انتگرالگیری گاوسی با تبدیل فوریه

علی نجفی
najafi@iasbs.ac.ir

۴ آبان ۱۳۹۸

۱ صورت سوال

می‌خواهیم انتگرال‌های گاوسی به صورت زیر را محاسبه کنیم:

$$\mathcal{I}[f(x)] = \int \mathcal{D}[\phi(x)] e^{-\int_{-L}^{L} dx \int_{-L}^{L} dx' \phi(x) K(x-x') \phi(x') - \int_{-L}^{L} f(x)\phi(x) dx}$$

که در آن قرار است L خیلی بزرگ ($L \to \infty$) باشد. انتگرال‌گیری روی تمامی پیکر بندی‌های ممکن تابع $\phi(x)$ است. توابع $\phi(x)$ و $f(x)$ و کرنل دلخواه $K(x-x')$ حقیقی هستند. برای محاسبه‌ی انتگرال اجازه دهید محور x را به N قسمت بسیار کوچک تقسیم کنیم به طوریکه $Na = ۲L$ در این صورت درجات آزادی که روی آن انتگرال‌گیری می‌شود از تابع پیوسته‌ی بی‌نهایت بعدی $\phi(x)$ به $N+۱$ متغیر انتگرال‌گیری $\phi_i = \phi(x_i)$ با $i = ۱, \cdots, N+۱$ تبدیل می‌شود. پس انتگرال تابعی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\int \mathcal{D}[\phi(x)] = \prod_{i=۱}^{N+۱} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_i.$$

می‌بینید که با گسسته‌سازی بالا، انتگرال‌ده قطری نمی‌شود و متغیرها به هم جفت شده و انتگرال گیری به سهولت قابل انجام نیست.

۲ تبدیل فوریه

تعریف تبدیل فوریه و عکس آن به همراه نمایش انتگرالی تابع دلتای دیرک به صورت زیر است:

$$g(x) = \int \frac{dq}{۲\pi} e^{iqx} \bar{g}(q), \qquad \bar{g}(q) = \int dx e^{-iqx} g(x), \qquad \int dx e^{iqx} = ۲\pi\delta(q),$$

چون با توابع حقیقی کار می‌کنیم، به سهولت می‌بینید که تبدیل فوریه‌ی توابع حقیقی، مختلط و دارای خاصیت $\bar{g}(q) = \bar{g}^*(-q)$ است.

اجازه دهید ببینیم گسسته‌سازی که در بالا گفته شد، چه تاثیری در تبدیل فوریه دارد. چون فضای x گسسته شده پس توابع فقط در روی نقاط گسسته $x = na$ تعریف شده‌اند. در این صورت می‌بینیم که برای هر تابع دلخواه در فضای فوریه تقارن $\bar{g}(q) = \bar{g}(q + \frac{۲\pi}{a})$ برقرار است. برای اثبات این تقارن، توجه کنید که:

$$e^{i\frac{۲\pi}{a}x} = e^{i\frac{۲\pi}{a}na} = e^{۲n\pi i} = ۱.$$

این تقارن پیامد مهمی دارد، در واقع به سبب این تقارن کافیست q را در ناحیه‌ی $-\pi/a < q < \pi/a$ در نظر بگیریم. بردار موج‌های خارج این ناحیه با تقارن بالا به بردار موج‌های ناحیه‌ی مجاز تبدیل می‌شوند و اطلاعات جدیدی ندارند. از طرف

دیگر چون فضای مکان به N قسمت مساوی تقسیم شده بود پس فضای فوریه هم باید به N قسمت مساوی تقسیم شود. در نتیجه در بازه‌ی $-\pi/a < q < \pi/a$ تعداد $N + ۱$ تا بردار موج مجاز با فاصله‌ی متوالی $(۲\pi/۲L)$ داریم.

پس متغیرهای انتگرال‌گیری در فضای فوریه با $\bar{\phi}_i = \bar{\phi}(q_i)$ جایگزین می‌شوند. توجه کنید که چون تبدیل فوریه توابع قسمت موهومی هم دارد، باید متغیرهای انتگرال‌گیری را دقیق‌تر با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی به صورت $\bar{\phi}_r(q_i)$ و $\bar{\phi}_i(q_i)$ در نظر بگیریم. با احتساب قسمت‌های حقیقی و موهومی، ظاهرا درجات آزادی که قبلا در فضای مکان $N + ۱$ تا بودند، اکنون $۲(N + ۱)$ تا می‌شود؟ این البته درست نیست. توجه کنید که به خاطر تقارنی که قبلا گفته شد $\bar{\phi}_r(q) = \bar{\phi}_r(-q)$ و $\bar{\phi}_i(q) = -\bar{\phi}_i(-q)$ است، پس در بین تمام q های مجاز، تنها q های مثبت $q > ۰$، درجات آزادی مستقل را شامل می‌شوند که هم‌چنان همان $N + ۱$ تا می‌شود. اکنون انتگرال روی تمامی درجات آزادی در فضای فوریه به صورت زیر می‌شود:

$$\int \mathcal{D}[\phi(x)] = \prod_{i=۱}^{N+۱} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_i = J \prod_{q_i>۰} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\phi}_r(q_i) \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\phi}_i(q_i),$$

که در آن J ژاکوبین تبدیل فضای مکان به فضای فوریه یعنی تبدیل $\phi(x) \to \bar{\phi}(q)$ است. اگر تبدیل فوریه را به صورت گسسته‌ی زیر بازنویسی کنیم:

$$\phi(x_\mu) = \frac{۱}{۲L} \sum_{q_\nu=-\pi/a}^{\pi/a} e^{iq_\nu x_\mu} \left(\bar{\phi}_r(q_\nu) + i\bar{\phi}_i(q_\nu)\right),$$

اکنون ژاکوبین تبدیل می‌شود:

$$J = \mathrm{Det}[\frac{۱}{۲L} e^{i\mu\nu\frac{a}{L}}] = (\frac{۱}{۲L})^{N+۱}.$$

در روابط بالا برای گسسته‌سازی از اتحادهای زیر می‌توان استفاده کرد:

$$\int \frac{dq}{۲\pi} = \frac{۱}{۲L} \sum_{q_\nu=-\pi/a}^{\pi/a}, \quad \int dx = a \sum_{x_i}.$$

۳ پاسخ انتگرال

انتگرال‌ده به سهولت به فضای فوریه برده می‌شود:

$$\mathcal{H} = \int_{-L}^{L} dx \int_{-L}^{L} dx' \phi(x) K(x-x') \phi(x') + \int_{-L}^{L} f(x)\phi(x) dx = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dq}{۲\pi} \left(\bar{\phi}(q)\bar{\phi}^*(q)K(q) + \bar{\phi}(q)\bar{f}^*(q)\right)$$

در این صورت، با جدا کردن قسمت‌های حقیقی و موهومی، انتگرال به صورت زیر قابل محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= (\frac{۱}{۲L})^{N+۱} \prod_{q_i>۰} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\phi}_r(q_i) e^{-\frac{\bar{K}}{۲}\bar{\phi}_r^۲(q_i) - \bar{\phi}_r(q_i)\bar{f}_r} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\phi}_i(q_i) e^{-\frac{\bar{K}}{۲}\bar{\phi}_i^۲(q_i) - \bar{\phi}_i(q_i)\bar{f}_i} \\ &= (\frac{۱}{۲L})^{N+۱} \prod_{q_i>۰} \frac{۲\pi}{\bar{K}(q)} e^{\frac{\bar{f}(q)\bar{f}^*(q)}{۲\bar{K}(q)}} = (\frac{۱}{۲L})^{N+۱} \prod_{q_i} \sqrt{\frac{۲\pi}{\bar{K}(q)}} e^{\frac{\bar{f}(q)\bar{f}^*(q)}{۲\bar{K}(q)}} \end{aligned}$$

در رابطه‌ی بالا: $\prod_{q_i} \bar{K}(q_i) = \mathrm{Det}\bar{K} = \mathrm{Det}K$، توجه کنید که دترمینان مستقل از نمایش است و در فضای واقعی و فوریه یک مقدار دارد. پس در فضای x داریم:

$$\mathcal{I} \sim \frac{۱}{\sqrt{\mathrm{Det}K}} e^{\frac{۱}{۲}\int dx \int dx' f(x) K^{-۱}(x-x') f(x')}.$$

که در آن عملگر وارون به صورت زیر تعریف شده است:

$$\int dx'' K(x-x'')K^{-1}(x''-x') = \delta(x-x').$$

حال به راحتی می‌توانید نشان دهید در $f=0$:

$$\langle \phi(x)\phi(x')\rangle = \frac{\int \mathcal{D}[\phi(x)]\phi(x)\phi(x')e^{-\mathcal{H}}}{\int \mathcal{D}[\phi(x)]e^{-\mathcal{H}}}|_{f=0} = K^{-1}(x-x').$$