Subject:
Date

□ درس فیزیک پلیمرها (۱۳۹۹/۱/۲۰ علی بخش)

مراجع اصلی:

1- scaling concepts in polymer phys. P.G. de Gennes
2- polymer physics, M. Rubinstein + R.H. Colby

مراجع مختلفی در مورد موضوع فیزیک پلیمرها وجود دارد. رهیافت کتاب ژرژن بر مبنای محاسبات ساده، آنالیز ابعادی و قوانین مقیاس بندی است.
هرچند رهیافت ژرژن از نظر ریاضیاتی ساده‌تر و سریع‌تر به فیزیک پلیمرها می‌پردازد ولی خواننده باید توجه کند که این رهیافت عموماً بر شهود بسیار قوی و تجربهٔ زیاد آقای ژرژن استوار است و لزوماً هر موضوع جدیدی در فیزیک پلیمرها را این‌گونه براحتی با روش ژرژن آنالیز کرد. به خواننده اعلام می‌شود برای آگاهی از روش‌های ریاضی و دقیق فیزیکی که در فیزیک پلیمرها کاربرد دارند به مرجع دوم مراجعه نماید.

عمدهٔ مطالب این یادداشت بر مبنای کتاب ژرژن است ولی پیش از آن به صورت خیلی فشرده به موضوع یک پلیمر تنها (ایده‌آل و غیرایده‌آل) با رهیافت دقیق‌تر ریاضی نگاه خواهیم کرد.

Subject:
Date

مقدمه:

پلیمرها آنچنان که از اسمشان پیداست از پیوند شیمیایی مونومرها تولید می‌شوند.

یک مونومر، یک مولکول درشت است که می‌تواند اندازه‌ای از صدها تا چند صد آنگستروم داشته باشد. پلیمرها، ولی می‌توانند آن قدر بزرگ شوند که اندازه‌ی آن‌ها از چند میکرومتر تا چندین سانتی متر در برخی مثال‌ها برسد.

پلیمرها را می‌توان در دسته‌های مختلفی مثل طبیعی، مصنوعی، زیستی یا غیرزیستی قرار داد. پلی اتیلن ($(CH_2-CH_2-)_n$)، لاستیک، نایلون و تفلون و غیره مثال‌هایی از پلیمرهای مصنوعی هستند. سلولوز، پشم، ابریشم لاستیک طبیعی (شیره درخت Hevea) از مثال‌های پلیمرهای طبیعی‌اند. DNA، رشته‌های اکتین و میکروتوبول‌ها مثال‌هایی از پلیمرهای زیستی‌اند که درون سلول‌ها ساخته می‌شوند.

لاستیک طبیعی ویژگی‌های جالبی دارد. اولین بار برای مردم آمریکا توسط بومیان مکزیک معرفی شد. آن‌ها توپ‌هایی با آن ساخته و برای بازی با آن‌ها به اسپانیا رفتند. هوی بعد از چند دقیقه آن مسابقه شروع شد و تیم آن‌ها با اختلاف زیاد برنده شد. در واقع شیره درخت از پلیمرهایی درست است که در معرض اکسیژن هوا، پلیمرها به هم در نقاطی متصل می‌شوند و ساختار محکم‌تری ایجاد می‌کنند. البته این ساختار پایدار نبوده و با گذشت زمان بیشتری (چند ساعت) اکسیژن هوا تغییر مخرب ایجاد کرده

PAPCO

Subject:
Date

و قطعاتی بین پلیمری نابود می‌شوند. سال 1839 آقای Goodyear متوجه شد که با جوشاندن شیره درخت با سولفور لاستیک طبیعی متداول و پایداری تولید می‌شود.

خواص مکانیکی و رئولوژیکی ساختارهای پلیمری مورد بحث است و هدف از "فیزیک پلیمرها" یافتن روش‌هایی است برای توصیف و احیاناً پیش‌گویی خواص آنها است.

معمولاً پلیمرها به صورت محلول در یک محیط قطبی یا غیرقطبی هستند. بعضی پلیمرهای زیستی در محلول آبی جای گرفته‌اند. ولی پلیمرهای صنعتی در محیط کربنی قرار گرفته‌اند.

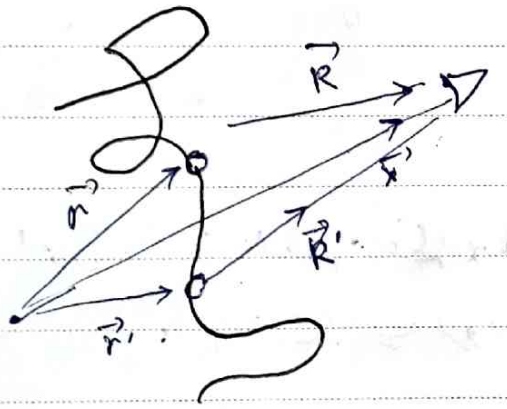
ساختارهای پلیمری ممکن است خیلی رقیق یا غلیظ باشند. در مورد ساختارهای خیلی رقیق شناخت رفتار یک پلیمر تنها در اولویت است ولی در ساختارهای غلیظ برهمکنش بین پلیمرها هم باید به خوبی مطالعه شوند.

Subject :
Date

روش‌های تجربی

آزمایش پراکندگی (نوترون) از مهم‌ترین ابزارهای آزمایشگاهی برای بررسی خواص فیزیک پلیمرهاست. پراکندگی نوترون به پراکندگی نور و X-Ray ارجحیت دارد. این موضوع بدین سبب است که اندرکنش نوترون‌ها با هسته‌های اتم است و با تغییر ایزوتوپ‌ها می‌توان قدرت پراکندگی آن هسته‌ها را تغییر داد. در این صورت با تغییر ایزوتوپ و بدون اینکه رفتار شیمیایی آن پلیمرها و در نتیجه کل ساختار پلیمری را تحت تأثیر قرار داد، می‌توان رفتار کل پلیمر در جیب گذاری شده را مطالعه کرد.
توجه شود که مثلاً در مورد X-Ray در جیب گذاری باید با جسامت اتم‌های خیلی سنگین تر انجام شود. این نوع در جیب گذاری رفتار شیمیایی کل سیستم را هم تغییر می‌دهد.

در جمع خروجی تحت را در نظر بگیرید که به پلیمر(ها) خورده پراکنده شده و به آشکارساز می‌رسد. در جمع رسیده به آشکارساز هم نقش همه پراکندگی‌ها از نقاط مختلف است و پراکندگی از هر نقطه هم به چگالی مونومرهای موجود در آن نقطه وابسته است.
هیچ توزیع مفید نتیجه آزمایش پراکندگی است.



$$\text{Scattering Intensity} = \left\langle \left| \sum_R e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}} c(\vec{R}) \right|^2 \right\rangle$$

$$= \sum_R \sum_{R'} e^{i\vec{q}\cdot\vec{R} - i\vec{q}\cdot\vec{R}'} \langle c(R)\, c(R') \rangle$$

$$\int d\vec{r} \int d\vec{r}' \, e^{i\vec{q}(\vec{r}'-\vec{r})} \langle c(r)\, c(r') \rangle$$

$$= V \int d\vec{r} \, e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \langle c(0)\, c(\vec{r}) \rangle = \tilde{g}(\vec{q})$$

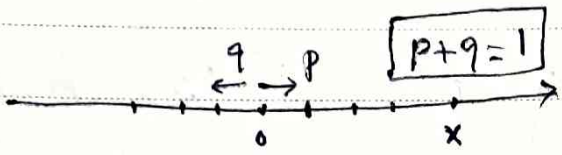
$g(\vec{r}) := \frac{1}{V} \langle c(0)\, c(\vec{r}) \rangle$ = pair correlation function:
احتمال حضور یک نقطه دلخواه و یک نقطه در فاصله $\vec{r}$ از آن اندازه‌گیری می‌شود.

~~$\int g(\vec{r})\, d\vec{r} = \tilde{g}(0) = N$~~ و خاصیت مورد نظر برای نقاط با فاصله متوسط

PAPCO

Subject:
Date

گشت تصادفی: مدلی برای پدیده ایزوال



p: احتمال این که در هر قدم به سمت راست برود

q: احتمال اینکه در هر قدم به سمت چپ برود

l: طول هر قدم

n_l تعداد قدم‌هایی که به سمت راست

n_r: تعداد قدم‌هایی که به سمت چپ

N: تعداد کل قدم‌ها

$P_N(x) = ?$

احتمال اینکه بعد از N قدم در نقطه x باشد.

$$\begin{cases} n_r + n_l = N \\ n_r - n_l = x/l \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n_r = [N + x/l]/2 \\ n_l = [N - x/l]/2 \end{cases}$$

توزیع دوجمله‌ای

$$P_N(x) = \frac{N!}{n_r!\, n_l!}\, p^{n_r} q^{n_l}$$

مثال

$N=3$ → → ←

$n_r=2$ → ← →

$n_l=1$ ← → →

تعداد حالت‌هایی که از N قدم n_l تا به چپ و n_r تا به راست باشد.

احتمال اینکه بعد از N قدم در نقطه x باشد برابر است با احتمال اینکه n_r قدم به سمت راست و n_l قدم به سمت چپ برود، به شرطی که n_r، n_l در روابط بالا صدق کنند.

$$\sum_{x=-\infty}^{+\infty} P_N(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{N!}{m!\,(N-m)!}\, p^m q^{N-m} = (p+q)^N = 1$$

Subject:
Date

$$\langle x\rangle_N = \sum_x x P_N(x) = \ell \sum_{m=0}^{\infty} (2m-N) P_N(m)$$

$$= 2\ell \sum_m m P_N(m) - \ell N \sum_m P_N(m) =$$

$$= 2\ell \sum p \frac{\partial}{\partial p} \frac{N!}{m!(N-m)!} p^m q^{N-m} - \ell N =$$

$$= 2\ell\, p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N - \ell N = N\ell[2p-1] = N\ell[p-q]$$

$$= 0 \quad \left(p=\tfrac{1}{2} \text{ برای}\right)$$

$x = x(m)$

$$\langle x^2\rangle_N = 4\ell^2 \sum_m m^2 P_N(m) - 4N\ell^2 \sum_m m P_N(m) + N^2\ell^2 \sum_m P_N(m)$$

$$= N\ell^2 \{ N - 4Np + 4p(1+p(N-1)) \} =$$

$$= N\ell^2 \quad \left(p=\tfrac{1}{2} \text{ برای}\right)$$

□ روش جایگزین

$$P_N(x) = p\, P_{N-1}(x-\ell) + q\, P_{N-1}(x+\ell)$$

$$\langle x\rangle_N = \sum x P_N(x) = p \sum x P_{N-1}(x-\ell) + q \sum x P_{N-1}(x+\ell)$$

$$= p \sum_y (y+\ell) P_{N-1}(y) + q \sum_y (y-\ell) P_N(y)$$

$$= p\left(\langle x\rangle_{N-1} + \ell\right) + q\left(\langle x\rangle_{N-1} - \ell\right)$$

$$\boxed{\langle x\rangle_N = \langle x\rangle_{N-1} + \ell(p-q)}$$

با حل این رابطه بازگشتی به همان نتایج قبلی می‌رسیم

Subject:
Date

□ تقسیم احتمالات در یک بعدی

$(p+q+r+s)=1$ $\quad q \leftarrow \uparrow r \rightarrow p$ $\quad \downarrow s$

$$P_N(x,y)=\frac{N!}{n_{xr}!\, n_{xl}!\, n_{yu}!\, n_{yd}!}\, p^{n_{xr}} q^{n_{xl}} r^{n_{yu}} s^{n_{yd}}$$

$$P_N(x,y)=pP_{N-1}(x-l,y)+qP_{N-1}(x+l,y)+rP_{N-1}(x,y-l)+sP_N(x,y+l)$$

سؤال : $\langle x\rangle$ ، $\langle y\rangle$ ، $\langle x^2\rangle$ ، $\langle y^2\rangle$ را محاسبه کنید.

$$\boxed{\langle x^2+y^2\rangle_N = Nl^2} \qquad (p=q=r=s=1/4 \text{ برای})$$

□ حد $N\to\infty$ توزیع (دوجمله‌ای) :

$$P_N(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}\, p^n q^{N-n}$$

اگر $N=5$ ←

حول $n=\bar{n}$ بسط تیلور می‌زنیم

$$n=\bar{n}+\epsilon$$

$$\left.\frac{dP}{dn}\right|_{\bar{n}}=\left.\frac{d}{dn}\ln P\right|_{\bar{n}}=0$$

$$\ln P(n)\simeq \ln P(\bar{n})+0\times\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon^2\left.\frac{d^2}{dn^2}\ln P\right|_{<0}+\cdots$$

$$\boxed{P_N(n)=A\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(n-\bar{n})^2}{\sigma^2}}}$$

(به شرط آنکه $\bar{n}$ بزرگ باشد) ضریب A پیدا می‌شود.

$\bar{n}=\langle n\rangle$

$\sigma^2=\langle n^2\rangle-\langle n\rangle^2$

$A=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$

Subject:
Date

□ خلاصه نتایج برای زنجیره ایده آل

گشت تصادفی ساده‌ترین مدلی است که زنجیره ایده آل را توصیف میکند. اگر طول سونومرها را با $l=a$ نشان دهیم یک پلیمر تنها متشکل از N سونومر با طول مشخصه R_0 که معیاری از اندازه کلی پلیمر است مشخص می‌شود:

$$R_0 \triangleq \sqrt{\langle r^2 \rangle_N} \sim a N^{\frac{1}{2}}$$

تعداد حالت‌هایی که یک پلیمر N سونومری می‌تواند دو نقطه مشخص نازل را در فضا به هم متصل کند را $R_N(r)$ نشان می‌دهیم. در این صورت تعداد حالت‌هایی که می‌توانیم از طریق آنها یک پلیمر N سونومری را با هم بصورت زیری می‌کرد، $[\vec{r}_i - \vec{r}_j = \vec{r}]$

$$R_N = \sum_{\vec{r}} R_N(\vec{r}) = z^N$$

R_N در واقع تعداد گشت‌های تصادفی N قدمی است که در فضای دلخواه می‌کنیم که هر نقطه آن z همسایه نزدیک دارد، انجام می‌شود.

آنتروپی پلیمری که بردار انتها به انتهای آن بردار $\vec{r}$ مشخص شده است بصورت زیر

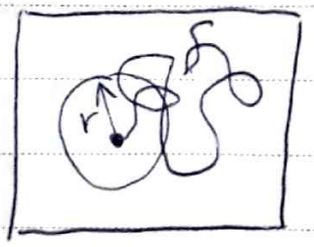
$$S = \ln R_N(\vec{r})$$

می‌شود.

تابع توزیع احتمال بردار $\vec{r}$ بصورت زیر است

$$p(\vec{r}) = \frac{R_N(r)}{R_N} \sim \frac{1}{N^{3/2}} \exp\left[-\frac{3r^2}{2Na^2}\right] \quad d=3 \;;\; \langle r^2 \rangle = Na^2$$

تابع همبستگی جفت درون یک پلیمر ایده آل [تابع دیای] بصورت ساده زیر محاسبه می‌شود:



$$r \ll R_0$$

$$g(r) = V \langle c(0)\, c(r) \rangle$$

$$c(0) = \frac{N}{V} \qquad na^2 \sim r^2$$

$$c(\vec{r}) = \frac{n}{\frac{4}{3}\pi r^3} \sim \frac{1}{r^2} \rightarrow \begin{cases} g_D(r) \sim \frac{1}{r} & r \ll R_0 \\ \tilde{g}_D(q) \sim \frac{1}{q^2} & q \gg \frac{1}{R_0} \end{cases}$$

Subject:
Date

□ گشت تصادفی خودپرهیز:

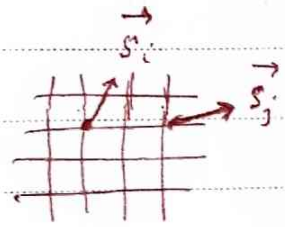
برای مطالعه خواص فیزیکی گشت تصادفی خودپرهیز ابتدا آنرا تبدیل می‌کنیم به یک مدل ریاضی ساده‌تر ریاضی سپس گشت تصادفی به مسئله فیزیکی مدل صفنطی n-vector در حد $(n \to 0)$ تبدیل می‌شود. از آنجا به‌سهولت برخی خواص گشت خودپرهیز بدست می‌آید

□ خلاصه نتایج گشت خودپرهیز:

تعداد حالت‌ها $R_N \sim \bar{z}^N N^{\gamma-1}$ $\gamma = \gamma(d)$

طول شفت $R_f \sim a N^{\nu}$

مرجع: Macromolecules, 8, N06, 804 (1975)



$K_{ij} = K_{ji} = K$

□ معرفی مدل n-vector بر مشبک همیلتونی

$$\mathcal{H}_0 = -\sum_{\langle ij \rangle} K_{ij} \vec{S_i} \cdot \vec{S_j} \qquad \vec{S_i} = (S_i^1, \dots S_i^n)$$

شرط بزرگ بودن $S_i^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} S_i^\alpha = n$

$$Z = \int D[\vec{S}]\, e^{\beta \sum' K_{ij} \vec{S_i} \cdot \vec{S_j}} \qquad \beta := \frac{1}{\bar{z}}$$

m = مغناطش مدل کمیتی برواحد ذره
N = تعداد ذرات
M = مغناطش کل

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \vec{h} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{S_i}$$

$$\vec{M} = N \langle \vec{S_i} \rangle = N \frac{\int D[S]\, e^{-\beta \mathcal{H}}\, \vec{S_i}}{\int D[S]\, e^{-\beta \mathcal{H}}}$$

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial h} = N \beta \sum_r \langle \vec{S}(0)\, \vec{S}(\vec{r}) \rangle$$

در نقطه گذار از $T=T_c$ تابع همبستگی به شکل زیر درمی‌آید:

$$\chi \sim \epsilon^{-\gamma} \qquad \epsilon = T - T_c \; ; \; \gamma = \gamma(d)$$

برای n-vector ☐ وقتی $n \to 0$

$$Z = \int D[\vec{S}] \prod_{i>j} \prod_{\alpha=1}^{n} e^{\frac{K}{\tau} S_i^\alpha S_j^\alpha} = \Omega \left\langle e^{K/\tau \sum \vec{S}_i \vec{S}_j} \right\rangle_0$$

تعریف $\langle f \rangle_0 \triangleq \dfrac{\int D[\vec{S}] f}{\int D[\vec{S}]} = \Omega^{-1} \int D[\vec{S}] f$

$$f(k) = \left\langle e^{i\vec{k}\cdot\vec{S}} \right\rangle_0 = \left\langle e^{i \sum_{\alpha=1}^{n} k_\alpha S_\alpha} \right\rangle_0$$

$$\nabla^2 f(k) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial k_\alpha^2} f = -\left\langle \sum_\alpha k_\alpha S_\alpha e^{ik\cdot S} \right\rangle_0 = -n \left\langle e^{ikS} \right\rangle_0 = -nf$$

اما:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial k^2} + \frac{n-1}{k} \frac{\partial}{\partial k} + \text{زاویه‌ای}$$

$$f(0) = 1 \; , \; f'(0) = 0$$

$$n=0 \rightarrow \left(\frac{d^2}{dk^2} - \frac{1}{k} \frac{d}{dk} \right) f = 0 \rightarrow \boxed{f = 1 - \frac{1}{2} k^2}$$

$$\rightarrow \left\langle e^{ik\cdot S} \right\rangle_0 = \left\langle 1 + i\, k\cdot S + \frac{1}{2} (k\cdot S)^2 + \cdots \right\rangle_0 = 1 - \frac{1}{2} k^2$$

نتیجه: فقط متوسط توان دوم S می‌تواند غیر صفر شود وقتی $n=0$

$$n=0 \rightarrow \begin{cases} \langle S_\alpha \rangle_0 = 0 \\ \langle S_\alpha S_\beta \rangle_0 = \delta_{\alpha\beta} \\ \langle S_\alpha S_\beta \cdots \rangle = 0 \end{cases}$$

Subject :
Date

□ بسط تابع پارشن : $n=0 \leftarrow 0$

$$\frac{Z}{\Omega} = \prod_{i>j} \left\langle 1 + \frac{K_{ij}}{\tau} \sum_{\alpha} S_i^{\alpha} S_j^{\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{K_{ij}}{\tau}\right)^2 (S_i \cdot S_j)^2 + \cdots \right\rangle_0$$

$$= \Big\langle \Big(1 + \frac{K_{12}}{\tau} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \frac{K_{12}^2}{2\tau^2} \sum_{\alpha\beta}^{n} S_1^{\alpha} S_2^{\alpha} S_1^{\beta} S_2^{\beta}\Big) \times$$

$$\Big(1 + \frac{K_{23}}{\tau} \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 + \frac{K_{23}^2}{2\tau^2} (S_2 \cdot S_3)^2\Big) \times (\quad) \cdots \Big\rangle_0$$

$$= 1 + \Big(\frac{K_{12}^2}{2\tau^2} \sum_{\alpha\beta=1}^{n} \underbrace{\langle S_1^{\alpha} S_2^{\alpha} S_1^{\beta} S_2^{\beta} \rangle_0}_{\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\alpha} = n \to 0} + \frac{K_{23}^2}{2\tau^2} \sum_{\alpha\beta} \underbrace{\langle S_2^{\alpha} S_3^{\alpha} S_2^{\beta} S_3^{\beta} \rangle_0}_{= n \to 0} + \cdots \Big) + \cdots$$

$$= 1.$$

تابعی به صورت گراف :

$\frac{K^2}{\tau^2} S_1^{\alpha} S_2^{\alpha} S_1^{\beta} S_2^{\beta}$ $\quad S_1^{\alpha} S_1^{\beta}$ $\quad K_{12}$ $\quad K_{21}$ $\quad S_2^{\alpha} S_2^{\beta}$

خود برهمکنش

$$\frac{Z}{\Omega} = 1 + \frac{1}{2}\Sigma \; {}_1\!\bigcirc\!{}_2 + \Sigma \; {}_1\!\bigcirc\!{}_3 + \Sigma \; \square + \Sigma \; \square + \cdots$$

تمام جملات غیرصفر موجود در بسط تابع پارشن به صورت گراف های بسته خود برهمکنش شونده که متوسط آنها هم با n متناسب و در نهایت صفری شود.

Subject :
Date

□ توابع همبستگی:

$$\langle S_i^\mu S_j^\nu \rangle = \frac{\langle S_i^\mu S_j^\nu e^{-\beta\mathcal{H}} \rangle_0}{\langle e^{-\beta\mathcal{H}} \rangle_0 \to 1}$$

$$= \Big\langle S_i^\mu S_j^\nu \Big(1 + \frac{K_{12}}{\tau} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \frac{K_{12}^2}{2\tau^2} (\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2)^2 \Big) \times \Big(1 + \frac{K_{23}}{\tau} \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 + \frac{K^2}{2\tau^2} (S_2 \cdot S_3)^2 \Big) \times \cdots \Big\rangle_0$$

$$= \langle S_i^\mu S_j^\nu \rangle_0 + \frac{K}{\tau} \Big\{ \langle S_i^\mu S_j^\nu \, S_1 \cdot S_2 \rangle_0 + \langle S_i^\mu S_j^\nu \, \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \rangle_0 + \cdots \Big\}$$

$$+ \Big(\frac{K}{\tau}\Big)^2 \Big\{ \frac{1}{2} \langle S_i^\mu S_j^\nu (S_1 \cdot S_2)^2 + \frac{1}{2} S_i^\mu S_j^\nu (S_2 \cdot S_3)^2 + \cdots \Big\rangle_0$$

$$+ \Big\langle S_i^\mu S_j^\nu (S_1 \cdot S_2)(S_2 \cdot S_3) + S_i^\mu S_j^\nu (S_1 \cdot S_2)(S_3 \cdot S_4) + \cdots \Big\rangle_0 \Big\}$$

$$+ \Big(\frac{K}{\tau}\Big)^3 \Big\{ \cdots \Big\} + \cdots$$

در رابطه بالا توجه کنید که باید μ, ν را ثابت فرض کرده و متوسط گیری را انجام دهیم. جملاتی که در $\frac{K}{\tau}$ ضرب می‌شوند را در نظر گیرید. تنها یک جمله غیرصفر است و آن جمله‌ای است با ساختار $\langle S_i^\mu S_j^\nu \, \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle_0$ و آن برابر می‌شود با:

$$\langle S_i^\mu S_j^\nu \, \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \rangle_0 = \sum_\alpha \langle S_i^\mu S_j^\nu \, S_i^\alpha S_j^\alpha \rangle_0 = \langle S_i^\mu S_j^\nu S_i^\mu S_j^\nu \rangle_0 = \delta_{\mu\nu}$$

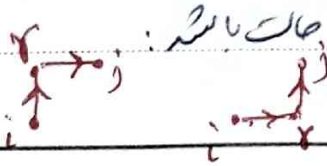
به شرط (زوج) همسایه باشند

جملاتی که در $(\frac{K}{\tau})^2$ ضرب می‌شوند را در نظر گیرید. خط اول نشان می‌دهد خط دوم جملاتی غیر صفر که ساخت زیر را داشته باشند:

$$S_i^\mu S_j^\nu (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_\gamma)(\vec{S}_\gamma \cdot \vec{S}_j) = \sum_\alpha \sum_\beta \langle S_i^\mu S_j^\nu S_i^\alpha S_\gamma^\alpha S_\gamma^\beta S_j^\beta \rangle_0 = \langle S_i^\mu S_j^\nu S_i^\mu S_\gamma^\mu S_\gamma^\nu S_j^\nu \rangle_0$$

$$= \delta_{\mu\nu}$$

به شرطی که i و j با یک همسایه مشترک باشند. برای حالت $d=2$ بعدی حالت می‌تواند ۲ حالت باشد:



Subject:
Date

$$\langle s_i^\mu s_j^\nu \rangle\Big|_{h=0} = \sum_{N=0}^{\infty} R_N(ij)\left(\frac{K}{\tau}\right)^N \delta_{\mu\nu}$$

$R_N(ij)$ تعداد گشت‌های تصادفی خودپرهیز N قدمی است که i به j می‌رسد.

$$R_N(total) = \sum_j R_N(ij)$$

$$\chi \sim \frac{1}{\tau}\sum_j \langle s_i^\mu s_j^\nu \rangle = \frac{1}{\tau}\sum_{N=0}^{\infty} R_N(tot)\left(\frac{K}{\tau}\right)^N$$

□ رفتار بحرانی سیستم مغناطیسی:

$$\epsilon = \frac{\tau - \tau_c}{\tau_c} \rightarrow \tau = \tau_c(1+\epsilon) \underset{\epsilon \to 0}{\simeq} \tau_c e^{\epsilon}$$

$$\chi \sim \epsilon^{-\gamma}$$

$$\frac{1}{\tau_c} e^{-\epsilon}\sum_{N=0}^{\infty} R_N(tot)\left(\frac{K}{\tau_c}\right)^N e^{-N\epsilon} \simeq \epsilon^{-\gamma}$$

$$\frac{1}{\tau_c}\int_0^{\infty} dN\, R_N(tot)\left(\frac{K}{\tau_c}\right)^N e^{-N\epsilon} \sim \epsilon^{-\gamma}$$

اتحاد بالاتنه در هر بعدی برقرار است:

$$\boxed{R_N(tot) \sim \left(\frac{\tau_c}{K}\right)^N N^{\gamma-1}}$$

این هم‌ارزی واژه‌ای نتیجه برای گشت تصادفی خودپرهیز است.

$$R_N \sim \begin{cases} e^N & R.W \\ \bar{z}^N N^{\gamma-1} & SARW \end{cases} \qquad \bar{z} := \frac{z_c}{K}$$

Subject :
Date

$$\langle S_i^\mu S_j^\nu \rangle = \sum_N R_N(i,j) \left(\frac{K}{\tau}\right)^N \sim \int_0^\infty dN \; e^{-N\epsilon} \; R_N(i,j)$$

$R_N(i,j)$ ← تعداد حالات حاصل برای تابعی از N

تابع همبستگی به عنوان تابعی از ϵ ←

از رابطه بالا دیده می‌شود تابع همبستگی، به عنوان تابعی از ϵ و تابع تعداد حالات حاصل به عنوان تابعی از N تبدیل لاپلاس همدیگرند. پس رفتار تابع همبستگی در ϵ کوچک از رفتار تعداد حالات حاصل در N های خیلی بزرگ به دست می‌آید. در واقع برای مطالعه خواص گشتاوری خودپرهیز، خواص سیستم خطی نزدیک نقطه بحرانی مهم است.

ساده‌ترین سیستم خطی نزدیک نقطه بحرانی یک طول شاخص دارد که واگرا می‌شود $\xi \sim \epsilon^{-\nu}$ (طول همبستگی). در سرد دیمر در $N \to \infty$ هم یک طول شاخص داریم که سایز دیمر محاله نشده است و R_F تابعی از آن هست.

$$R_F(N) \sim \xi \sim \epsilon^{-\nu} \sim N^\nu$$

$$\boxed{R_F(N) \sim N^\nu}$$

این دو رفتار نتیجه مهمی است برای گشتاوری خودپرهیز به دست می‌آید

از دیدگاه‌های بحرانی:

$$\begin{cases} d \gtrsim 4 \to \nu = \frac{1}{2} \; ; \gamma = 1 \; (RW) \; \text{mean field results are valid} \\ d < 4 \to \nu \neq \frac{1}{2} \; ; \gamma \neq 1 \; (SARW) \end{cases}$$

دیمرهای خودپرهیز در $d \gtrsim 4$ رفتار دیمرهای ایده‌آل را دارند.

Subject:
Date

□ محاسبه انتگرال:

الف: $\int x^p e^{-\alpha x} dx = \alpha^{-p-1} \underbrace{\int z^p e^{-\epsilon} dz}_{\text{Dimensionless} \sim O(1)} \sim \alpha^{-p-1}$

ب: $\int x^p e^{-\alpha x} dx = \sum \frac{(-\alpha)^n}{n!} \int_0^\infty x^{p+n} dx = \sum_{n=\cdot}^{\infty} \frac{(-\alpha)^n}{n!} \frac{x^{p+n+1}}{(p+n+1)} \Big|_\cdot^\infty$ $\quad p+n+1 = m$

$= \sum_{n=\cdot}^{\infty} \frac{(-\alpha x)^{p+n+1}}{(p+n+1)\, n!} \Big|_\cdot^\infty (-\alpha)^{-p-1} = (-\alpha)^{-p-1} \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{(-\alpha x)^m}{m\,(m-p-1)!} \Big|_\cdot^\infty$

واضح است که در این سری بیشترین سهم از mهای بزرگ می‌آید و mهای کوچک نقش چندانی ندارند

$m - p \simeq m \rightarrow m(m-p-1) \simeq m!$

$= (-\alpha)^{-p-1} \sum_{m=m_\infty}^{\infty} \frac{(-\alpha x)^m}{m!} \Big|_{m_\infty}^{\infty} \simeq (-\alpha)^{-p-1} e^{-\alpha x} \Big|_{x_\infty}^{\infty} \sim (-\alpha)^{-p-1}$