اختلال تکینه

علی نجفی
najafi@iasbs.ac.ir

۳۰ دی ۱۴۰۱

۱ صورت سوال

در فیزیک اغلب با معادلات دیفرانسیلی سروکار داریم که در آنها پارامتر کوچکی وجود دارد و تمایل داریم این معادلات را با روش اختلال حل کنیم. در برخی معادلات، این پارامتر بسیار کوچک بصورت ضریب جمله‌ای که در آن بزرگترین مرتبه‌ی مشتق وجود دارد، ظاهر می‌شود. مثلا معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

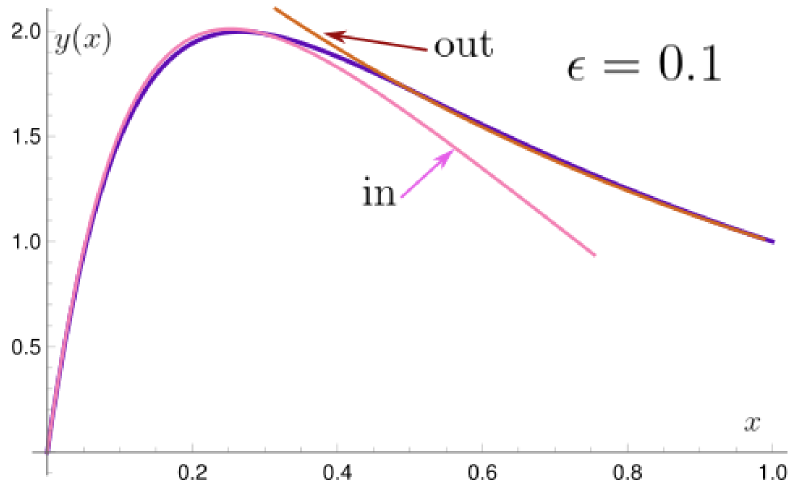
$$\epsilon f''(x) + f'(x) + f(x) = ۰, \quad f(۰) = ۰, \quad f(۱) = ۱,$$

که $x \in [۰, ۱]$ و $\epsilon \ll ۱$ پارامتر بسیار کوچکی است. موضوع این است که اینگونه معادلات دیفرانسیل را با روش‌های متداول اختلالی و با بسط برحسب توان‌های ϵ نمی‌توان حل کرد. مشاهده‌ی این مشکل کار ساده‌ای است. کافیست توجه کنید که با پیگیری روش‌های متداول، معادله‌ی مرتبه‌ی صفر اختلالی که با $\epsilon \to ۰$ بدست می‌آید، عملا معادله‌ی دیفرانسیلی می‌شود که مرتبه‌ی دیفرانسیلی آن یک مرتبه کم شده است. قاعدتا جواب این معادله‌ی مرتبه‌ی یک، نمی‌تواند با دو شرط مرزی سازگار باشد.

مشکل بالا در جاهای مختلفی از فیزیک پیش می‌آید. مثلا در مکانیک شاره‌ها حل معادله‌ی استوکس و مطالعه‌ی حرکت کره‌ی متحرک در حد $\mathrm{Re} \ll ۱$، در الکتروکینتیک محاسبه‌ی توزیع بار کنار سطوح باردار در حد طول دبای کوچک و حل معادله‌ی شرودینگر در حد نیمه کلاسیک $\hbar \to ۰$ به مشکل بالا برخورد می‌کنیم. برای کنار آمدن با تکینگی بوجود آمده روش‌های مختلفی وجود دارد. در این نوشته تنها به مسائلی که لایه‌ي مرزی باعث تکینگی می‌شود اشاره می‌کنیم.

۲ لایه‌ی مرزی

در بسیاری از موارد مشکل بالا به این واقعیت ارتباط دارد که جواب‌های معادله دیفرانسیل در حد $\epsilon \to ۰$ متناظر با وجود یک لایه‌ی مرزی نازک است که در آن لایه‌ی نازک، پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل، تابعی تند تغییر است. مثلا به جواب عددی معادله‌ی دیفرانسیل بالا در شکل ۲ نگاه کنید. تند تغییر بودن در لایه‌ی مرزی به وضوح قابل مشاهده است. در این صورت در فرآیند حد گیری $\epsilon \to ۰$، نمی‌توانیم از جمله‌ی $\epsilon f''(x)$ در آن لایه‌ی مرزی چشم‌پوشی کنیم. این موضوع که لایه‌ی مرزی در نزدیکی کدام مرز است، موضوعی قابل بررسی است. در مورد معادله‌ی بالا و شرایط مرزی مربوط به آن، می‌دانیم که چنین لایه‌ی مرزی نزدیک مرز $x = ۰$ قرار دارد. در این نوشته با فرض وجود این لایه‌ی مرزی، می‌خواهیم شکل جواب‌ها را بدست آوریم. ایده‌های اولیه‌ی بررسی این معادلات توسط پرنتل ارایه و توسط دیگران بیشتر توسعه داده شده است. روش این است که دو بسط مجانبی برای ناحیه‌ی درون لایه‌ی مرزی و ناحیه‌ی خارج آن در نظر بگیریم که هر کدام در شرط مرزی مربوط به آن ناحیه صدق کنند. در نهایت ضرایب آزاد این دو بسط بصورتی تعیین می‌شوند که دو بسط مجانبی بصورت مناسبی در مرز بین دو ناحیه با هم تلاقی داشته باشند.



شکل ۱: حل عددی معادله‌ی دیفرانسیل مورد بحث به همراه حل‌های مجانبی نشان داده شده است. به تغییرات سریع تابع در ناحیه‌ی مرزی $\circ < x < \epsilon$ توجه کنید.

۳ روش تلاقی بسط‌های مجانبی

با این فرض‌ها که لایه‌ی مرزی نزدیکی مرز $x = \circ$ است و ضخامت آن هم متناسب با ϵ است شروع می‌کنیم. واضح است که در ناحیه‌ی خارجی (خارج لایه‌ی مرزی)، روش متداول اختلال و بسط بر حسب ϵ قابل پیگیری است. در این صورت می‌توانیم یک بسط مجانبی بصورت $f_{\text{out}}(x,\epsilon) = \sum_n \epsilon^n f_n(x)$ برای جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل بدست آوریم که فقط مقید به شرط مرزی در نقطه‌ی $x = ۱$ است. برای ناحیه‌ی درونی، ابتدا تغییر متغیری بصورت $\zeta = x/\epsilon$ در نظر می‌گیریم و معادله‌ی دیفرانسیل را بر حسب این متغیر جدید بازنویسی می‌کنیم. توجه کنید که کار این تغییر متغیر این است که عرض ناحیه‌ی درونی را بزرگنمایی می‌کند. اکنون مجددا روش اختلال را بصورت بسط درونی $f_{\text{in}}(\zeta,\epsilon) = \sum_n \epsilon^n g_n(\zeta)$ در نظر می‌گیریم. جواب‌های درونی فقط باید شرط مرزی $x = \circ$ را برآورده سازند.

دو بسط مجانبی بدست آمده باید در ناحیه‌ی لبه‌ی لایه‌ی نازک با هم تلاقی داشته باشند. در واقع جواب‌های ناحیه‌ی خارجی در x های کوچک با جواب‌های ناحیه‌ی درونی در ζ های بزرگ باید تلاقی داشته باشند. برای اجرای عملی این تلاقی، متغیر جدیدی بصورت $\eta = x/\epsilon^\alpha = \zeta\epsilon^{۱-\alpha}$ تعریف می‌کنیم که در آن $\circ < \alpha < ۱$ است. واضح است که این متغیر به نوعی بین دو متغیر ناحیه‌ی خارجی، x، و متغیر ناحیه‌ی درونی، ζ، است. اکنون هر دو جواب درونی و خارجی را بر حسب این متغیر جدید باز نویسی کرده و بر حسب توان‌های ϵ مرتب می‌کنیم. با مقایسه‌ی این دو جواب در حد $\epsilon \to \circ$، یعنی مقایسه‌ی ضرایب توان‌های مختلف ϵ می‌توانیم تلاقی را برقرار کرده و ضرایب نامشخص را بدست آوریم. در اجرای این روش لازم است که یک عدد تخمینی برای α مثلا $\frac{۱}{۲}$ را در نظر داشته باشیم.

ابتدا ناحیه‌ی خارجی را در نظر بگیرید. $f_\circ$ و $f_۱$ در معادلات $f'_\circ + f_\circ = \circ$ و $f'_۱ + f_۱ = -f''_\circ$ صدق می‌کنند. با اعمال شرایط مرزی $f_\circ(۱) = ۱$ و $f_۱(۱) = \circ$ جواب‌های زیر بدست می‌آیند:

$$f_\circ(x) = e^{۱-x}, \quad f_۱(x) = (۱-x)e^{۱-x}.$$

برای سهولت تنها دو جمله‌ی اول را در نظر گرفته‌ایم.

برای ناحیه‌ی درونی، با تغییر متغیر به معادله‌ی $f''(\zeta) + f'(\zeta) + \epsilon f(\zeta) = \circ$ می‌رسیم. با اعمال بسط اختلالی دو تابع $g_۱(\zeta)$ و $g_۲(\zeta)$ در معادلات $g''_\circ + g'_\circ = \circ$ و $g''_۱ + g'_۱ = -g_\circ$ با شرایط مرزی $g_\circ(\circ) = \circ$ و $g_۱(\circ) = \circ$ صدق می‌کنند. جواب‌های مربوطه به شکل زیر می‌شوند:

$$g_\circ = A(۱-e^{-\zeta}), \qquad g_۱ = (A(۱-\zeta)+B) - (A(۱+\zeta)+B)e^{-\zeta},$$

با استفاده از متغیر η جواب‌های ناحیه‌ی خارجی را بصورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} e^{1-\eta\epsilon^\alpha} + \epsilon(1-\eta\epsilon^\alpha)e^{1-\eta\epsilon^\alpha} + \cdots = \quad & e - \eta e\epsilon^\alpha + e\frac{\eta^2}{2}\epsilon^{2\alpha} + \cdots \\ & + \epsilon e - e\eta\epsilon^{\alpha+1} + e\frac{\eta^2}{2}\epsilon^{2\alpha+1} + \cdots \\ & + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{1}$$

جواب‌های ناحیه‌ی درونی را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A + \epsilon\Big(A(1-\eta\epsilon^{\alpha-1}) + B\Big) + E + \cdots = \quad & A + \\ & + \epsilon(A+B) - \eta A\epsilon^\alpha + \cdots \\ & + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{2}$$

که در آن $E \sim e^{-\eta\epsilon^{\alpha-1}}$ است و با توجه به مقدار نوعی α دیده می‌شود که برای ϵ کوچک، $E \sim 0$ است. از مقایسه‌ی ۱ و ۲، ضرایب نا مشخص به صورت $A = e$ و $B = 0$ بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} f_{\text{out}} = e^{1-x} + \epsilon(1-x)e^{1-x} + \cdots \\ f_{\text{in}} = e(1 - e^{-\frac{x}{\epsilon}}) + e\epsilon\left((1-\frac{x}{\epsilon}) - (1+\frac{x}{\epsilon})e^{-\frac{x}{\epsilon}}\right) + \cdots \end{cases}$$

در شکل حل عددی معادله‌ی دیفرانسیل به همراه جواب‌های مجانبی بدست آمده با روش تلاقی رسم شده‌اند. تطابق خوب جواب دقیق با جواب‌های مجانبی به خوبی دیده می‌شود.

در نهایت اشاره می‌شود که روش‌های ریاضی مطمئنی برای مشخص کردن مکان و ضخامت لایه‌ی مرزی، توسعه داده شده است. در مسائل فیزیکی، عموما با شهود فیزیکی می‌توانیم از پیش مکان لایه‌ی مرزی را بدانیم.

مراجع

[1] E. J. Hinch, *Perturbation Methods*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).