درس دوم: روش نیشتروم

۱۷ اردیبهشت ۱۴۰۲

در ابتدا کتابخانه‌های زیر را برای کدنویسی در جولیا فراخوانی کنید:

```
using Plots, FastGaussQuadrature, LinearAlgebra
```

روش نیشتروم[۱] یکی از قدیمی‌ترین روش‌های حل عددی معادلات انتگرال فردهلم است. البته ایدهٔ آن شبیه چیزی هست که در حل عددی معادلات انتگرال ولترا به روش انتگرال‌گیری عددی دیدیم و برمبنای گسسته‌سازی انتگرال موجود در معادله انتگرال است. برای گسسته‌سازی انتگرال از روش‌های نیوتن_کاتس و یا گاووس استفاده می‌کنیم. در ادامه کد مربوط به روش‌های ذوزنقه‌ای مرکب را داریم:

```
function trapezoidal_NI(g::Function, n, a, b)
    h = (b-a)/n
    x = [a+j*h for j in 0:n]
    w = zeros(n+1)
    w[1] = w[n+1]= 0.5*h
    for i in 2:n
        w[i] = h
    end
        I = dot(g.(x), w)
    return I
end
```

نتیجه انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای مرکب برای انتگرال $x^۳$ در بازهٔ $[۰, ۱]$ را مشاهده می‌کنیم.

```
trapezoidal_NI(x->x^3, 16, 0, 1)-1/4
0.0009765625
```

[۱] Nyström

کد مربوط به انتگرال‌گیری گاوس_لژاندر را برای بازهٔ دلخواه و البته متناهی $[a, b]$ در ادامه مشاهده می‌کنید:

```
function gauss_legendre(f::Function, a, b, n)

x,w =  gausslegendre(n)
w = 0.5*(b-a)*w # new weights after changing of variable
s = 0
for i in 1:n
s += w[i]*f(0.5*(b-a)*x[i]+ 0.5*(b+a))
end
return s
end
```

به عنوان مثال داریم:

```
gauss(x->x^3,0, 1, 6)-1/4
-5.551115123125783e-17
```

حالا معادله انتگرال فردهلم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x) = g(x) + \int_a^b k(x, y)u(y)\mathrm{d}y, \quad x \in [a, b], \tag{۱}$$

روش نیشتروم به صورت زیر عمل می‌کند: ابتدا باید یک روش انتگرال‌گیری انتخاب کنید. بعد از گسسته‌سازی انتگرال به تقریب زیر می‌رسیم:

$$u(x) \approx g(x) + \sum_{j=۰}^{n} w_j k(x, x_j)u(x_j),$$

حال تقریب بدست آمده را در گره‌های انتگرال‌گیری عددی هم‌مکانی[۲] می‌کنیم:

$$u(x_i) = g(x_i) + \sum_{j=۰}^{n} w_j k(x_i, x_j)u(x_j), \quad i \in ۰ : n, \tag{۲}$$

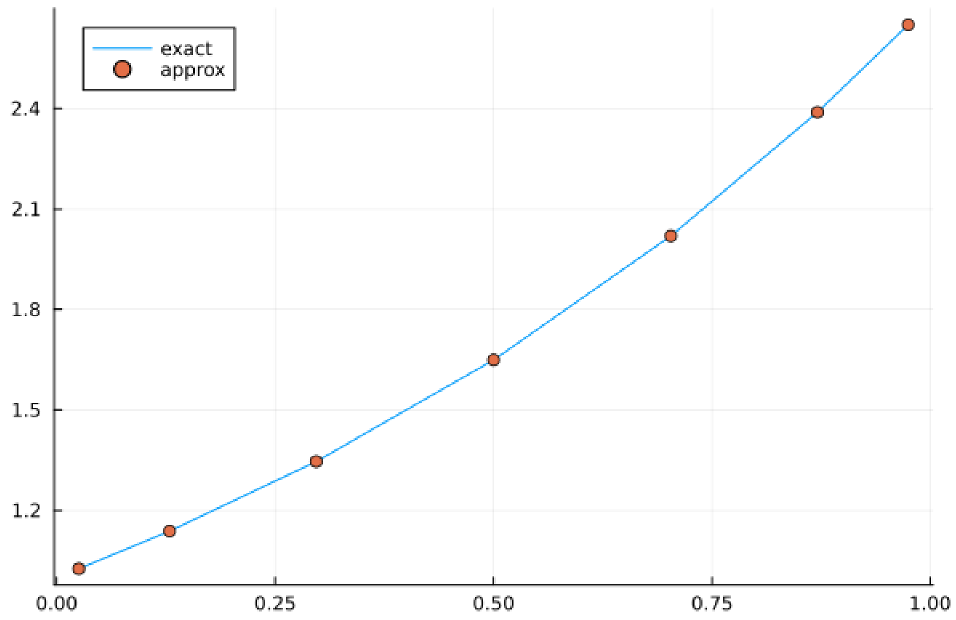
حال یک دستگاه خطی با n معادله و n مجهول داریم. اگر معادله انتگرال (۱) غیرخطی بود، آنگاه دستگاه مذکور غیرخطی می‌شد.

مثال ۱. ([۱]) معادله انتگرال

$$\lambda u(x) - \int_۰^۱ \exp(xy)u(y)\mathrm{d}y = g(x), \tag{۳}$$

را در نظر بگیرید. در معادلهٔ مذکور به ازای $\lambda = ۲$، تابع سمت راست را چنان تعیین کنید که تابع $u(x) = \exp(x)$ جواب دقیق معادله باشد. حالا کد روش نیشتروم را بیان می‌کنیم:

---
[۲] collocate




```
function nystrom_method(n, a, b)

        x,w =  gausslegendre(n)
        x = 0.5*(b-a)*x .+ 0.5*(b+a)

    rh = [right_hand(i) for i in x]
    A = zeros(n,n) # coifficient matrix

    for i in 1:n
    for j in 1:n
    A[i,j] = 0.5*(b-a)*w[j]*kernel(x[i], x[j]) #the matrixAis updated
    end
    end
    B = 2*I-A # final coefficient matrix
    err = B\rh .- exact.(x)
    err_max = maximum(B\rh .- exact.(x))

    p1 = plot(x, exact.(x), label = "exact")
    p2 = scatter!(x, B\rh, label = "approx" )
    return   err_max, @show p2
end
```

خروجی این کد را برای این مثال در نمودار زیر مشاهده می‌کنیم: اگر این کد را برای $n = ۳$ اجرا کنید نتایج گزارش شده در معادله (۹.۴.۱۲) در کتاب [۱] را مشاهده خواهید کرد.

تمرین ۱. ([۲]) معادله انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$\lambda u(x) - \int_0^1 \cos(\pi x y) u(y) \mathrm{d}y = g(x), \qquad (۴)$$

تابع سمت راست را چنان بدست آورید که به ازای $\lambda = ۱$، تابع $u(x) = ۱$ جواب دقیق باشد. نتایج خود را گزارش شده در کتاب در جداول صفحه ۷۳ مقایسه کنید.

تمرین ۲. هسته معادله انتگرال را مشابه مثال قبل در نظر بگیرد، اما تابع سمت راست را چنان تعریف کنید که تابع $u(x)$ جواب معادله انتگرال فردهلم خطی (۱) باشد. روش ذوزنقه‌ای برای تقریب انتگرال در روش نیشتروم بکار ببرید و نتایج بدست آمده را با نتایج صفحهٔ ۷۴ کتاب مقایسه کنید.

مراجع

References

[1] Atkinson, Kendall and Han, Weimin. *Theoretical numerical analysis*, volume 39. Springer, 2005.

[2] Hackbusch, Wolfgang and Hackbusch, Wolfgang. *The integral equation method*. Springer, 1995.