ضریب کششی برای کره در شارش نامتناهی برابر می‌شود با $C_D = ۱۲/\mathcal{R}e$، که در آن عدد رینولدز به‌صورت $\mathcal{R}e = R\rho W/\eta$ تعریف شده است. در آزمایش‌های تجربی، عوامل مختلفی باعث انحراف از این نتیجه‌ی ساده برای ضریب کششی می‌شوند. انحراف از تقارن کروی، وجود دیواره‌های محدود کننده‌ی شاره و برهمکنش با دیگر اجسام غوطه‌ور در شاره، مهم‌ترین دلایل برای انحراف از قانون ساده‌ی بالا هستند.

۵.۴ انواع شرایط مرزی

در مثال‌های پیشین دیدیم که برای بررسی هر مساله‌ی شارشی، شرایط مرزی مربوطه باید اعمال شوند. در این قسمت شرایط مرزی برخی مسائل پیچیده‌تر را بررسی می‌کنیم. به‌صورت کلی شرایط مرزی، از پیوستگی نیرو در فصل مشترک‌ها و غیر لغزشی بودن شارش روی سطوح به دست می‌آید. در ادامه، ابتدا شرط مرزی روی یک ورقه‌ی غیر قابل کشش متحرک را بررسی و سپس به شرط مرزی روی غشاهای کشسان نیز می‌پردازیم.

شرط مرزی روی ورقه‌ی کشش‌ناپذیر

یک ورقه‌ی کشش‌ناپذیر ولی منعطف را در نظر بگیرید که یک موج رونده را هدایت می‌کند. در دستگاه مختصاتی که محور $\hat{z}$ عمود بر صفحه است، شکل هندسی این ورقه به شکل $h(x,t) = h_\circ \sin(kx-\omega t)$ است. در این صورت موج در راستای $\hat{x}+$ منتشر می‌شود. می‌خواهیم شرط مرزی شاره‌ای که زیر این ورقه‌است را به دست آوریم. ابتدا برای اینکه شهود بهتری از شکل دینامیکی ورقه به دست آید، توجه کنید که حرکت روی ورقه توسط عاملی خارجی ایجاد شده است. مثال یک بعدی این حرکت شبیه موجی است که روی یک طناب آویزان، با حرکت افقی و نوسانی (رفت‌وبرگشتی) نقطه‌ی آویز ایجاد می‌شود. در این صورت یک موج رونده روی طناب ایجاد می‌شود که از نقطه‌ی آویز شروع شده و در امتداد طناب منتشر می‌شود. واضح است که کل طناب جابجا نمی‌شود ولی موج همراه خود انرژی را به انتهای آزاد طناب منتقل می‌کند. در مورد ورقه‌ی مورد بحث نیز، با دلیلی که با آن کاری نداریم موجی ایجاد شده که در راستای $\hat{x}+$ منتشر می‌شود. ورقه در هنگام حرکت خم می‌شود ولی کشیده نمی‌شود. نشان می‌دهیم که شرط مرزی روی ورقه که شرط عدم لغزش شارش است را چگونه می‌توان اعمال کرد.

دستگاه مختصات S' را در نظر بگیرید که باسرعت $w = \omega/k$ نسبت به دستگاه آزمایشگاه (S) و به سمت راست حرکت می‌کند. ارتباط این دو دستگاه به صورت زیر داده می‌شود:

$$x = x' - wt', \quad z = z', \quad t = t',$$
$$\partial_{x'} = \partial_x, \quad \partial_{t'} = \partial_t - w\partial_x,$$

از دید این ناظر متحرک، شکل ورقه به صورت ساکن دیده شده و با رابطه‌ی $z' = h_\circ \sin(kx')$ داده می‌شود. اعمال شرط مرزی از دید این ناظر متحرک ساده تر است. درست است که از دید ناظر متحرک شکل ورقه به صورت ساکن دیده میشود ولی در این دستگاه، ورقه روی این شکل ساکن با سرعت $v_\circ$ به سمت چپ می‌خزد. سرعت خزش ورقه را می‌توانیم با استدلال زیر به دست آوریم. یک نقطه‌ی مادی روی ورقه، از دید ناظر متحرک زمانی برابر با $\ell/v_\circ$ نیاز دارد تا از یک بیشینه‌ی ارتفاع به بیشینه‌ی بعدی برسد که در آن ℓ طول مسیری است که دو بیشینه را به هم وصل می‌کند، داریم:

$$\ell = \int_\circ^{۲\pi/k} dx' \sqrt{۱ + (h_\circ k)^۲ \cos^۲(kx')}.$$

از طرف دیگر و از دید ناظر آزمایشگاه، این زمان برابر با زمانی است که در یک نقطه‌ی خاص دو بیشینه‌ی متوالی ارتفاع اتفاق می‌افتد: $۲\pi/\omega$. در این صورت داریم:

$$v_\circ = \frac{\omega}{k} \int_\circ^{۲\pi} \frac{d\phi}{۲\pi} \sqrt{۱ + (h_\circ k)^۲ \cos^۲(\phi)}.$$

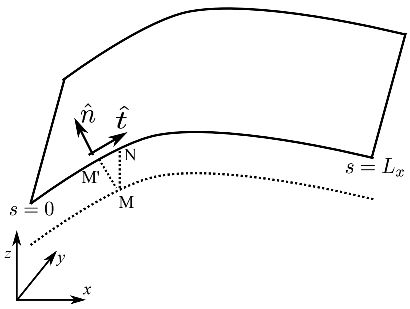
با درست داشتن سرعت خزش، شرط مرزی را از دید ناظر متحرک می‌نویسیم. اگر مولفه‌های سرعت را از دید این ناظر با $\mathbf{u}' = ({u'}_x, {u'}_z)$ نشان دهیم، شرط مرزی به صورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{u}'(x', z' = h_\circ \sin(kx')) = (-v_\circ \cos\theta, -v_\circ \sin\theta),$$

که در آن θ زاویه‌ی مماس بر ورقه و با رابطه‌ی $\tan\theta = h_\circ k \cos(kx')$ داده می‌شود. شرط مرزی از دید ناظر آزمایشگاه، با افزودن جمله‌ی $w = \omega/k$ به مولفه‌ی x سرعت به‌دست می‌آید. روی ورقه‌ای که موج کم دامنه را هدایت می‌کند ($\epsilon = h_\circ k \ll ۱$) شرط مرزی به صورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{u}(x, z = h_\circ \sin\psi) = \frac{\omega}{k}(\circ, -\epsilon\cos\psi) + \frac{\omega}{k}(\frac{\epsilon^۲}{۴}\cos(۲\psi), \circ) + \mathcal{O}(\epsilon)^۳,$$

که در آن $\psi = kx - \omega t$. ملاحظه می‌شود که تا مرتبه‌ی اول تغیر شکل، شرط مرزی به صورت $u_z(x, z = h) = \partial_t h$ است.



شکل ۹.۴ مشخصات هندسی ورقه‌ی تغییر شکل یافته.

شرط مرزی روی ورقه‌ی کشش‌پذیر

اکنون ورقه‌ای را در نظر بگیرید که قابلیت کشش دارد. علاوه بر ورقه‌های کشسان، فصل مشترک دو شاره‌ای که با هم مخلوط نمی‌شوند، مثال دیگری است که در این قالب می‌گنجد. در فصل‌های آینده نشان می‌دهیم که به فصل مشترک شاره‌ها، انرژی سطحی نسبت داده می‌شود. ورقه‌ها در حالت عمومی، انرژی خمشی را هم می‌توانند در خود ذخیره کنند. مشخصات کشسانی ورقه‌ها را در بخش بعد بیشتر مطالعه می‌کنیم. اینجا می‌خواهیم ببینیم شارش شاره‌های مجاور ورقه‌ی کشسان چگونه آن را به حرکت در می‌آورد. ابتدا به سینماتیک ورقه بپردازیم. برای سهولت، مشابه بخش پیشین، فرض کنیم بنا به دلایل تقارنی حرکت ورقه در راستای y متقارن باشد. سینماتیک ورقه با تابع $F(x,z) = z - h(x,t) = ۰$ داده می‌شود. بر حسب این تابع، بردار عمود بر ورقه به صورت $\hat{n} = \nabla F/|\nabla F|$ قابل محاسبه است. شکل ورقه‌ی کشسان در دو زمان نزدیک به هم در شکل ۹.۴ نشان داده شده است. میدان شارشی بالای ورقه را با $\mathbf{u}^{(۱)}$ و میدان شارشی پایین ورقه را با $\mathbf{u}^{(۲)}$ نشان می‌دهیم. هر دوی این میدان‌ها، معادلات اساسی شارش را برآورده می‌کنند. شرط مرزی اساسی که این دو شارش را به هم پیوند می‌دهد، پیوستگی میدان شارشی روی ورقه است:

$$\mathbf{u}^{(۱)}(x, z = h) = \mathbf{u}^{(۲)}(x, z = h).$$

علاوه بر شرط مرزی سرعت، به معادلاتی احتیاج داریم که دینامیک ورقه را تعیین کنند. اولین معادله، شرط مرزی بدون لغزشی است. چون شاره روی ورقه نمی‌لغزد، پس باید سرعت حرکت نقاط مادی روی ورقه از سرعت شاره به‌دست آیند. به حرکت ورقه بیشتر بپردازیم. چون سطح کشسان است، هر نقطه‌ی مادی روی ورقه که با M نشان داده شده است، در راستای برداری که به صورت موضعی

بر ورقه عمود است، منتقل می‌شود. سرعت حرکت این نقطه‌ی مادی که در راستای عمود بر ورقه است، به سادگی با ملاحظات هندسی از تابع $h(x,t)$ قابل محاسبه است. دقت کنید که $\partial_t h(x,t)$ تغییرات ارتفاع یک نقطه با x ثابت است و این کمیت سرعت نقاط مادی را نشان نمی‌دهد. در زمان δt نقطه‌ی M با سرعت $\partial_t h$ به نقطه‌ی N تبدیل می‌شود ودر همین زمان نقطه‌ی مادی M با سرعت $\cos\theta\partial_t h$ به نقطه‌ی M' منتقل می‌شود که در آن θ زاویه‌ی بین دو خط MM' و MN است. با ملاحظات هندسی می‌بینیم که این زاویه‌ای است که مماس بر خم با محور افقی می‌سازد، پس: $\tan\theta = \partial_x h$. در نتیجه معادله‌ی دینامیکی ورقه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\hat{n}\cdot\mathbf{u}^{(۱)}(x,z=h) = \hat{n}\cdot\mathbf{u}^{(۲)}(x,z=h) = \frac{۱}{|\nabla F|}\partial_t h(x,t),$$

که در آن: $|\nabla F| = \sqrt{۱+(\partial_x h)^۲}$.

نتیجه‌ی بالا را به گونه‌ی دیگری هم می‌توان به دست آورد. فرض کنید که از سمت محیط اول به مرز مشترک نزدیک می‌شویم. در این صورت شاره در همسایگی فصل مشترک دارای سرعتی است که با مولفه‌هایش به صورت $\mathbf{u}^{(۱)}(x,z=h) = (u_x^{(۱)}, u_z^{(۱)})$ داده می‌شود. اکنون ناظری را در نظر بگیرید که با سرعت $u_x^{(۱)}$ در راستای $\hat{x}$ حرکت می‌کند. از دید این ناظر سرعت شاره‌ی مجاور فصل مشترک تنها مولفه‌ی $\hat{z}$ دارد و آن برابر است با تغییرات زمانی فصل مشترک $h(x,t)$ که از دید همان ناظر و به صورت $\frac{d}{dt}h(x,t) = \partial_t h + u_x^{(۱)}\partial_x h$ محاسبه می‌گردد. پس داریم:

$$u_z^{(۱)} = \partial_t h + u_x^{(۱)}\partial_x h.$$

به سهولت می‌توانید تحقیق کنید که شرط اخیر نمایش دیگری است از شرطی که در بالا و با روشی دیگر به‌دست آمد.

کشسانی ورقه چه نقشی در دینامیک شاره دارد؟ درست است که عوامل ایجاد شارش، جایی خارج ورقه‌اند ولی واضح است که سختی و نرمی ورقه در حرکت ورقه و از آن مهم‌تر در میدان شارشی شاره هم نقش دارند. انرژی‌های خمشی و کشسانی ورقه، نیروهایی درون ورقه ایجاد می‌کند. در تعادل بودن ورقه با شاره باعث انتقال این نیروها به شاره می‌شود. اجازه دهید نیروهای کشسانی درون ورقه بر واحد سطح را با $\mathbf{f}_e(x,z=h)$ نشان دهیم. نیروی کشسانی با نیروی خالصی که از طرف شاره وارد می‌شود برابر هستند. در این صورت شرط مرزی پیوستگی نیروها روی ورقه به

صورت زیر می‌شود:

$$\hat{n}\cdot(\sigma^{(۱)}-\sigma^{(۲)})|_{z=h}=\mathbf{f}_e+(\rho^{(۲)}-\rho^{(۱)})gh(x,t)\hat{n},$$

که در آن $\sigma^{(۱,۲)}$ مقادیر تانسور تنش در همسایگی ناحیه‌ی بالا و پایین ورقه را نشان می‌دهند. همچنین حالتی را در نظر گرفته‌ایم که شاره‌های بالا و پایین ورقه اختلاف چگالی دارند و نیروی گرانشی مربوط به آن را اضافه کرده‌ایم. در بحث زیر نشان می‌دهیم که نیروهای کشسانی ورقه‌ی تغییر شکل یافته به خواص کشسانی و نوع تغییر شکل ورقه مربوط می‌شوند.

اندکی در مورد نیروی کشسانی ورقه

کشسانی ورقه‌ها با کشش سطحی σ مشخص می‌شود و آن برابر انرژی بر واحد سطح ورقه‌ای است که کشیده‌شده است. σ بزرگتر باشد، سطح سخت تر کشیده می‌شود. اگر سطح ورقه‌ی کشسان به اندازه‌ی ΔS کشیده شود، انرژی برابر با $\Delta E_s=\sigma\Delta S$ در آن ذخیره می‌شود. علاوه بر کشش سطحی، در حالت عمومی‌تر به ورقه‌های کشسان، انرژی خمشی هم نسبت داده می‌شود. برای خم کردن ورقه‌ها باید انرژی صرف کرد. انعطاف پذیری خمشی ورقه‌ها با پارامتر B (مدول خمشی) مشخص می‌شود. ورقه‌ی صاف مستطیل شکلی با مساحت ΔS را در نظر بگیرید که از یک سو خم شده است. اگر شعاع انحنای ایجاد شده را با R نشان دهیم، انرژی خمشی ذخیره شده در ورقه برابر است با: $\Delta E_c=B\Delta S/(۲R^۲)$. مشخصات کشسانی ورقه مورد نیاز است زیرا در ادامه می‌خواهیم حالتی را در نظر بگیریم که حرکت شاره‌ی دوسوی ورقه، دینامیک ورقه را تعیین کند. عواملی که لزوماً روی ورقه نیستند و در جایی دور از ورقه قرار گرفته‌اند باعث شارش شاره و در نتیجه حرکت ورقه می‌شوند. اعمال شرط مرزی روی شاره، معادلات حرکتی ورقه را می‌سازد.

در بحث بالا مختصری در مورد کشسانی کششی و خمشی ورقه‌ها بحث شد. اکنون نشان می‌دهیم برای ورقه‌ای که کشیدگی و خمیدگی آن با تابع $F(x,z)=z-h(x,t)=۰$ داده شده است، نیروهای کشسانی چگونه‌اند. برای سهولت، خمیدگی و کشیدگی را تنها در یک سو در نظر بگیرید. ورقه‌ای مستطیل شکل به ابعاد $L_x\times L_y$ را در نظر بگیرید که در راستای x خمیده و کشیده شده است. مقطع ورقه با صفحه‌ی $x-z$ یک خم است. برای اینکه بتوانیم انرژی کشیدگی خم را در نظر بگیریم، از پارامتر طول قوس s استفاده می‌کنیم. هر نقطه‌ی مادی روی خم را با بردار مکان

$\mathbf{r}(s)$ نشان می‌دهیم. بردار مماس بر خم به صورت $\hat{t} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{ds}\mathbf{r}(s)$ محاسبه می‌شود. توجه کنید که بردار مماس بر خم که به این صورت تعریف می‌شود، تنها در صورتی که خم کشیده نشود طولی واحد دارد. تغییرات بردار مماس بصورت $\ddot{\mathbf{r}} = c\hat{n}$ است که در آن c انحنا خم (عکس شعاع انحنا) است. تغییرات مرتبه‌ی سوم هم به صورت $\dddot{\mathbf{r}} = \dot{c}\hat{n} - c^۲\hat{t}$ است که در محاسبات آینده به کار می‌آید.

اکنون انرژی ورقه‌ی تغییر شکل یافته را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathcal{F} = \frac{F}{L_y} = \frac{B}{۲}\int_۰^{L_x} \ddot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}} ds + \frac{\lambda}{۲}\int_۰^{L_x} \left(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}} - ۱\right) ds,$$

که در آن، جمله‌ی اول انرژی خمشی ورقه‌ی خمیده را نشان می‌دهد که از انتگرال‌گیری روی مربع انحنا در کل سطح ورقه به‌دست می‌آید. جمله‌ی دوم ضریب لاگرانژ است که کشیده نشدن خم را تضمین می‌کند. ضریب لاگرانژ $\lambda = ۲\sigma$ نیروی قیدی است که مانند کشش سطحی اجازه نمی‌دهد ورقه کشیده شود. دقت شود که رابطه‌ی بالا انرژی بر واحد طول (در راستایی که کشیده نشده) است. برای محاسبه‌ی نیروی کشسانی تولید شده توسط ورقه‌ی کشسان، وردش انرژی را محاسبه می‌کنیم:

$$\delta\mathcal{F} = \int \left(B\ddot{\ddot{\mathbf{r}}} - \lambda\ddot{\mathbf{r}}\right)\cdot\delta\mathbf{r} ds + \text{جملات مرزی},$$

و از آنجا نیروی کشسانی ناشی از ورقه که به محیط اطرافش وارد می‌شود برابر است با:

$$\mathbf{f}_e = -\frac{۱}{\Delta s}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\mathbf{r}} = \left(\lambda c - B(\ddot{c} - c^۳)\right)\hat{n} + ۳Bc\dot{c}\hat{t}.$$

این نیروی کشسانی بر واحد سطح است که در قسمت قبل برای شرایط مرزی شارش مورد نیاز بود. برای یافتن رابطه‌ی بالا از حالت خاص خمش و کشش یک بعدی استفاده کردیم، ولی توجه کنید که رابطه‌ی نهایی کاملا عمومی است به این صورت که خمش ظاهر شده در این رابطه با مجموع خمش‌ها در راستاهای اصلی جایگزین می‌شود.

با یک محاسبه‌ی ساده می‌توان نشان داد که در مختصات مونژ که در بالا معرفی شد و برای سطح بسیار کند تغییر ($\partial_x h \ll ۱$)، نیروی کشسانی به صورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{f}_e = \left(\sigma\partial_x^۲ h - B\partial_x^۴ h\right)\hat{z}.$$

در پایان یادآور می‌شویم که ورقه‌ها اگر ضخامت داشته باشند علاوه بر کشسانی خمشی و کششی، کشسانی برشی هم دارند. یک قسمت از ورقه‌ی تغییر شکل یافته به صورت یک قطعه‌ی مکعب شکل است که نیروی برشی، مربوط به تغییر شکلی از این ورقه است که دو وجه بالا و پایین آن نسبت به هم جابجا شده‌اند. نیروهای برشی تولید شده در راستای مماس بر ورقه هستند. جزییات این محاسبات را خواننده‌ی علاقه‌مند در کتاب Landau-Lifshitz پیدا می‌کند.