# درس چهارم: روش گالرکین

## ۲۶ اردیبهشت ۱۴۰۲

برای حل معادله انتگرال فردهلم

$$u(x) = g(x) + \int_a^b k(x,y)u(y)\mathrm{d}y, \qquad (۱)$$

به روش گالرکین به صورت زیر عمل می‌کنیم. ابتدا یک مجموعه از توابع با بعد متناهی را انتخاب می‌کنیم (این مجموعه از توابع، مستقل خطی است). یک انتخاب ساده عبارت است از

$$X_n = \mathrm{span}\{۱, x, \dots, x^{n-۱}\}.$$

می‌توان به طور کلی $X_n$ را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$X_n = \mathrm{span}\{\phi_۱(x), \phi_۲(x), \dots, \phi_n(x)\}.$$

هر عضو $X_n$ به صورت ترکیب خطی از $\phi_i(x)$ها است. حال فرض کنید تقریب جواب معادلهٔ (۱) عضوی از $X_n$ در این صورت

$$u_n(x) = \sum_{i=۱}^{n} c_i \phi_i(x).$$

پس با جایگذاری جواب تقریب در معادلهٔ انتگرال خواهیم داشت:

$$\sum_{i=۱}^{n} c_i \{\phi_i(x) - \int_a^b k(x,y)\phi_i(y)\mathrm{d}y\} \approx g(x). \qquad (۲)$$

با توجه به رابطهٔ بالا تابع باقیمانده[1] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$R_n(x) = \sum_{i=۱}^{n} c_i \{\phi_i(x) - \int_a^b k(x,y)\phi_i(y)\mathrm{d}y\} - g(x). \qquad (۳)$$

برای بدست آوردن ضرایب مجهول نیاز به $n$ معادله داریم. برای ساختن این معادلات به روش گالرکین، ضرب داخلی تابع باقیمانده را با توابع پایه‌ای برابر صفر قرار می‌دهیم. به عبارت دیگر باقیمانده را به $\phi_i$ها عمود می‌کنیم و به دستگاه معادلات خطی زیر می‌رسیم:

[1] Residual

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\Big\{\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)\mathrm{d}x - \int_a^b\int_a^b k(x,y)\phi_i(y)\phi_j(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\Big\} = \int_a^b g(x)\phi_j(x)\mathrm{d}x, \quad j\in 1:n. \tag{۴}$$

معادله (۴) را معادلهٔ گالرکین می‌نامیم. با حل این معادله، ضرایب مجهول معلوم خواهد شد و در نتیجه جواب تقریب بدست می‌آید. برای تقریب انتگرال‌های موجود در دستگاه (۴) از روش‌های انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌کنیم. برای مثال کد انتگرال‌گیری دوگانه عددی را به روش گاوس_لژاندر در ادامه مشاهده می‌کنید:

```
function gausss2d(f::Function, a, b, c, d, n, m)

x1,w1 = gausslegendre(n)
x2,w2 = gausslegendre(m)

w1 = 0.5*(b-a)*w1 # new weights after changing of variable
w2 = 0.5*(d-c)*w2

s = 0
for i in 1:n for j in 1:m
s += w1[i]*w2[j]*f(0.5*(b-a)*x1[i]+0.5*(b+a), 0.5*(d-c)*x2[j]+0.5*(d+c))
end end

return s
end
```

**نکته ۱.** پکیج‌های لازم را فراخوانی کنید!

**مثال ۱.** ([۱]) معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x) = x + \int_{-1}^{1} xyu(y)\mathrm{d}y, \tag{۵}$$

جواب دقیق این معادله برابر با $u(x) = 3x$ است. برای بدست آوردن جواب تقریب معادله به روش گالرکین کدهای زیر را استفاده می‌کنیم:

```
function psi(x,i)
return x^(i-1)
end

right_hand(x) = x
kernel(x,y)= x*y
exact(x) = 3*x
```

```
# to compute the right-hand side vector
function RHV(n)
```

```
b = zeros(n)
for i in 1:n
f1(s) = right_hand(s)*psi(s,i)
q1 = gausss(s->f1(s), -1, 1, 5)
b[i] = q1[1]
end
return b
end
```

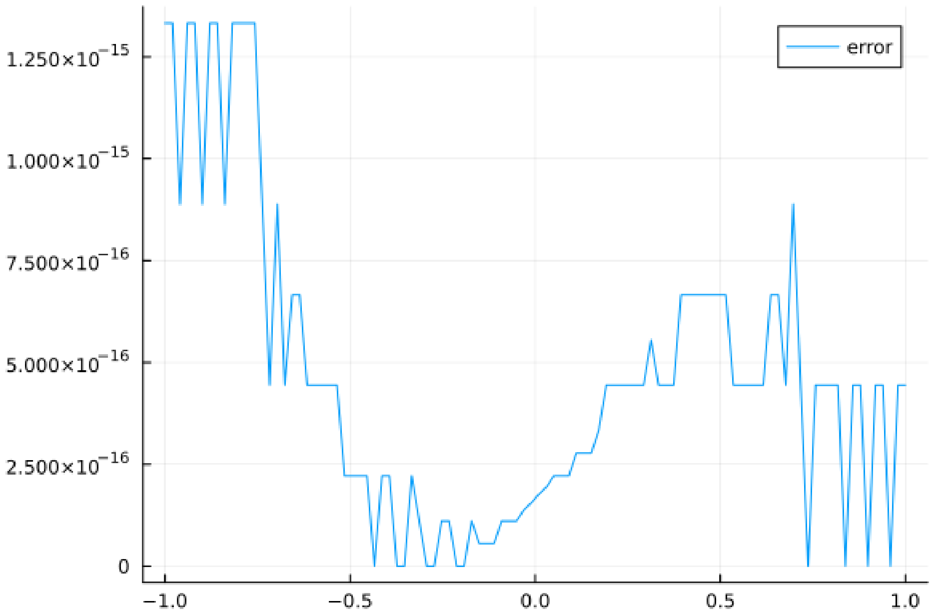
```
function coefficientmatrixG11(n)
A1 = zeros(n,n)
for i in 1:n for j in 1:n
f1(s) = psi(s,i)*psi(s,j)
q1= gausss(s->f1(s), -1, 1, 5)
A1[i,j] = q1[1]
end end
return A1
end
```

```
function coefficientmatrixG21(n)

A2 = zeros(n, n)
for i in 1:n for j in 1:n
A2[i,j] = gausss2d((t,s)->kernel(t,s)*psi(s,i)*psi(t,j), -1, 1, -1, 1, 5, 5)
end end
return A2
end
```

```
function coefficientmatrix(n)
    return coefficientmatrixG11(n)-coefficientmatrixG21(n)
end

function Galerkin(n)
    A = coefficientmatrix(n)
    b = RHV(n)
    c = A\b
    return c, cond(A)
end

n = 3
z = Galerkin(n)[1]

3-element Vector{Float64}:
1.6653345369377358e-16
3.000000000000001
-4.163336342344395e-16

function app(x)
sum = 0
for i in 1:length(z)
sum += z[i]*psi(x,i)
end
```

```
    return sum
end
```

خطای مطلق را در نمودار زیر مشاهده می‌کنیم:




**تمرین ۱.** در مثال قبل پایه‌ها را عوض کنید و بجای آن از اسپلاین‌های خطی استفاده و نتیجه را گزارش کنید.

**تمرین ۲.** مثالی را که با روش هم‌مکانی حل شد را با استفاده از روش گالرکین حل کنید و نتیجه را گزارش کنید.

## References


[1] Abdul Jerri. *Introduction to integral equations with applications*. John Wiley & Sons, 1999.