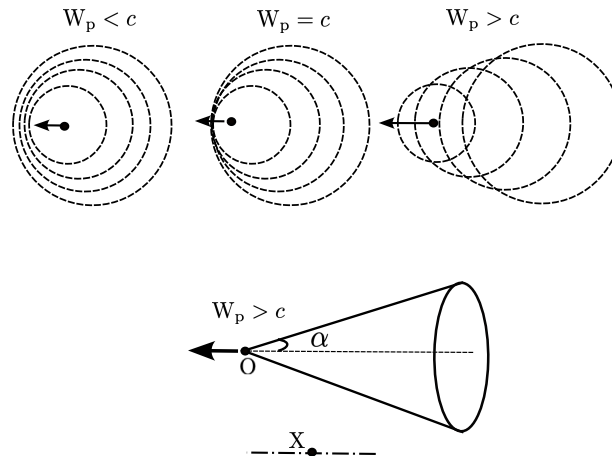


شکل ۲.۴ منبع و گیرنده‌ی موج صوتی به ترتیب با E و D نشان داده شده‌اند. در حالت بالا فرکانس ثبت شده توسط آشکارساز بصورت $\omega_D = \omega_E \left(1 \pm \frac{w_D}{c}\right)$ است که + و - به ترتیب حالت‌های نزدیک شونده و دور شونده را نشان می‌دهند. در حالت پایینی، فرکانس ثبت شده توسط آشکارساز بصورت $\omega_D = \omega_E \left(1 \pm \frac{w_E}{c}\right)^{-1}$ است. در هر صورت گیرنده‌ای که از منبع دور می‌شود فرکانس کوچکتری را می‌شنود و گیرنده‌ی نزدیک شونده فرکانس بزرگتری را می‌شنود. شکل جبهه‌های موج که فاصله‌ی بین آنها طول موج را نشان می‌دهد، برای حالت‌های دورشونده (بالا) و نزدیک شونده (پایین) نشان داده شده است.

۴.۴ دیوار صوتی

یک جسم صلب، مثلاً یک هواپیما که با سرعت W_p درون هوا حرکت می‌کند را در نظر بگیرید. امواج صوتی ناشی از این هواپیما چگونه در فضا منتشر می‌شوند. در شکل ۳.۴ - بالا بصورت کیفی موضوع را بررسی کرده‌ایم. فرض کنید هواپیما بسیار کوچک و آن را نقطه‌ای فرض کنید. اگر سرعت هواپیما خیلی کم باشد، آشفته‌گی‌هایی صوتی که به هر دلیلی (مثلاً نوسانات موتور هواپیما) از روی سطح هواپیما تولید می‌شوند وارد هوا شده و با سرعت c و بصورت همسانگرد در تمام راستاها منتشر می‌شوند. با افزایش سرعت هواپیما، جبهه‌های موج که با سرعت c از هواپیما دور می‌شوند، درست روبروی هواپیما به هم نزدیک تر و فشرده تر می‌شوند. اگر سرعت هواپیما تا $W_p = c$ افزایش یابد، همه‌ی جبهه‌های موج که قبلاً تولید شده‌اند روبروی هواپیما به هم رسیده و با هم جمع می‌شوند. اکنون اگر بخواهیم سرعت هواپیما را اندکی بیشتر افزایش دهیم تا از c کمی بیشتر شود، باید هواپیما از جبهه‌های موجی که قبلاً تولید کرده و همه روبرویش بصورت چگالیده قرار دارند عبور کند. از آنجا که هر جبهه‌ی موج با یک اختلاف فشار همراه است پس می‌توان حدس زد که نیروی پیش‌ران خیلی بزرگی برای گذر از این سد لازم است.



شکل ۳.۴ بالا: جبهه‌های موج یک پرنده تقریباً نقطه‌ای شکل که به سمت چپ حرکت می‌کند، نشان داده شده است. با افزایش سرعت جسم، جبهه‌های موج روبروی پرنده چگالیده می‌شوند. در $M = W_p/c = 1$ ، همه‌ی جبهه موج‌های قبلی درست روبروی هواپیما به هم رسیده‌اند. برای $M > 1$ ، فقط درون یک ناحیه‌ی مخروطی پشت پرنده، امواج صوتی منتشر می‌شوند. سطح ماخ، محلی است که تمام جبهه موج‌های قبلی به هم می‌رسند و یک موج شوک داریم. پایین راست: ناظر X، در لحظه‌ای که سطح ماخ پرنده‌ی بالای سرش را ملاقات می‌کند، صدای مهیبی می‌شنود. پایین چپ: زاویه‌ی مخروط ماخ با رابطه‌ی $\sin \alpha = 1/M$ داده می‌شود.

تا سالها تصور می‌شد گذر از این سد، به خاطر محدودیت‌های عملی، مقدور نباشد ولی با توسعه‌ی پرنده‌های جنگی این سد از لحاظ عملی شکسته شد. با افزایش سرعت پرنده و برای $W_p > c$ ، پرنده همواره از جبهه موج‌های تولید شده قبلی توسط خودش جلوتر است و در واقع امواج صوتی فقط درون یک ناحیه‌ی مخروطی شکل پشت پرنده قابل انتشارند. به مرز این ناحیه‌ی مخروطی شکل، سطح ماخ گفته می‌شود. سطح ماخ جایی است که جبهه موج‌هایی که قبلاً تولید شده‌اند، آنجا با هم جمع می‌شوند و در واقع یک موج شوک داریم. به گذر از حد $W_p = c$ و تشکیل مخروط صوتی پشت هواپیما، شکست دیوار صوتی گفته می‌شود. حال مطابق شکل ۳.۴- پایین پرنده‌ی جنگی با سرعت مافوق صوت $M = W_p/c > 1$ را در نظر بگیرید که در حال حرکت به سمت چپ است و ناظر X روی زمین نظاره گر است. در زمانی که پرنده درست بالای سر ناظر است، هنوز ناظر وارد مخروط پشت پرنده نشده و قاعدتاً هیچ

صدایی یا دست‌کم صدای قابل توجهی از هواپیما نمی‌شنود. این سکوت تا زمانی که پرنده دورتر شده و ناظر درون مخروط قرار گیرد ادامه پیدا می‌کند و پس از آن، این سکوت شکسته می‌شود. درست لحظه‌ای که ناظر شاهد گذر سطح مخروط (سطح ماخ) است، صدای بسیار مهیبی شنیده می‌شود که برهم‌نهی امواج صوتی است که به یکباره به هم رسیده‌اند.

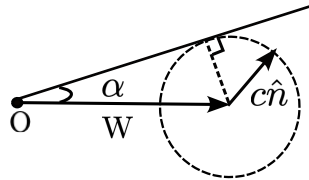
۵.۴ سطح ماخ

آنطور که شرح داده شد برای $M > 1$ ، امواج صوتی فقط درون یک مخروط پشت جسم پرنده منتشر می‌شوند. برای بررسی این مساله اجازه دهید از دید ناظر همراه پرنده ادامه دهیم. از دید این ناظر هواپیما ثابت و جریان هوا با سرعت $\mathbf{W} = -W_p$ برقرار است. در اینصورت رابطه‌ی ۶.۴ راستای انتشار موج را از دید این ناظر بصورت $\mathbf{v}_S = \mathbf{w} + c\hat{n}$ مشخص می‌کند. به ازای تمام بردارهای دلخواه $\hat{n}$ تمام راستاهای مجاز انتشار از این رابطه بدست می‌آید. مطابق شکل ۴.۴، تمام درون مخروطی با نیم زاویه‌ی راس $\alpha = 1/M$ قرار می‌گیرند.

نتیجه‌ی نهایی این است که از دید ناظر همراه پرنده و برای $M > 1$ ، میدان سرعت شاره در ناحیه‌ی خارج مخروط ماخ، میدان سرعت یکنواخت $\mathbf{w}$ است ولی میدان سرعت درون مخروط ماخ شامل این میدان سرعت یکنواخت و اثرات تراکم پذیری ناشی از هواپیما (که بصورت امواج صوتی در نظر گرفته شده) است.

توجه کنید که برای $M < 1$ ، میدان سرعت در تمام نقاط فضا برهم‌نهی ساده‌ای از میدان یکنواخت $\mathbf{w}$ و اثرات اختلالی بصورت امواج صوتی است.

یک هواپیمای جنگنده‌ی F-۱۴ در سطح دریا قادر است به سرعتی با $M = 1.2$ دست یابد. در این شرایط نیم‌زاویه‌ی مخروط ماخ برابر با $\alpha \sim 56^\circ$ است. اگر این پرنده با این سرعت و ارتفاع ۱ km از بالای سر ناظری گذر کند، حدوداً پس از ۶۰۰ m که دورتر شد، ناظر وارد مخروط ماخ می‌شود. این نتایج برای حالتی است که از جزییات شکل هندسی سطح پرنده صرف‌نظر کرده باشیم. در بخش‌های جلوتر اندکی در مورد نقش شکل هندسی بحث می‌کنیم.



شکل ۴.۴ برای پیدا کردن مخروط ماخ، از دید ناظر همراه جسم، تمام راستاهای مجاز انتشار از رابطهی بدست می‌آید که در آن بردار سرعت داده شده و ثابتی است ولی بردار یکه‌ی $\hat{n}$ می‌تواند تمام راستاهای فضایی را اختیار کند. در این صورت انتهای بردار $\mathbf{W} + c\hat{n}$ وقتی که بیشترین زاویه را می‌سازد، مکان هندسی سطح ماخ را مشخص می‌کند. زاویه‌ی مخروط ماخ با رابطهی $\sin \alpha = 1/M$ داده می‌شود.

۶.۴ بال نازک

در قسمت‌های قبلی بصورت کیفی در مورد اثرهای ناشی از تراکم پذیر بودن شارش‌های با عدد ماخ بزرگتر از یک صحبت کردیم. با یک مدل بسیار ساده می‌توانیم ایده‌های خوبی از نقش شکل هندسی بدست آوریم. مطابق شکل ۵.۴، یک بال نازک ساکن و صلب در معرض جریان فرودی یکنواخت $\mathbf{w} = W\hat{x}$ را در نظر بگیرید. نیمه‌ی بالایی و پایینی این باله نازک، متقارن و با تابع $y = f(x)$ داده می‌شود. می‌خواهیم شارش تراکم ناپذیر در مجاورت این بال را بدست آوریم. واضح است که از دید ناظر آزمایشگاه که بال را ساکن می‌بیند میدان شارش به حالت پایا می‌رسد. معادلات اساسی توصیف کننده‌ی این سامانه را در حالت پایا حول حالت جریان یکنواخت بصورت زیر مختل می‌کنیم:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} + \delta\mathbf{u}, \quad p = p_0 + \delta p, \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho, \quad \delta p = c^2\delta\rho.$$

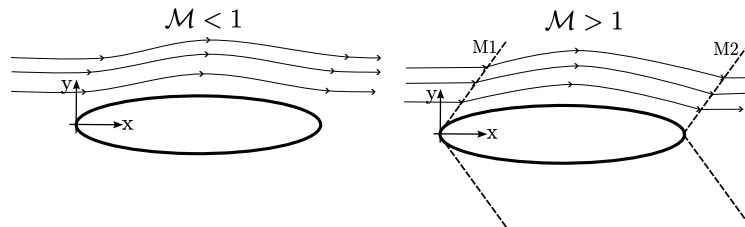
اختلال‌های معرفی شده را در معادلات اساسی قرار داده و فقط جملات مرتبه‌ی اول را نگاه می‌داریم:

$$\rho_0 W \partial_x \delta\mathbf{u} = -\nabla \delta p, \quad \rho_0 \nabla \cdot \delta\mathbf{u} = -W \partial_x \delta\rho, \quad (7.4)$$

اگر از طرفین معادله‌ی اول کرل بگیریم، می‌بینیم که میدان چرخش سرعت باید ثابت باشد: $\partial_x (\nabla \times \delta\mathbf{u}) = 0$. چون در فوای بسیار دور جریان بدون چرخش است، در نتیجه همه‌جا

میدان اختلاالی سرعت بدون چرخش می ماند. در این صورت میدان سرعت از پتانسیل اسکالر بصورت $\delta \mathbf{u} = \nabla \phi = (\partial_x \phi, \partial_y \phi)$ بدست می آید. با جایگذاری در معادلات می بینیم که پتانسیل در معادله ی زیر صدق می کند:

$$(-\Lambda^2 \partial_x^2 + \partial_y^2) \phi(x, y) = 0, \quad \Lambda^2 = \mathcal{M}^2 - 1. \quad (8.4)$$



شکل ۵.۴ خطوط میدان یک شارش تراکم پذیر در مجاورت یک جسم صلب (بال) برای دو حالت $\mathcal{M} < 1$ و $\mathcal{M} > 1$ رسم شده است. در حالت $\mathcal{M} < 1$ ، خطوط میدان همواری در فضا داریم که با یک تغییر مقیاس راستای طولی، به خطوط میدان شارش پایستار و تراکم ناپذیر شبیه می شود. برای حالت $\mathcal{M} > 1$ ، خطوط ماخ که با شیب $\sin \alpha = 1/\mathcal{M}$ رسم شده اند فضا را به دو ناحیه درونی و بیرونی تقسیم می کنند. اثر امواج صوتی ناشی از سطح بال فقط ناحیه ی درونی را تحت تاثیر قرار می دهند. خطوط میدان در مرز ناحیه ماخ شکستگی دارند. ناپیوستگی مولفه ی عمودی سرعت و فشار روی خطوط ماخ، نیروی کششی به بال وارد می کند.

پیش از بررسی پاسخ های این معادله به شرط مرزی سرعت نگاه کنیم. میدان مختل شده ی سرعت باید در شرط مرزی زیر صدق کند:

$$\delta \mathbf{u}(x \rightarrow \infty) = 0, \quad \mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{u}(x, y = f(x)) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{w}.$$

که در آن $\mathbf{m}$ بردار یکه ی عمود بر سطح بال است. اگر بال خیلی نازک باشد، شرط مرزی سرعت روی سطح بال را بصورت زیر ساده می کنیم. ابتدا توجه کنید که بردار عمود بر سطح بال را بصورت $\mathbf{m} \sim (-f'(x), 1)$ داریم. پس:

$$\delta u_y(x, y = f(x)) = W f'(x),$$

اگر میدان سرعت را بصورت $\delta u_y(x, f(x)) \sim \delta u_y(x, 0) + f(x) \delta u'_y(x, 0)$ بسط دهیم و

نتایج را مرتبه‌ی اول نگاه داریم، شرط مرزی روی سطح بال بصورت $\delta u_y(x, \circ) = Wf'(x)$ می‌شود. در نتیجه پتانسیل باید در شرط مرزی زیر صدق کند:

$$\partial_y \phi(x, \circ) = Wf'(x).$$

بازگردیم به معادله‌ی ۸.۴. این معادله‌ی برای دو حالت $\mathcal{M} < 1$ و $\mathcal{M} > 1$ رفتارهای کاملاً متفاوتی دارد.

برای حالت اول که عدد ماخ کوچک است $\mathcal{M} < 1$ ، تابع پتانسیل در یک معادله‌ی دیفرانسیل بیضوی صدق می‌کند. این معادله پاسخ‌های همواری در فضای اطراف بال دارد که نتیجه‌ی آن تغییر خطوط میدان در همسایگی بال است. یک مشاهده‌ی ساده توصیف مساله را ساده می‌کند. با یک تغییر مقیاس $x \rightarrow \bar{x} = x/\sqrt{1 - \mathcal{M}^2}$ ، به معادله‌ی لاپلاس می‌رسیم. توجه کنید که معادله‌ی لاپلاس توصیف کننده‌ی شارش پایستار تراکم ناپذیر اطراف جسم صلب است. پس برای عدد ماخ کوچک، تراکم‌پذیر بودن شارش بصورت یک تغییر مقیاس ساده در راستای طولی بال دیده می‌شود. مثلاً از آنجا که نیروی بالابر با طول بال متناسب است، نتیجه می‌گیریم که تراکم پذیر بودن شارش، نیروی بالابر هواپیما را به اندازه‌ی ضریب $1/\sqrt{1 - \mathcal{M}^2}$ افزایش می‌دهد. انتظار نداریم در این حالت، تراکم پذیری شارش باعث ایجاد نیروی کششی (نیرو در راستای طولی) شود.

اکنون حالت عدد ماخ بزرگ $\mathcal{M} > 1$ را در نظر بگیرید. در این حالت $\Lambda^2 > 0$ و پتانسیل در معادله‌ی هذلولوی صدق می‌کند. کلی‌ترین پاسخ‌های این معادله به صورت زیر است:

$$\phi(x, y) = g_+(x + \Lambda y) + g_-(x - \Lambda y).$$

دو منحنی $y(x) = \pm \Lambda^{-1}x$ در شکل ۵.۴ با خطوط M_1 و قرینه‌اش نشان داده شده‌اند. توجه کنید که شیب این دو خط با زاویه‌ی ماخ که قبلاً تعریف شده بود و بصورت $\sin(\alpha) = \pm \mathcal{M}^{-1}$ داده می‌شود. درواقع اگر جلوترین نقطه‌ی بال یعنی نقطه‌ی $x = y = 0$ و دیگر نقاط سطح بال را در نظر بگیریم، موج‌های صوتی ناشی از تراکم‌پذیری که از سطح بال تولید شده و با سرعت صوت منتشر می‌شوند، همواره پشت این دو خط M_1 و قرینه‌اش قرار می‌گیرند. در ادامه معلوم می‌شود که در هر لحظه، تنها ناحیه‌ی بین دو خط M_1 و M_2 می‌تواند اثرهای تراکم پذیری و

انتشار موج را تجربه کنند. خارج این ناحیه عملاً متأثر از اثرهای تراکم‌پذیری نیست و در آن نواحی میدان سرعت شار به برابر با سرعت یکنواخت فرودی است. پس پتانسیل خارج این ناحیه مقداری ثابت است و آن را بدون اینکه از کلیت مساله بکاهد برابر با صفر می‌گیریم. انتظار داریم پتانسیل ناحیه‌ی درون و ناحیه‌ی بیرون روی خطوط ماخ (همان خطوط M_1 و M_2 که در شکل مشخص شده‌اند) پیوسته باشد. مثلاً یک نقطه روی خط ماخ جلویی به مختصات $(x, x/\Lambda)$ را در نظر بگیرید:

$$\phi(x, x/\Lambda) = 0 \rightarrow g_-(0) + g_+(x) = 0,$$

نتیجه می‌شود که $g_+(x)$ باید مستقل از x باشد پس بدون مشکلی آن را می‌گیریم: $g_+(x) = 0$. داریم:

$$\phi(x, y) = g_-(x - \Lambda y), \quad g_-(0) = 0,$$

با اعمال شرط مرزی روی سطح بال $g'_-(x) = -\frac{W}{\Lambda} f'(x)$ انتگرالگیری از این رابطه آسان است و جواب نهایی بصورت زیر می‌شود:

$$\phi(x, y) = \begin{cases} -\frac{W}{\Lambda} f(x - \Lambda y), & 0 < x < L, y > 0, \\ -\frac{W}{\Lambda} f(x + \Lambda y), & 0 < x < L, y < 0. \end{cases} \quad (9.4)$$

روی یک نقطه روی خط M_2 با مختصات $(x, (L+x)/\Lambda)$ ، مقدار پتانسیل برابر می‌شود با $\phi = -(W/\Lambda)f(L) = 0$ (توجه کنید $f(L) = 0$). در نتیجه شرط پیوستگی روی خط ماخ سمت راست هم برقرار است.

اولین پیغام محاسبات بالا این است که خطوط میدان شارشی در ناحیه‌ی میانی به شکل طرح سطح بال است. در ناحیه‌ی خارجی خطوط میدان با خطوط میدان مختل نشده مربوط به جریان یکنواخت برابر است. دومین نتیجه‌ی مهم ناشی از تراکم‌پذیری شارش به ناپیوستگی مشتق خطوط میدان روی خطوط ماخ مربوط می‌شود. مثلاً در یک نقطه روی خط ماخ به مختصات $(x, x/\Lambda)$ ، مولفه‌ی عمودی میدان سرعت به میزان زیر ناپیوسته می‌شود:

$$\Delta u_y = \delta u_y(x, x/\Lambda) = W f'(0) = \frac{W}{\sqrt{M^2 - 1}}.$$

علاوه بر ناپیوستگی سرعت، فشار نیز در خطوط ماخ ناپیوسته رفتار می‌کند. در ناحیه‌ی خارجی

ماخ، میدان سرعت هیچ مولفه‌ی عمودی ندارد ولی درون ناحیه‌ی ماخ به سبب ناپیوستگی سرعت و وجود مولفه‌ی عمودی سرعت، شاری از انرژی امواج صوتی داریم که به بی‌نهایت می‌رود. انتظار داریم این انرژی که از طریق امواج صوتی به بی‌نهایت می‌رود بصورت یک نیروی کششی در حرکت پرنده‌ی مافوق صوت دیده شود. محاسبه‌ی دقیق‌تر وجود این نیرو را ثابت می‌کند. اثرهای تراکم‌پذیری در شارش پایستار مافوق صوت باعث نیروی کششی می‌شود که به صورت تقریبی با ضریب کششی زیر داده می‌شود:

$$C_D = \frac{2\rho_\infty W^2}{\sqrt{M^2 - 1}} \int_0^L f''(x) dx.$$

مرز ناحیه‌ی ماخ که در آن ناپیوستگی در کمیات شارشی دیده می‌شود مثالی از موج شوک است. محاسبات تقریبی که اینجا انجام شد وجود یک تکینگی در $M = 1$ را نشان می‌دهد. محاسبات کامل‌تر که با تقریب‌های بهتری انجام می‌شود رفتار هموار و غیر تکینه‌ای برای $M = 1$ نشان می‌دهد. محاسبات ساده‌ی اینجا، دست‌کم نشان دهنده‌ی افزایش قابل ملاحظه‌ای در نیروی کششی ناشی از تراکم‌پذیری در $M = 1$ است. در عمل هم ثابت شده است که نیروی کششی زیاد ولی متناهی لازم است تا دیوار صوتی شکسته شود.