶۳

نماد کروئکر ، ۶

نیرو در محیط‌های پیوسته ، ۲۳

نیروی ارشمیدس ، ۵۱

نیروی استوکس ، ۱۳۱ ، ۱۵۶

نیروی تصادفی ، ۲۲۶ ، ۲۷۲

نیروی مگنوس ، ۷۶

نیروی نقطه‌ای ، ۱۵۳

و

واگرایی ، ۹ ، ۱۰

وشکسان- کشسان ، ۲۶۳

وشکسانی ، ۳۰ ، ۳۲

وشکسانی سنج ، ۳۱

مدل دو گلوله- فنر ، ۲۷۱

مدل ریزمقیاس ، ۲۷۰

مدل کلون- ژیت ، ۲۶۵ ، ۲۷۹

مرتبه‌ی بزرگی وشکسانی ، ۳۲

مرز مشترک ، ۱۷۵

مژک ، ۱۶۷

معادله‌ی استوکس ، ۱۲۴ ، ۱۵۲

معادله‌ی اوایلر ، ۴۸

معادله‌ی برنولی ، ۵۹

معادله‌ی پیوستگی ، ۴۴ ، ۴۵

معادله‌ی کورته‌وگ و دُ وِرایز ، ۲۱۲

معادله‌ی لاپلاس ، ۶۴

معادله‌ی لانژون ، ۲۲۷

معادله‌ی موج ، ۹۲

معادله‌ی ناویه- استوکس ، ۱۱۲

معادله‌ی ناویه- استوکس ، ۱۱۴

موج رونده ، ۱۹۷

موج شوک ، ۱۰۴

مویینگی ، ۱۸۸

میدان اوایلری سرعت ، ۱۶

میدان شتاب ، ۱۶

ن

ناپایداری ، ۲۴۱

ناپایداری ریلی- بنارد ، ۲۴۵

ناپایداری ریلی- پلاتو ، ۲۴۳ ، ۲۴۵

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان

Fluid Mechanics

Newtonian and Non-Newtonian

Ali Najafi

Faculty Member, Institute for Advanced Studies in basic Sciences

Zanjan, IRAN
2022

علی - نجفی - دانشگاه - تحصیلات - تکمیلی - زنجان