

نسبیت: خاص و عام

یوسف ثبوتی

دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

Relativity - Special and General

By:

Yousef Sobouti

Institute for Advanced Studies in Basic Sciences - Zanjan

2017

فهرست مطالب

چرا این کتاب؟

چ

۱	نظری بر مباحث فیزیک در سال‌های پایانی سده ۱۹ و آغازین سده ۲۰	۱
۱	۱.۱ پیش‌گفتار	۱
۴	۲.۱ مکانیک کلاسیک و ناوردایی تحت تبدیل‌های گالیه	۴
۷	۲ الکترومغناطیس - خاستگاه نسبیت خاص	۷
۷	۱.۲ نگاهی گذرا به معادله‌های مکسول	۷
۱۰	۲.۲ پتانسیل‌های برداری و نرده‌ای - آزادی در گزیدن پیمانه	۱۰
۱۲	۱.۲.۲ موج الکترومغناطیسی	۱۲
۱۳	۳.۲ تکانه و انرژی میدان الکترومغناطیسی	۱۳
۱۳	۱.۳.۲ تکانه میدان الکترومغناطیسی	۱۳
۱۵	۲.۳.۲ انرژی میدان الکترومغناطیسی	۱۵
۱۹	۳ تبدیل‌های لورنتس - سخن سینماتیک	۱۹
۲۰	۱.۳ سرعت نور ثابت جهانی - تبدیل‌های لورنتس	۲۰
۲۵	۲.۳ سینماتیک تبدیل‌های لورنتس	۲۵
۲۷	۳.۳ فضا-زمان چاربعده (فضای مینکوسکی)	۲۷
۲۹	۴.۳ تبدیل‌های پوانکاره و لورنتس - کنکاش بیشتر	۲۹
۳۳	۵.۳ تعریف نرده، بردار، و تانسور - قاعده تبدیل آن‌ها	۳۳

۳۵	مولدهای تبدیل‌های لورنتس	۱.۵.۳
۳۸	حرکت تقدیمی توماس	۲.۵.۳
۴۳	تبدیل‌های لورنتس - سخن دینامیک	۴
۴۳	هم‌وردایی قانون‌های فیزیک	۱.۴
۴۴	هم‌وردایی آشکار الکترومغناطیس	۱.۱.۴
۴۷	هم‌وردایی آشکار مکانیک	۲.۱.۴
۵۲	چند کاربرد تبدیل‌های لورنتس	۲.۴
۵۲	جابه‌جایی دیپلر و ابیراهی نور ستارگان	۱.۲.۴
۵۴	تبدیل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی	۲.۲.۴
۵۵	دوباره الکترومغناطیس - راه دیگر، نگاه دیگر	۳.۴
۵۷	گفتار سینماتیک	۱.۳.۴
۵۸	گفتار دینامیک	۲.۳.۴
۶۳	نسبیت عام - قانون حرکت و گرانش انیشتن	۵
۶۶	اصل هم‌ارزی - مقدمه	۱.۵
۶۹	بیان رسمی اصل هم‌ارزی - بازتعریف چارچوب لخت	۱.۱.۵
۷۰	بخشی از اصل‌های موضوعه نسبیت عام - گفتار سینماتیک	۲.۵
	تبدیل از چارچوب لخت موضعی به چارچوب مختصات عام	۱.۲.۵
۷۱	و وارون آن	
۷۲	قانون حرکت در نسبیت عام - معادله ژئودزیک	۲.۲.۵
۷۳	هم‌وستارها بر حسب تانسور متریک	۳.۲.۵
۷۴	چند کاربرد از آنچه تا این جا گفته شده است	۴.۲.۵
۷۶	بردارها و تانسورها در فضا-زمان خمیده	۳.۵
۷۷	چند تعریف	۱.۳.۵
۷۸	چند قضیه و اثبات	۲.۳.۵
۷۹	مشتق معمولی و مشتق هم‌وردا	۳.۳.۵
۸۲	مشتق هم‌وردا در روی منحنی	۴.۳.۵

۸۵	۶	فضاهای خمیده
۸۵	۱.۶	پیش‌گفتار
۹۰	۲.۶	تانسور خمشِ ریمان - کریستوفل
۹۱	۱.۲.۶	تقارن‌های تانسور خمش
۹۲	۲.۲.۶	تنجش‌های تانسور خمش
۹۳	۳.۲.۶	درایه‌های مستقل تانسورهای ریمان - کریستوفل و ریچی
۹۵	۷	داشته‌های کیهان : ماده و تابش - اصل‌های پایستگی
۹۶	۱.۷	پایستگی شمار ذره‌ها
۹۶	۲.۷	پایستگی انرژی-تکانه
۹۸	۱.۲.۷	حد کلاسیک پایستگی انرژی-تکانه
۹۹	۲.۲.۷	معادله حرکت شارک کامل
۱۰۱	۸	گرانش انیشتن
۱۰۲	۱.۸	معادله میدان انیشتن
۱۰۳	۱.۱.۸	ثابت کیهان شناختی، Λ
۱۰۴	۲.۱.۸	حد ضعیف گرانش نسبیتی - گرانش نیوتنی
۱۰۵	۲.۸	چند جواب تحلیلی معادله میدان
۱۰۵	۱.۲.۸	فضا-زمان با تقارن کروی
۱۱۲	۳.۸	آزمون‌های نسبیت عام
۱۱۲	۱.۳.۸	تقدیم حضيض تیر
۱۱۷	۲.۳.۸	خمش نور در میدان گرانش
۱۲۰	۳.۳.۸	درنگ در پژواک رادار
۱۲۲	۴.۸	انرژی-تکانه فضا-زمان خمیده
۱۲۳	۵.۸	موج گرانشی
۱۲۴	۱.۵.۸	بررسی ریاضی موج گرانشی
۱۲۶	۲.۵.۸	موج تخت
۱۲۹	۳.۵.۸	تولید موج گرانشی

۹ کیهان - آنچه از رصدهای نجومی می‌دانیم ۱۳۷

- ۱.۹ ستارگان ۱۳۹
- ۱.۱.۹ دیاگرام هرتسپرانگ - راسل ۱۴۰
- ۲.۹ آرایش اجرام کیهانی - رده‌بندی کهکشان‌ها ۱۴۲
- ۱.۲.۹ کهکشان راه شیری ۱۴۳
- ۲.۲.۹ همسایگان راه شیری ۱۴۶
- ۳.۲.۹ خوشه‌ها و ابرخوشه‌های کهکشان‌ها ۱۴۸
- ۴.۲.۹ تهی‌جاها، رشته‌ها، گره‌ها و دیواره‌ها - ساختار اسفنجی کیهان ۱۴۸
- ۳.۹ ماده تاریک - قاعده تالی-فیشر ۱۴۹
- ۴.۹ دوری و دوری‌سنجی در اندازه‌های کیهانی ۱۵۲
- ۱.۴.۹ اختلاف منظر ۱۵۲
- ۲.۴.۹ قدر ظاهری و قدر مطلق - مدول فاصله ۱۵۴
- ۳.۴.۹ متغیرهای قیفاووسی و آرآر لایری ۱۵۵
- ۴.۴.۹ نواختران و ابرنواختران ۱۵۶
- ۵.۴.۹ انبساط کیهانی ۱۵۶
- ۵.۹ تابش پس‌زمینه کیهانی ۱۵۸

۱۰ کیهانشناسی- مدل استاندارد ۱۵۹

- ۱.۱۰ اصل کیهانشناختی ۱۵۹
- ۲.۱۰ متریک فریدمان-رابرتسون-واکر ۱۶۰
- ۱.۲.۱۰ هندسه فضای سه‌بعدی فریدمان-رابرتسون-واکر ۱۶۱
- ۲.۲.۱۰ چند ویژگی سینماتیک کیهان FRW ۱۶۴
- ۳.۲.۱۰ دوری‌سنجی در کیهان فریدمان-رابرتسون-واکر ۱۶۶
- ۳.۱۰ دینامیک کیهان فریدمان-رابرتسون-واکر ۱۶۷
- ۱.۳.۱۰ چگالی‌های بی‌بعد ۱۷۰
- ۲.۳.۱۰ چند حالت حدی ۱۷۳
- ۳.۳.۱۰ مدل‌های فریدمان ۱۷۴
- ۴.۳.۱۰ افق ذره ۱۷۶

۵.۳.۱° افق رخداد ۱۷۷

چرا این کتاب؟

در ایران ما برنامه آموزش دانشگاهی فیزیک کم و بیش به روز است. مانند همه جای دنیا، از مجموعه‌ای از درس‌های اصلی، مجموعه‌ای از درس‌ها در گرایش‌های گوناگون، و چند درس ریاضی و ریاضی-فیزیک تشکیل می‌شود. فرض بر این است که دانش‌آموخته و پژوهشگر فیزیک، نخست باید مبانی و اصول موضوعه فیزیک را خوب یاد بگیرد و سپس به آموختن درس‌های تخصصی مورد نظرش بپردازد. درس‌های اصلی فیزیک در عرف دنیای امروز که انتظار می‌رود هر فیزیک‌دان، صرف نظر از تخصص گرایشی‌اش، بلد باشد عبارت‌اند از مکانیک‌های کلاسیک و کوانتومی و نسبیتی، ترمودینامیک و مکانیک آماری، الکترومغناطیس کلاسیک و احیاناً کوانتومی.

مطالب درسی برای دانشجوی ایرانی پر و پیمان نوشته شده است. منابع درسی و پژوهشی هم، به خصوص در مقاطع تحصیلی کارشناسی ارشد و دکتری به زبان‌های بیگانه و معمولاً زبان انگلیسی است. اگر بتوان برنامه‌های روی کاغذ آمده و تصویب شده را اجرا کرد بسیار مطلوب و مغتنم خواهد بود. ولی تجربه بیش از نیم قرن تدریس دانشگاهی من چیز دیگری می‌گوید. نخست این که، دانشجوی ایرانی زبان خارجی نمی‌داند و استادش هم در بسیاری از موارد زبان‌دان‌تر از شاگردش نیست. دوم، عده زیادی از دانشجویان و استادان ایرانی، به هر بهانه موجه و ناموجه، فکر و ذکر شبانه‌روزی‌شان یاد گرفتن و یاد دادن نیست. در نتیجه در بیشتر مراکز آموزش عالی ما، حتی نیمی از برنامه‌های تکلیفی هم در کلاس درس و بیرون از آن به بحث گذاشته نمی‌شود.

همه زیرشاخه‌های فیزیک مبتنی بر اصول موضوعه‌اند، دست‌کم من چنین می‌پندارم. دانشجوی فیزیک تا با این اصول انس نگیرد، به توانایی‌ها و زیبایی‌های فیزیک راه نخواهد برد؛ به وسعت و مجال اندیشه‌ورزی که در آن نهفته است دست نخواهد یافت و در کاربردهای

نظری و عملی فیزیک در خواهد ماند. من چاره را در این دیده‌ام و به همکاران خوب و سخت‌کوشم در دانشگاه‌ها هم توصیه می‌کنم، نوشته‌هایی مختص زیرشاخه‌های اصلی فیزیک تدوین کنیم. در این نوشته‌ها بر مبانی نظری و جهان‌شمولی اصول موضوعه فیزیک تاکید کنیم. پرداختن به شاخه‌های فرعی را به مجالی دیگر واگذاریم. به این ترتیب شاید بتوانیم تصویر نسبتاً جامعی از نظام فکری و منطقی که فیزیک بر آن‌ها استوار است برای مخاطب ایرانی ترسیم کنیم. در این کتاب کم حجم که نام آن را ”نسبیت: خاص و عام“ گذاشته‌ام، باخواننده تازه‌کار، ولی کنجکاو، از چند چیز سخن می‌گویم:

- از مبانی و اصول موضوعه الکترومغناطیس و ثابت بودن سرعت نور،
 - از برابری ناظران لخت و ثابت بودن سرعت نور برای همه آن‌ها، و مآلاً پیدایش نسبیت خاص
 - از پیدایش مکانیک نسبیتی، صرفاً با پذیرش منطق زیبایی پسند انیشتن که نمی‌شود بخشی از فیزیک از تبدیل‌های لورنتس پیروی کند (الکترومغناطیس) و بخش دیگر از تبدیل‌های گالیله (مکانیک نیوتنی). همه قانون‌های فیزیک باید از یک تبدیل پیروی کنند، گالیله یا لورنتس.
 - از تعمیم اصل برابری ناظرهای لخت، به این معنا که در هیچ جای عالم ناظر ممتاز وجود ندارد. همه ناظرها، چه لخت و چه نالخت، با هم برابrand. قانون‌های فیزیک در همه چارچوب‌های لخت و نالخت باید به یک صورت نوشته شوند (باز زیبایی پسندی انیشتن)،
 - از پیدایش نسبیت عام با پذیرش نبود ناظر ممتاز، و این که نمی‌شود فضا-زمان تحول زمانی-مکانی انرژی-تکانه را رقم بزند و خود از انرژی-تکانه اثر نپذیرد. این دو باید با هم اندرکنش داشته باشند (باز تراویده ذهن نقاد انیشتن)،
 - از شواهد مشاهداتی تایید کننده درستی نسبیت عام،
 - بالاخره از بعضی یافته‌های اخترفیزیکی و کیهان‌شناسی بر پایه نسبیت عام.
- در سراسر کتاب بیشتر به شرح و بسط اصول پرداخته‌ام. از گفتن کاربردها اگر می‌توانسته‌ام

پرهیز کرده‌ام. کوشیده‌ام اندازه کتاب برای تدریس در دوره‌های کارشناسی ارشد و بالاتر، برای دانشجوی ایرانی در یک سال تحصیلی، امکان‌پذیر باشد.

امید دارم این آخرین هدیه من به جامعه بزرگ فیزیک ایران، در روزهایی که آفتاب عمر دراز معلمی‌ام را بر لب بام می‌بینم، مقبول نظر کسانی بیفتد که عمری با آن‌ها هم‌سخن بوده‌ام، اعم از استاد و دانشجو. امید دارم از گفتن و نوشتن نقد و نظر دریغ نکنند. هنوز مجال شنیدن و یاد گرفتن دارم.

یوسف ثبوتی - زنجان، بهار ۱۳۹۶

فصل ۱

نظری بر مباحث فیزیک در سال‌های پایانی سده ۱۹ و آغازین سده ۲۰

۱.۱ پیش‌گفتار

فیزیک تا پایان سده ۱۹ از سه بخش عمده شامل مکانیک، الکترومغناطیس، و ترمودینامیک تشکیل می‌شد. مکانیک کلاسیک با اعلام قانون‌های حرکت و گرانش نیوتن (پرنسیپیا ۱۶۸۷) صورت رسمی پیدا کرده بود. زمینه‌های پیدایش الکترومغناطیس را کولن (۱۷۸۴)، آمپر (۱۸۲۶)، فاراده (۱۸۳۱) و بسیاری دیگر فراهم کرده بودند. صورت‌بندی پایانی آن در ۱۸۶۵ توسط ماکسول انجام گرفت. ترمودینامیک و مکانیک آماری در طول سده ۱۹ صورت‌بندی نهایی خود را پیدا کرده بودند. نور هندسی و نور موجی نیز بخشی از فیزیک سده ۱۹ و پیش از آن را تشکیل می‌دادند. اتم و مولکول شناخته نبودند و بالطبع از مکانیک کوانتومی، ذرات بنیادی، سینماتیک و دینامیک در سرعت‌های زیاد، نظریه میدان‌ها، نسبیت خاص و عام سخنی در میان نبود.

تا آغاز سده ۲۰ هر یک از بخش‌های یادشده، کم و بیش جدا از هم، صورت‌بندی شده

و رسمیت یافته بودند. بحث‌های جدی نیز برای بررسی مشترکات آن‌ها از نظر مفهومی و فرمول‌بندی ریاضی انجام می‌گرفت. با وجود این، هر یک از آن‌ها در توجیه و توصیف کمی مشاهدات آزمایشگاهی و روزانه آن سال‌ها چنان موفق بودند و چنان پیش‌بینی‌های دقیقی داشتند، که باور به درستی آن‌ها صورت عقیده پیدا کرده بود. از بعضی دانشمندان سده ۱۹ نقل شده که قانون‌های حاکم بر طبیعت کم و بیش شناخته شده‌اند. تنها بعضی مسائل فرعی مانده است که به مرور برای آن‌ها نیز جواب پیدا خواهد شد.

ولی چنین نبود. سده ۲۰ آستان انقلابی در فهم و درک انسان از طبیعت بود که تا آن روز هیچ ژرف‌اندیشی نتوانسته بود تصور کند. اولین خلأ مفهومی در الکترومغناطیس ظاهر شد. معادله‌های مکسول موج الکترومغناطیسی را پیش‌بینی می‌کردند و هرتز (۱۸۸۷) نمونه آزمایشگاهی آن را تولید و نشر کرده بود. سرعت امواج الکترومغناطیسی برابر با سرعت نور در می‌آمد. همین امر مکسول را بر آن داشت که نور را موج الکترومغناطیسی اعلام کند و مبحث نور را که تا آن روز راه جدا می‌رفت به زیر چتر الکترومغناطیس درآورد. ولی امواج شناخته‌شده تا آن زمان، مانند امواج آب، امواج صوتی، لرزش‌های تار و طبل - در آب، هوا، سیم تار و پرده طبل منتشر می‌شدند. پرسیده شد امواج الکترومغناطیسی در چه محیطی منتشر می‌شوند. مکسول سراغ اتر رفت. اتر پیش از مکسول در سده ۱۷ پیشنهاد شده بود. اتر سیال یا ذرات لطیفی فرض می‌شد که کنش و واکنش از راه دور را (برای نیروهایی مانند الکترومغناطیس و گرانش) میسر می‌ساخت. اتر ساکن فرض می‌شد و نیز چارچوب مناسبی برای تعریف چارچوب مختصات لخت در فضای مطلق سه‌بعدی دانسته می‌شد. فرض می‌شد که اتر تمام کیهان را پر می‌کند، از هر محیط شفاف و کدر می‌گذرد و نور خورشید و ستارگان را از فضای تهی بین زمین و آسمان به ما می‌رساند. پرسیده شد:

- سرعت حرکت زمین نسبت به اتر چقدر است و چگونه می‌توان آن را اندازه گرفت؟
- اگر به یک چشمه نور نزدیک و یا از آن دور شویم سرعت نوری که دریافت می‌کنیم از ۳۰۰ هزار کیلومتر بر ثانیه چه قدر زیاد و کم می‌شود؟
- اتر چنان لطیف است که در تمام اجسام نفوذ می‌کند، ولی چنان صلب است و ضرایب الاستیک آن زیاد است که سرعت انتشار ارتعاشات آن (امواج الکترومغناطیسی)

۳۰۰ هزار کیلومتر بر ثانیه است. چگونه می‌توان این لطافت و صلابت بسیار زیاد را با هم جمع کرد؟

• و پرسش‌های دیگر.

آزمایش‌های زیادی توسط فیزو (۱۸۵۱)، مایکلسون (۱۸۸۱)، مایکلسون و مورلی (۱۸۸۷) و دیگران انجام گرفت که پرسش‌های بالا را جواب دهند. نتیجه منفی بود. سرعت نور در همه حال ثابت بود و اتر خود را نشان نمی‌داد.

در سال ۱۹۰۵ نوبت انیشتن جوان بود که تفکر سنتی رایج زمان، که نور محیط انتشار می‌خواهد، را کنار بگذارد و اعلام کند اگر سرعت نور و امواج الکترومغناطیسی برای همه و در همه حال ثابت است، چرا همین به عنوان اصل پذیرفته نشود و اگر اتر نمی‌خواهد خودش را نشان دهد، چرا کنار گذاشته نشود و فیزیک بدون آن ساخته و پرداخته نشود.

ناخوشایندتر از همه، ناهماهنگی بین مکانیک نیوتنی و الکترومغناطیس در جمع سرعت‌ها بود. در سینماتیک کلاسیک اگر سرعت B نسبت به A ، u_1 و سرعت C نسبت به B ، u_2 باشد سرعت C نسبت به A ، $u_1 + u_2$ خواهد بود. این قاعده برخاسته از ناوردایی قانون حرکت نیوتن تحت تبدیل‌های گالیلئ است. در حالی که در الکترومغناطیس اگر سرعت نور نسبت به چشمه c ، و سرعت چشمه نسبت به ناظر v باشد سرعت نور نسبت به ناظر همچنان c می‌ماند. لازمه این کار چنانچه خواهیم دید، ناوردایی معادله‌های مکسول تحت تبدیل‌های لورنتس است.

ناوردایی مکانیک کلاسیک تحت تبدیل‌های گالیلئ و ناوردایی الکترومغناطیس تحت تبدیل‌های لورنتس هر دو در پایان سده ۱۹ شناخته شده بودند. باز انیشتن بود که پرسید چرا بخشی از فیزیک از تبدیل‌های گالیلئ و بخش دیگر از تبدیل‌های لورنتس پیروی کند؟ چرا همه قانون‌های فیزیک از یک تبدیل پیروی نکنند و در همه چارچوب‌های لخت، یک‌سان نوشته نشوند؟ پذیرش این دیدگاه انقلابی پیامدهای انقلابی داشت. نسبت خاص بر مبنای دو اصل:

ثابت بودن سرعت نور در چارچوب‌های لخت و یک‌سان بودن قانون‌ها در چارچوب‌های لخت،

ساخته شد. الکترومغناطیس دست نخورده ماند و مکانیک کلاسیک با ناباوری و علی‌رغم همه دقت و صلابتی که تا آن زمان از خود نشان داده بود تن به بازبینی و صورت‌بندی نوین

فصل ۱. نظری بر مباحث فیزیک در سال‌های پایانی سده ۱۹ و آغازین سده ۲۰ ۴

داد. البته، نباید نتیجه گرفت بعد از انیشتن مکانیک نیوتنی بی‌اعتبار شده و کنار گذاشته شده است. تفاوت مکانیک نسبیتی انیشتن و مکانیک کلاسیک نیوتن تنها در سرعت‌های زیاد که کسر قابل‌توجهی از سرعت نور باشند ظاهر می‌شود. در رخدادهای روزمره و در سرعت‌های کم، مکانیک نیوتنی هنوز از دقت کافی برخوردار است و اعتبار دارد.

۲.۱ مکانیک کلاسیک و ناوردایی تحت تبدیل‌های گالیله

بیان رسمی قانون‌های حرکت نیوتن چنین است:

- در چارچوب مختصات لخت، اگر به جسمی نیرو وارد نشود، آن جسم یا ساکن است یا حرکت یک‌نواخت مستقیم دارد.
- در چارچوب مختصات لخت، اگر به جسمی به جرم m نیروی f وارد شود، شتاب a می‌گیرد، به طوری که:

$$f = ma.$$



اسحاق نیوتن: ۱۶۴۲-۱۷۲۶.

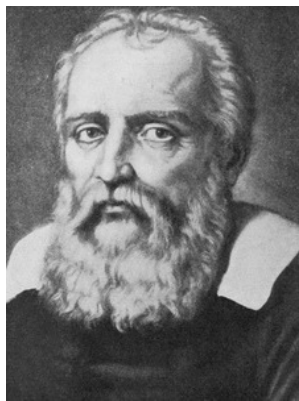
چارچوب لخت بی‌شتاب تعریف می‌شود. مفهومی انتزاعی است و تحقق آن تنها به تقریب ممکن است. زیرا چارچوب مختصاتی که هر ناظر فرضی روی زمین، روی خورشید، در فضای میان‌سیاره‌ای و میان‌ستاره‌ای، و یا در هر جای کیهان نصب کند، کم و بیش تحت تأثیر گرانش اجرام دور و نزدیک است و کم و بیش شتاب می‌گیرد. این نارسایی را در بخش نسبیت عام چاره خواهیم کرد. در این بخش فعلاً فرض کنیم، دو چارچوب مختصات لخت O و O' داریم و O' نسبت به O با سرعت v حرکت می‌کند و در زمان $t = 0$ هر دو بر هم منطبق‌اند. بردارهای مکان، سرعت و شتاب یک متحرک فرضی در چارچوب‌های O و

O' ، به صورت زیر به هم مربوط‌اند:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{v}t, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}'. \quad (۱.۱)$$

از نیروهای شناخته شده سده ۱۹، نیروی گرانشی، نیروی فنر، نیروهای رد و بدل شده بین دو جسم به هنگام برخورد، در تبدیل از چارچوب O به O' تغییر نمی‌کردند، $\mathbf{f}' = \mathbf{f}$. با این حساب اگر قانون حرکت در چارچوب O به صورت $m\mathbf{a} = \mathbf{f}$ نوشته می‌شد، با توجه به تبدیل‌های معادله‌های (۱.۱)، در چارچوب O' به صورت $m\mathbf{a}' = \mathbf{f}'$ درمی‌آید.

معادله‌های (۱.۱) تبدیل گالیه از مختصات O به O' است. این که قانون حرکت در O و O' به یک صورت نوشته شده و تفاوت تنها در گذاشتن یا نگذاشتن زیرنگاشت در چپ و راست معادله‌ها روی کمیت‌هاست، ناوردایی معادله حرکت نیوتن تحت تبدیل‌های گالیه را نشان می‌دهد. ناوردایی قانون‌های طبیعت در تبدیل از یک مختصات به مختصات دیگر ریشه فلسفی عمیق و پیامدهای منطقی پر دامنه دارد.



ناوردایی تأکید می‌کند که ناظرین لخت نسبت به هم امتیازی ندارند. برداشت آن‌ها از قانون‌های طبیعت باید یک‌سان باشد. به سخن دیگر، ناوردایی در قانون‌های فیزیک تضمین دموکراسی تمام و کمال بین ناظرین لخت است، و در بخش‌های آینده بارها به آن برخورد خواهیم گشت، و آن را به چارچوب‌های نالخت نیز تعمیم خواهیم داد.

کنکاش بیشتر: دو چارچوب لخت O : گالیلئو گالیه: ۱۶۴۲-۱۵۶۴.
 (x^1, x^2, x^3) و (x'^1, x'^2, x'^3) در نظر بگیریم،

که O' نسبت به O با سرعت ثابت $\mathbf{v}$ حرکت کند. هر دو چارچوب ساعت‌های همانند برای اندازه‌گیری زمان‌های t و t' خود داشته باشند و در لحظه $t = t' = 0$ ، O و O' بر روی هم باشند. تبدیل مختصات از O به O' و وارون آن به شرح زیر خواهد بود:

$$t = t', \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{v}t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t. \quad (۲.۱)$$

فصل ۱. نظری بر مباحث فیزیک در سال‌های پایانی سده ۱۹ و آغازین سده ۲۰ ۶

مشخصه‌های گروه تبدیل‌های بالا به شرح زیر است:

- تبدیل از O' به O به سه پارامتر پیوسته، سه مؤلفه $\mathbf{v}$ ، بستگی دارد که می‌توانند از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کنند.
- برای هر تبدیل از O' به O با سرعت $\mathbf{v}$ یک تبدیل معکوس از O به O' با سرعت $-\mathbf{v}$ وجود دارد.
- تبدیل به ازای $\mathbf{v} = 0$ تبدیل واحد است و $O = O'$ نگاه داشته می‌شود.
- ترکیب دو تبدیل گالیه پشت سرهم یک تبدیل گالیه می‌دهد:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{v}t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}'' + \mathbf{u}t, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}'' + (\mathbf{v} + \mathbf{u})t.$$

- ترتیب تبدیل‌ها جابه‌جایی پذیرند.

تبدیل‌های معادله (۲.۱) یک گروه سه پارامتری پیوسته تشکیل می‌دهند و زیر گروهی از گروه بزرگتر شش پارامتری گالیه است.

فصل ۲

الکترومغناطیس - خاستگاه نسبیت خاص

۱.۲ نگاهی گذرا به معادله‌های مکسول

سخن را با ساده‌ترین مفاهیم آغاز کنیم: بار الکتریکی وجود دارد و حرکت بار الکتریکی جریان الکتریکی تولید می‌کند. چگالی بار (بار در واحد حجم) را با $\rho(t, \mathbf{x})$ و چگالی جریان الکتریکی (اندازه باری که در واحد زمان از واحد سطح عمود بر جریان می‌گذرد) را با $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$ نشان دهیم. در حالت کلی هر دو کمیت برحسب زمان و مکان تغییر می‌کنند.

- بار الکتریکی را نمی‌توان به وجود آورد یا از بین برد (اصل ماندگاری بار الکتریکی).
- بار الکتریکی در اطراف خود میدان الکتریکی، $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ ، ایجاد می‌کند و از طریق آن روی بارهای دیگر نیرو وارد می‌کند (کولن ۱۷۸۴).
- در طبیعت و در آزمایشگاه تا به امروز تک‌قطبی مغناطیسی دیده نشده است.
- جریان الکتریکی در اطراف خود میدان مغناطیسی، $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ ، ایجاد می‌کند و از طریق آن روی جریان‌های الکتریکی دیگر نیرو وارد می‌کند (آمپر ۱۸۲۶).
- تغییر زمانی در میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی به وجود می‌آورد (فاراده ۱۸۳۱).



(راست) چارلز اگوستین کولن: ۱۸۰۶-۱۷۳۷، (چپ) آندره ماری آمپر: ۱۸۵۶-۱۷۷۵.

- تغییر زمانی در میدان الکتریکی، به مانند جریان الکتریکی عمل می‌کند و میدان مغناطیسی القاء می‌کند (جریان جابه‌جایی، افزوده مکسول ۱۸۶۵).
- میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی به ذره باردار نیرو وارد می‌کنند (لورنتس، دهه ۱۸۹۰).

از کولن و آمپر و فاراده و بیو و ساواری و لنز، تا مکسول و لورنتس یک‌صد سال و بیشتر طول کشیده است تا یافته‌های آزمایشگاهی و مفاهیم مجردی که در بالا به آن‌ها اشاره شد پالایش شوند و در قالب معادله‌های مکسول درآیند:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right). \quad (4.2)$$

- از دو معادله همگن (۱.۲)، اولی وجود تک‌قطبی مغناطیسی را نفی می‌کند و دومی قانون القای فاراده را بیان می‌دارد.

- از دو معادله ناهمگن (۲.۲)، اولی قانون کولن است و دومی قانون آمپر و جریان جابه‌جایی مکسول، $\partial \mathbf{E} / \partial t$ ، را نشان می‌دهد. بدون جریان جابه‌جایی موج الکترومغناطیسی

جدول واحدهای گوسی - مقایسه با واحدهای دستگاه استاندارد بین‌المللی، برگرفته از جکسون.

استاندارد بین‌المللی	دستگاه گوسی	کمیت فیزیکی
کولن	3×10^9 استات کولن	q بار الکتریکی
کولن بر مترمکعب	3×10^3 استات کولن بر سانتی مترمکعب	ρ چگالی بار الکتریکی
آمپر	3×10^9 استات آمپر	I جریان الکتریکی
آمپر بر مترمربع	3×10^5 استات آمپر بر سانتی مترمربع	J چگالی جریان الکتریکی
ولت بر متر	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$ استات ولت بر سانتی متر	E میدان الکتریکی
ولت	$\frac{1}{300}$ استات ولت	Φ پتانسیل الکتریکی
تسلا	10^4 گوس	B میدان مغناطیسی

وجود ندارد و اصل ماندگاری بار الکتریکی نیز به هم می‌ریزد.

• معادله (۳.۲) ماندگاری بار الکتریکی را ضمانت می‌کند.

• معادله (۴.۲) نیروی لورنتس روی ذره‌ای است که بار q و سرعت v دارد و در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی E و B قرارگرفته است.

معادله‌های بالا برای فضای تهی و در دستگاه واحدهای گوسی نوشته شده‌اند. در این دستگاه ضریب دی‌الکتریک و قابلیت نفوذ مغناطیسی خلأ هر دو "یک" است. پارامتر c در این معادله‌ها بعد سرعت دارد و با توجه به واحدهایی که در دستگاه گوسی انتخاب شده‌اند مقدار آن 3×10^{10} سانتی متر بر ثانیه به دست می‌آید؛ و این که بعدا درمی‌یابیم با سرعت نور در خلأ برابر است خود از شگفتی‌های الکترومغناطیس در سده ۱۹ بود و مکسول را بر آن داشت نور را از جنس امواج الکترومغناطیسی اعلام کند.

۲.۲ پتانسیل‌های برداری و نرده‌ای - آزادی در گزیدن پیمانه

در معادله همگن (۱.۲)، صفر بودن دیورژانس $\mathbf{B}$ اجازه می‌دهد $\mathbf{B}$ برحسب یک پتانسیل برداری نوشته شود:

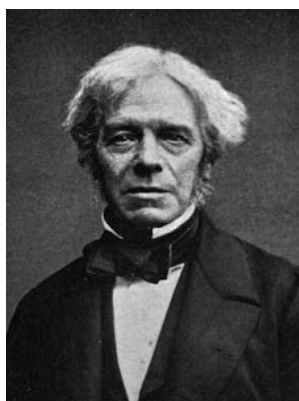
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (۵.۲)$$

با جای‌گذاری آن در معادله دوم (۱.۲) خواهیم داشت:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

کرل بردار درون پراپرتی صفر است. بنابراین می‌توان آن را گرادیان یک پتانسیل نرده‌ای، $-\nabla\Phi$ ، دانست و $\mathbf{E}$ را به صورت نوشت:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (۶.۲)$$



میدان‌های دو معادله (۵.۲) و (۶.۲) در جفت معادله همگن مکسول صدق می‌کنند و نیمی از مسئله حل شده است. ولی پتانسیل‌های $(\mathbf{A}, \Phi)$ یکتا نیستند و در گزیدن آن‌ها آزادی وجود دارد. اگر $\Lambda(t, \mathbf{x})$ یک میدان نرده‌ای دل‌خواه باشد، پتانسیل‌های

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\Lambda, \\ \Phi' &= \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \end{aligned} \quad (۷.۲)$$

میشل فاراده: ۱۸۹۳-۱۸۲۲.

همان $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ را می‌دهند که پتانسیل‌های پیشین می‌دادند:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}', \\ \mathbf{E} &= -\nabla\Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}. \end{aligned}$$

۲.۲. پتانسیل‌های برداری و نرده‌ای - آزادی در گزیدن پیمانه ۱۱

آزادی در گزیدن Λ می‌تواند حل معادله‌های ناهمگن را آسان کند. جای‌گذاری E و B برحسب پتانسیل‌های برداری و نرده‌ای (A, Φ) در معادله‌های ناهمگن (۲.۲)، روابط زیر را به دست می‌دهد:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \Phi = 4\pi\rho,$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \left[\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

حال از آزادی در گزیدن پیمانه برای ساده‌سازی معادله‌های بالا استفاده کنیم. دو گزینه بیش از همه رایج است:

الف) در پیمانه کولن، $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ، معادله برای پتانسیل نرده‌ای، مانند حالت الکترواستاتیک، به معادله پواسون کاهش می‌یابد.
ب) در پیمانه لورنتس، گزینه به شرح زیر است:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (۸.۲)$$

با این گزینه دو معادله برای A و Φ از هم جدا می‌شوند و هر دو به صورت معادله‌های آشنای موج در می‌آیند:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi = 4\pi\rho, \quad (۹.۲)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (۱۰.۲)$$

جدا از معادله‌های (۹.۲) و (۱۰.۲)، در فضای خالی از بار و جریان الکتریکی، $\rho = \mathbf{J} = 0$ ، می‌توان نشان داد هر یک از مؤلفه‌های E و B در معادله موج صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0. \quad (۱۱.۲)$$

۱.۲.۲ موج الکترومغناطیسی

نظر به نیاز آینده، دو معادله (۱۱.۲) را بیشتر بررسی می‌کنیم. یک دسته از جواب‌های آن‌ها در فضای بی‌مرز و بی‌کران به صورت زیر است:

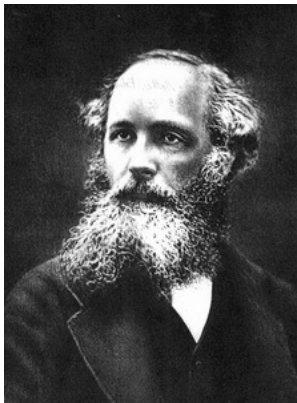
$$\mathbf{E} = E\hat{e}_1 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad (12.2)$$

$$\mathbf{B} = B\hat{e}_2 \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)], \quad \omega = ck. \quad (13.2)$$

که در آن‌ها E و B دامنه‌های میدان‌ها و ثابت‌اند. $\hat{e}_1$ و $\hat{e}_2$ دو بردار واحد در امتداد میدان‌های E و B هستند. k بردار انتشار، k اندازه بردار انتشار و ω بسامد زاویه‌ای موج است. عبارت $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ زاویه است و فاز موج نامیده می‌شود. مکان هندسی نقاط هم‌فاز جبهه موج نام دارد و در این جا صفحه عمود بر $\mathbf{k}$ است. چنین موجی را موج تخت می‌نامند. سرعت انتشار جبهه موج،

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) = \text{const.},$$

است. $c = \omega/k$.



پارامتر c که نخست بر پایه واحدهای گوسی و اندازه‌گیری‌های الکترومغناطیسی آزمایشگاهی وارد معادله‌ها شده بود اکنون در قامت سرعت انتشار موج الکترومغناطیسی ظاهر می‌شود؛ و چون اندازه آزمایشگاهی آن برابر با سرعت نور بود، به پیشنهاد مکسول نور هم موج الکترومغناطیسی دانسته شد. از جای‌گذاری معادله‌های (۱۱.۲) در معادله‌های (۱.۲) و (۲.۲)، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{k} \cdot \hat{e}_1 = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \hat{e}_2 = 0, \quad \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0, \quad \hat{e}_2 = \mathbf{k} \times \hat{e}_1.$$

سه بردار $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \mathbf{k})$ در خلأ و در فضای بی‌مرز، دو به دو بر هم عمود هستند. بردار $\mathbf{k}$ عمود بر صفحه

موج و دو بردار دیگر در صفحه موج‌اند. بنابراین، هرکدام از دو بردار $\hat{e}_1$ و $\hat{e}_2$ در صفحه موج دو مؤلفه دارند. بنا به قرارداد امتداد بردار الکتریکی، $\hat{e}_1$ را قطبش موج می‌گویند. موج الکترومغناطیسی دو قطبش بیشتر ندارد. اگر امتداد $\hat{e}_1$ ثابت باشد قطبش را خطی و اگر

در صفحه موج در جهت عقربه‌های ساعت یا وارون آن بچرخد قطبش را دایروی چپ‌گرد یا راست‌گرد می‌گویند. هر قطبش خطی را می‌توان به دو قطبش دایروی راست‌گرد و چپ‌گرد تجزیه کرد. هر قطبش دایروی را می‌توان به دو قطبش خطی عمود بر هم تجزیه کرد. از ترکیب مناسب دو قطبش دایروی یا خطی می‌توان قطبش بیضوی به دست آورد که در آن انتهای بردار $\hat{e}_1$ در صفحه موج یک بیضی بپیماید. در هر حال، بردارهای $(\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ ، به همین ترتیب سه بردار عمود برهم راست‌گرد تشکیل می‌دهند.

۳.۲ تکانه و انرژی میدان الکترومغناطیسی

نخست تعریف دقیقی از چگالی بار و چگالی جریان الکتریکی بدهیم. ذرات باردار موجود در محیط را شماره‌گذاری کنیم. ذره n ام دارای بار q_n ، مسیر $\mathbf{x}_n(t)$ ، و سرعت $\mathbf{v}_n(t)$ باشد. چگالی بار الکتریکی، $\rho(\mathbf{x}, t)$ ، عبارت است از مجموع بارهای موجود در واحد حجم در نقطه $\mathbf{x}$ ، در لحظه t ،

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_n q_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)). \quad (14.2)$$

چگالی جریان الکتریکی، $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ ، عبارت است از مجموع جریان‌های موجود (حاصل ضرب هر بار در سرعت آن) در واحد حجم در نقطه $\mathbf{x}$ ، در لحظه t ،

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \sum_n q_n \mathbf{v}_n(t) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)). \quad (15.2)$$

۱.۳.۲ تکانه میدان الکترومغناطیسی

اگر چگالی‌های ρ و $\mathbf{J}$ که در بالا تعریف شد در میدان‌های $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ قرار گیرند نیروی لورنتس به آن‌ها وارد خواهد شد، معادله (۴.۲). برابر قانون حرکت نیوتن، نیرو عبارت است از تغییر در تکانه در واحد زمان. بنابراین تغییر در تکانه مکانیکی ذرات چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{mech}}{dt} &= \int_v (\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B}) d^3x \\ &= \int_v \frac{1}{4\pi} \left[\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} + (\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) \times \mathbf{B} \right] d^3x. \end{aligned} \quad (16.2)$$

که در آن ρ و $\mathbf{J}$ با استفاده از معادله‌های مکسول جای‌گذاری شده‌اند. با کمی اعمال جبری در طرف راست معادله نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{mech}}{dt} &= -\frac{d}{dt} \int_v \frac{1}{4\pi c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d^3x \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_v [\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] d^3x. \end{aligned} \quad (۱۷.۲)$$

در طرف چپ معادله، P_{mech} تکانه مکانیکی ذرات است. جا دارد در سوی راست معادله جمله $\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ را که مربوط به میدان الکترومغناطیسی است، چگالی تکانه میدان، و انتگرال آن را تکانه کل میدان بنامیم. در انتگرال دوم در سوی راست برای نمونه مؤلفه i بخش الکتریکی را باز کنیم:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i &= E_i \frac{\partial E_j}{\partial x^j} - \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} E_j \frac{\partial E_m}{\partial x^l} \\ &= E_i \frac{\partial E_j}{\partial x^j} - (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) E_j \frac{\partial E_m}{\partial x^l} \\ &= E_i \frac{\partial E_j}{\partial x^j} + E_j \frac{\partial E_i}{\partial x^j} - E_j \frac{\partial E_j}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^j} (E_i E_j - \frac{1}{4} E^2 \delta_{ij}), \end{aligned}$$

که در آن روی زیرنگاشت‌های تکرار شده، (j, k, l, m) ، جمع زده‌ایم. جمله مربوط به بخش مغناطیسی نیز همانند بخش الکتریکی است. هر دو را در تانسور تنش (Stress tensor) مکسول جا می‌دهیم:

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{4\pi} (E_i E_j + B_i B_j) - \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) \delta_{ij}, \quad (۱۸.۲)$$

و حالا تغییر زمانی در مجموع تکانه ذرات و میدان را به صورت زیر در می‌آوریم:

$$\frac{d}{dt} \int_v g_i d^3x - \int_v \frac{\partial \Theta_{ij}}{\partial x^j} d^3x = -\frac{dP_{mech}|_i}{dt}. \quad (۱۹.۲)$$

صورت دیفرانسیلی معادله بالا چنین است:

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial (-\Theta_{ij})}{\partial x_j} = -[\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}]_i. \quad (۲۰.۲)$$

تعبیر معادله (۱۹.۲) چنین است: تغییر زمانی در چگالی تکانه میدان، $\partial g_i / \partial t$ ، برابر است با شار تکانه میدان به بیرون از حجم موردنظر، $\partial(-\Theta_{ij}) / \partial x_j$ ، به علاوه تکانه منتقل شده از میدان به ذرات باردار.

مثال از مکانیک

برای فهم بهتر تانسور تنش، از تنش مکانیکی مثال بیاوریم. در یک جسم مادی تحت تنش، سطح مقطعی عمود بر محور i دستگاه مختصات در نظر بگیریم. به واحد سطح آن نیروی Θ_i وارد شود و مؤلفه‌های آن را با $j = 1, 2, 3$ نشان دهیم. برابر این تعریف، Θ_{ij} مؤلفه j نیروی وارد بر واحد سطحی که عمود بر امتداد i است خواهد بود. مؤلفه‌های قطری آن، $\Theta_{ii}, i = 1, 2, 3$ ، به نام فشار شناخته می‌شوند. تانسور تنش در اجسام مادی سبب کرنش (Strain) می‌شود و انبساط و انقباض و برش و پیچش به وجود می‌آورد. تانسور تنش متقارن است، $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$. برای فهم آن مکعبی در نظر بگیریم. اگر مؤلفه j نیروی وارد بر سطح i برابر با مؤلفه i نیروی وارد بر سطح j نباشد، مکعب سر جای خود خواهد چرخید. ولی چنین چرخشی در اجسام تحت تنش دیده نمی‌شود. بنابراین $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$. میدان الکترومغناطیسی نیز به شرحی که در بالا آمد تانسور تنش دارد و از معادله (۱۸.۲) قابل محاسبه است. در این میدان به واحد سطحی که عمود بر بردار واحد $\mathbf{n}$ باشد، نیروی $n_i \Theta_{ij}$ وارد خواهد شد.

۲.۳.۲ انرژی میدان الکترومغناطیسی

از دو میدان $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ تنها میدان الکتریکی روی ذره باردار کار انجام می‌دهد. نیروی میدان مغناطیسی عمود بر امتداد حرکت ذره است و کار انجام نمی‌دهد. برای به دست آوردن توان میدان (کار در واحد زمان)، معادله (۴.۲) برای بار q_n را در $\mathbf{v}_n$ ضرب کنیم و روی ذرات موجود در واحد حجم جمع زنیم. با توجه به تعریف $\mathbf{J}$ و معادله‌های مکسول خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d^3x &= \frac{c}{4\pi} \int_v \mathbf{E} \cdot \left[\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] d^3x \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_v \left[\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + c \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right] d^3x. \end{aligned} \quad (21.2)$$

اگر

$$u = \frac{1}{4\pi} (E^2 + B^2)$$

را چگالی انرژی میدان الکترومغناطیسی بنامیم و

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

را شار u (گذر انرژی از واحد سطح در واحد زمان) بدانیم و حجم انتگرال‌گیری به دل‌خواه باشد، به معادله پیوستگی برای ماندگاری انرژی می‌رسیم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (22.2)$$

طرف چپ معادله تنها به میدان بستگی دارد. طرف راست آن کار میدان $\mathbf{E}$ روی جریان $\mathbf{J}$ است. کاهش انرژی میدان در یک حجم دل‌خواه برابر است با کار میدان روی ذرات باردار موجود در آن حجم به علاوه شار انرژی به بیرون از حجم.

مسئله‌ها

۱. نشان دهید صفحه موج عمود بر بردار انتشار است.
۲. درستی معادله‌های (۱۱.۲) را نشان دهید.
۳. نشان دهید جفت معادله ناهمگن مکسول با معادله پیوستگی سازگار است. راهنمایی: مشتق زمانی معادله اول (۲.۲) را با دیورژانس معادله دوم آن مقایسه کنید.
۴. فرض کنید $\mathbf{A}$ و Φ در پیمانه لورنتس صدق نمی‌کنند و

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = f(t, \mathbf{x}) \neq 0.$$

پتانسیل‌های جدیدی انتخاب کنید که در پیمانه لورنتس صدق کنند. جواب:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} - \nabla^2 \Lambda = f(t, \mathbf{x}).$$

۵. نشان دهید برای موج تخت:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = i\omega \mathbf{E}.$$

۶. از جای‌گذاری معادله‌های (۱۲.۲) و (۱۳.۲) در معادله‌های (۱۱.۲) به دست آورید:

$$k^2 - \omega^2/c^2 = 0.$$

۷. جزئیات معادله (۲۰.۲) را به دست آورید. راهنمایی: از معادله (۱۷.۲) استفاده کنید.

۸. جزئیات معادله (۳.۲) را به دست آورید. راهنمایی: نخست رابطه زیر را اثبات کنید:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{B}.$$

سپس از معادله‌های مکسول $\nabla \times \mathbf{E}$ را جای‌گذاری کنید.

فصل ۳

تبدیل‌های لورنتس - سخن سینماتیک



هانری پوانکاره: ۱۸۵۴-۱۹۱۲.

معادله‌های الکترومغناطیس که در فصل پیش یاد شدند همه در چارچوب مختصات لخت نوشته شده‌اند. پیش‌تر گفته شد ناظران لخت نسبت به هم امتیازی ندارند. انتظار می‌رود همه آن‌ها قانون‌های الکترومغناطیس را در چارچوب خود یک‌سان ببینند. به عبارت دیگر اگر برای ناظر $O(x^1, x^2, x^3)$ معادله‌های مکسول به صورت معادله‌های (۱.۲) و (۲.۲) هستند، در تبدیل مختصات زمان و مکان به $O'(x'^1, x'^2, x'^3)$ نیز باید همان باشند، با این تفاوت که بجای E, B, ρ و J مقادیر E', B', ρ' و J' قرار بگیرند. در مورد الکترومغناطیس چنین کاری

از تبدیل‌های گالیله بر نمی‌آید. لازم است از تبدیل‌های لورنتس یاری بجوئیم. تبدیل‌های لورنتس حاصل کار فیتزجرالد (۱۸۸۹)، لورنتس (دهه پایانی سده ۱۹)، و پوانکاره (۱۹۰۵) است که پیش از پیدایش نسبیت خاص شناخته شده بودند. مشترکات و تفاوت‌های تبدیل‌های گالیله و لورنتس را می‌توان چنین خلاصه کرد:

- هر دو تبدیل به مختصات لخت نیاز دارند و پیش‌تر گفته شد مختصات لخت مفهومی انتزاعی است و تنها به تقریب دست یافتنی است.
- در بنیان تبدیل گالیله فرض فضای مطلق سه بعدی تخت همگن و همسان‌گرد و زمان مطلق همگن نهفته است، به این معنا که همه ناظران لخت فاصله‌های فضایی و فاصله‌های زمانی بین دو رخداد را یک‌سان اندازه می‌گیرند، صرف نظر از این که مبدأ مختصات خود را در کجا و محورهای خود را در کدام امتداد انتخاب کرده‌اند، چارچوب‌هایشان چپ‌گرد یا راست‌گردند، ساعت‌های خود را با هم تنظیم کرده یا نکرده‌اند.
- در بنیان تبدیل لورنتس فرض فضا-زمان مطلق قرار دارد. چارچوب‌های لخت را هنوز می‌توان در هر جا و امتداد، چپ‌گرد یا راست‌گرد انتخاب کرد، ساعت‌ها را با هم تنظیم کرد یا نکرد. ولی فاصله‌های فضایی و فاصله‌های زمانی رخدادهای جدا از هم ناوردا نیستند. تنها ترکیبی از آن‌ها که از این به بعد فاصله "فضا-زمانی" نامیده خواهد شد ناوردا می‌ماند.

۱.۳ سرعت نور ثابت جهانی - تبدیل‌های لورنتس

ثابت جهانی بودن سرعت نور و تبدیل‌های لورنتس در چارچوب‌های لخت، دو روی یک سکه‌اند. با داشتن یکی می‌توان دیگری را به دست آورد، و نیاز به دانستن الکترومغناطیس هم نیست. حتی می‌توان به نیمی از الکترومغناطیس، معادله‌های همگن مکسول (۱.۲)، نیز رسید، و در بخش ۳.۴ این کار را خواهیم کرد. ثابت بودن سرعت نور پشتوانه مشاهداتی دارد. اصل اول نسبیت خاص انیشتن است که ساده‌ترین راه برای رسیدن به تبدیل‌های لورنتس می‌باشد. پیامدهای این اصل حیرت‌آور است و پذیرش آن شاید برای انسانی که برداشتش از طبیعت بر پایه مشاهدات روزانه در سرعت‌های کم شکل گرفته است آسان نباشد. به مثال زیر توجه شود:

دو چارچوب $O(x^1, x^2, x^3)$ و $O'(x'^1, x'^2, x'^3)$ را در نظر بگیریم. محورهای دو چارچوب موازی هم باشند. چارچوب O' در امتداد x^1 با سرعت v نسبت به O حرکت کند، و O و O' در لحظه $t = t' = 0$ بر روی هم باشند. فرض کنیم در لحظه صفر یک

علامت نوری از O و O' نشر شود. ناظر O در لحظه t جبهه موج را کره‌ای به شعاع ct و به مرکز O خواهد دید. ناظر O' نیز در لحظه t' خود، جبهه موج را کره‌ای به شعاع ct' به مرکز O' خواهد دید. بر پایه مشاهدات روزانه عجیب است هر دو ناظر جبهه موج را کره به مرکزیت خود ببینند، در حالی که آن‌ها به فاصله vt یا vt' از هم دور شده‌اند. ولی اصل ثابت بودن سرعت نور چنین حکم می‌کند و باید پذیرفته شود. مشاهدات نیز آن را تایید می‌کنند. برای جبهه موج هر کدام از دو ناظر خواهند نوشت:

$$c^2 t^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2 t'^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 = 0.$$

اگر به جای علامت نوری، متحرک دیگری با سرعتی به جز c از O و O' راه می‌افتاد، در زمان‌های t و t' فاصله‌اش از مبدأها کمتر از ct و ct' می‌شد و طرف راست معادله‌هایی از نوع بالا صفر نمی‌شد. می‌توانیم گمان بریم:

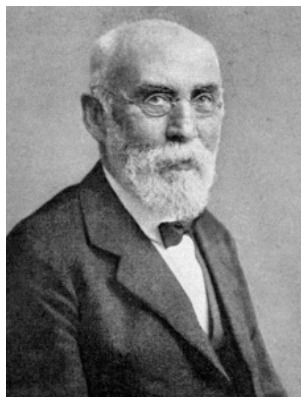
- استقلال زمان و مکان از بین برود. در این صورت لازم است همان طور که در تبدیل x ها زمان وارد می‌شد، در تبدیل t ها هم مکان وارد شود.
- تبدیل از O به O' و بالعکس خطی باشد. وگرنه، جبهه‌های موج که در بالا از آن‌ها سخن رفت برای دو ناظر کره نخواهد بود.
- اگر O و O' در امتداد x ها حرکت می‌کنند انتظار نمی‌رود در امتدادهای x^2 و x^3 تغییری به وجود آید.
- در هر حال در حد سرعت‌های کم، تبدیل لورنتس باید به تبدیل گالیه $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{v}t'$ نزدیک شود.

با توجه به حدس و گمان‌های بالا، تبدیل خطی زیر را بیازماییم:

$$ct = \gamma(ct' + \alpha x'^1), \quad x^1 = \delta(\beta ct' + x'^1), \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3. \quad (1.3)$$

در معادله (۱.۳)، (t, x^1, x^2, x^3) و (t', x'^1, x'^2, x'^3)

مختصات زمان و مکان یک رخداد و همان رخداد در O و O' هستند، c سرعت نور است و در کنار t ها نوشته شده تا همه جمله‌ها بُعد طول داشته



باشند. پارامترهای $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ بی‌بعد، ثابت، و تا این جا نامعلوم‌اند. منظور از رخداد هر اتفاقی است که بتوان زمان و مکان معینی به آن نسبت داد: حضور یک شخص در زمان t در مکان (x^1, x^2, x^3) ، رسیدن نور نشر شده از O' در لحظه t' به (x'^1, x'^2, x'^3) و مانند این‌ها. برای پیدا کردن پارامترهای نامعلوم، رخدادها را زیر را در نظر بگیریم:

رخداد ۱: بودن O در زمان t در $x^1 = 0$ از دید خودش و بودن O در زمان t' در $x'^1 = -vt'$ از دید ناظر O' . جای‌گذاری این داده‌ها در معادله‌های (۱.۳) می‌دهد:

$$0 = \delta(\beta ct' - vt') \implies \beta = \frac{v}{c}.$$

رخداد ۲: بودن O' در زمان t در $x^1 = vt$ از دید ناظر O و بودن O' در زمان t' در $x'^1 = 0$ از دید خودش. جای‌گذاری این داده‌ها در معادله (۱.۳) می‌دهد:

$$ct = \gamma ct', \quad vt = \delta \beta ct', \implies \delta \beta / \gamma = v/c, \implies \delta = \gamma.$$

جای‌گذاری این مقادیر در معادله (۱.۳) می‌دهد:

$$ct = \gamma(ct' + \alpha x'^1), \quad x^1 = \gamma(\beta ct' + x'^1), \quad \beta = v/c. \quad (2.3)$$

در معادله‌های (۲.۳)، α و γ هنوز نامعلوم‌اند.

رخداد ۳: در لحظه $t = t' = 0$ یک علامت نوری از O و O' که روی هم هستند، نشر شود. از نگاه ناظر O علامت نوری در زمان t به روی کره‌ای به شعاع

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = c^2 t^2$$

می‌رسد، و از نگاه ناظر O' در زمان t' بروی کره‌ای به شعاع

$$(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2 = c^2 t'^2.$$

از دو معادله پایانی به دست می‌آید:

$$c^2 t^2 - (x^1)^2 = c^2 t'^2 - (x'^1)^2 = (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

حال تبدیل (x, t) به (x', t') از معادله (۲.۳) و جای‌گذاری آن‌ها در عبارت بالا می‌دهد:

$$\alpha = \beta$$

و معادله (۲.۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$ct = \gamma(ct' + \beta x'^1), \quad x^1 = \gamma(\beta ct' + x'^1). \quad (۳.۳)$$

تنها پارامتر γ نامعلوم مانده است. آن را هم از وارون معادله (۳.۳) به دست می‌آوریم. دو راه برای دانستن وارون وجود دارد:

۱. با به دست آوردن t' و x'^1 بر حسب t و x^1 از معادله (۳.۳):

$$ct' = \frac{1}{\gamma(1 - \beta^2)}(ct - \beta x^1), \quad x'^1 = \frac{1}{\gamma(1 - \beta^2)}(x^1 - \beta ct).$$

۲. ناظرهای O و O' امتیازی نسبت به هم ندارند. اگر ناظر O ناظر O' را در حرکت با سرعت v می‌بیند، ناظر O' نیز ناظر O را در حرکت با سرعت $-v$ می‌بیند. برای به دست آوردن وارون معادله (۳.۳) کافی است علامت β عوض شود و زبرنگاشت‌ها از طرف راست معادله به طرف چپ بیایند:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x^1), \quad x'^1 = \gamma(x^1 - vt).$$

از مقایسه دو معادله پایانی به دست می‌آید:

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta = v/c. \quad (۴.۳)$$

صورت نهایی تبدیل لورنتس در نماد ماتریسی آن سرانجام به معادله زیر می‌انجامد:

$$\begin{bmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix}. \quad (۵.۳)$$

وارون آن با عوض کردن علامت β و جابه‌جا کردن زبرنگاشت‌ها از راست به چپ به دست می‌آید.

تبدیل لورنتس - چرخش‌های مجازی در فضا-زمان

پارامترهای β و γ را می‌توان به صورت تابع‌های هذلولی نوشت:

$$\beta = \tanh \zeta, \quad \gamma = \cosh \zeta, \quad \gamma\beta = \sinh \zeta, \quad \cosh^2 \zeta - \sinh^2 \zeta = 1.$$

که در آن ζ یک پارامتر پیوسته در بازه $(-\infty, +\infty)$ است. معادله (۵.۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \zeta & \sinh \zeta & 0 & 0 \\ \sinh \zeta & \cosh \zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix}. \quad (۶.۳)$$

تابع‌های هذلولی به تابع‌های مثلثاتی می‌مانند:

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}).$$

$$\cosh \zeta = \frac{1}{2}(e^{\zeta} + e^{-\zeta}), \quad \sinh \zeta = \frac{1}{2}(e^{\zeta} - e^{-\zeta}).$$

اگر $\zeta = i\theta$ را زاویه موهومی تعبیر کنیم، می‌توانیم معادله (۶.۳) را، با مقایسه با چرخش در صفحه‌های مختصات، چرخش موهومی در صفحه (t, x^1) بنامیم و از مفاهیم آشنای فضای اقلیدسی برای بیان منظور یاری بگیریم.

برای کوتاه‌نویسی، معادله‌های (۵.۳) و (۶.۳) را به صورت فشرده زیر خواهیم نوشت:

$$x = \Lambda x', \quad x' = \Lambda^{-1} x$$

که در آن x و x' بدون زبرنگاشت‌های $(0, 1, 2, 3)$ ، یا علامت برداری به ترتیب تک ستون‌های چهار تایی $(ct, \mathbf{x})$ و $(ct', \mathbf{x}')$ هستند. ماتریس تبدیل لورنتس است. وارون آن $\Lambda^{-1}(v) = \Lambda(-v)$ است. تبدیل‌های لورنتس فاصله‌های فضا-زمانی را ناورد

نگاه می‌دارند. اگر تفاوت مختصات دو رخداد در مختصات O ، (cdt, dx) و در مختصات O' ، (cdt', dx') باشد:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2. \quad (۷.۳)$$

برای نشان دادن درستی معادله (۷.۳) کافی است به جای dt و dx تبدیل یافته آن‌ها از معادله (۵.۳) قرار داده شود.

تعریف: $d\tau = ds/c$ کمیت چارنرده‌ای است و بُعد زمان دارد. ساعت هر ناظر نسبت به خودش ساکن است ($dx = 0$). برای او $dt = d\tau$ و ناورداست. $d\tau$ را ویژه‌زمان ناظر خواهیم نامید.

۲.۳ سینماتیک تبدیل‌های لورنتس

این که سرعت نور ثابت جهانی است و هر دو ناظر O و O' جبهه موج نشر شده در لحظه صفر را کره به مبدأ مختصات خود می‌بینند، شگفت‌انگیز است. تصور آن برای انسانی که در مشاهده‌های روزانه تنها با سرعت‌های کم سروکار دارد و با آن‌ها خو گرفته است آسان نخواهد بود. در سرعت‌های بالا هنوز به شگفتی‌های بیشتری برمی‌خوریم. در زیر به چند نمونه اشاره می‌شود.

انقباض طول:

ناظر O' خط‌کشی به طول l_0 در روی محور x' خود دارد و مختصات دو سر آن را x'_1 و $x'_2 = x'_1 + l_0$ اندازه می‌گیرد. دستیاران ناظر O که در روی محور x مستقر هستند و خط‌کش با سرعت v از جلوی آن‌ها می‌گذرد، مختصات دو سر خط‌کش را در زمان t و هم‌زمان با هم x_1 و $x_2 = x_1 + l$ اندازه می‌گیرند، و برای تبدیل اندازه‌گیری‌های خود به هم دیگر خواهند نوشت:

$$l_0 = (x'_2 - x'_1) = \gamma[(x_2 - vt) - (x_1 - vt)] = \gamma l$$

$$\Rightarrow l = \frac{1}{\gamma} l_0 < l_0. \quad (۸.۳)$$

در معادله (۸.۳) l_0 طول خطکشی است که ناظر O' در دست دارد. و l طول همان خطکش است که دست‌یاران ناظر O به هنگام عبور خطکش از مقابل آن‌ها اندازه می‌گیرند. l کوتاه‌تر از l_0 است. ناگفته پیداست که ناظر O' نیز خطکش ناظر O را که با سرعت $-v$ حرکت می‌کند، کوتاه‌تر از خطکش خود خواهد یافت (اصل برابری ناظرهای لخت).

اتساع زمان:

دو ناظر O و O' ساعت‌های مشابه دارند و به هنگام عبور از مقابل هم آن‌ها را روی لحظه $t = t' = 0$ باهم تنظیم می‌کنند. پس از عبور از هم دیگر ناظر O' فاصله زمانی $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$ را یادداشت می‌کند. ناظر O یادداشت اول O' را در لحظه t_1 در مکان $x_1 = vt_1$ و یادداشت دوم او را در لحظه t_2 در مکان $x_2 = vt_2$ خواهد دید و فاصله زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ خود را با استفاده از تبدیل‌های لورنتس چنین حساب خواهد کرد:

$$\Delta t_0 = t'_2 - t'_1 = \gamma \left[\left(t_2 - \frac{\beta}{c} vt_2 \right) - \left(t_1 - \frac{\beta}{c} vt_1 \right) \right] = \gamma (1 - \beta^2) \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t_0 > \Delta t_0. \quad (9.3)$$

در معادله (۹.۳)، Δt_0 زمانی است که ناظر O' با ساعت خود اندازه می‌گیرد. در حالی که Δt زمانی است که دستیاران O در نقاط x_1 و x_2 به هنگام عبور O' از جلوشان روی عقربه های ساعت او می‌بینند و گزارش می‌کنند. Δt بزرگ‌تر از Δt_0 است. ناظر O نتیجه خواهد گرفت ساعت O' کند تر از ساعت خودش کار می‌کند. نتیجه‌گیری متقابل است. ناظر O' نیز ساعت ناظر O را کندتر از ساعت خود خواهد یافت (باز اصل برابری ناظرهای لخت).

گواه مشاهداتی فراوانی برای راستی آزمایی اتساع زمان و انقباض طول وجود دارد. به طور مثال ذره‌های بنیادی ناپایداری وجود دارند که پیش از واپاشی، فاصله‌هایی بسیار دورتر از آن چه را که عمر کوتاه‌شان اجازه می‌دهد می‌پیمایند. ذره μ یک لپتون با جرم سکون ۱۰۵ الکترون‌ولت و نیم‌عمر ۲/۲ میکروثانیه است. بدون در نظر گرفتن اتساع زمان اگر با سرعت نور هم حرکت کند تنها می‌تواند به طور میانگین ۶۶۰ متر از زایشگاه خود دور شود. ولی رسی و هال (۱۹۴۰) [۱۷] ذره μ تولید شده در هواکره زمین را ۱۶۳۴ متر دورتر از زایشگاه آن‌ها یافتند. بررسی دقیق‌تر در ۱۹۶۳ انجام گرفت. فریش و اسمیت

[۷]، ۵۶۳ ذره μ را که در آغاز حرکت از بالای کوه واشنگتن، ایالت نیوهمپشایر، سرعتهای $0.9952c$ داشتند، در سطح دریا (در فاصله 1907 متر دورتر از محل زایش) یافتند. پس از تصحیح داده‌های خود به خاطر کند شدگی ذره‌ها در عبور از جو، ضریب اتساع زمان را $\gamma = 1.8 \pm 0.8$ و نیم‌عمر ذره را $2/2$ میکروثانیه به دست آوردند.

قانون جمع سرعت‌ها:

دو ناظر O و O' سرعت‌های یک متحرک را به ترتیب $u = dx/dt$ و $u' = dx'/dt'$ تعریف می‌کنند. تبدیل آن‌ها به هم‌دیگر چنین است:

$$u_{\parallel} = \frac{dx_{\parallel}}{dt} = \frac{\gamma(dx'_{\parallel} + vdt')}{\gamma(dt' + \frac{v}{c}dx'_{\parallel})} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + vu'_{\parallel}/c^2}, \quad (10.3)$$

$$u_{\perp} = \frac{dx_{\perp}}{dt} = \frac{dx'_{\perp}}{\gamma(dt' + \frac{v}{c}dx'_{\parallel})} = \frac{u'_{\perp}}{\gamma(1 + vu'_{\parallel}/c^2)}. \quad (11.3)$$

منظور از زیرنگاشت‌های $\parallel$ و $\perp$ مولفه‌های موازی با v و عمود بر v هستند. در معادله‌های (۱۰.۳) و (۱۱.۳) اگر در سرعت‌های کم، از v^2/c^2 و $vu'_{\parallel}/c^2$ صرف‌نظر شود قانون جمع سرعت‌های گالیلئ به دست می‌آید:

$$u_{\parallel} = u'_{\parallel} + v, \quad u_{\perp} = u'_{\perp}.$$

سرعت نور بالاترین سرعت‌هاست: اگر v یا $u'_{\parallel}$ هر دو به c میل کنند، $u_{\parallel}$ به c و $u_{\perp}$ به صفر میل خواهد کرد و سرعتی بالاتر از c به دست نخواهد آمد.

۳.۳ فضا-زمان چاربعدي (فضای مینکوسکی)

اعمال جبری و هندسی که تا به حال انجام گرفته، شاید از نظر توضیح مفاهیم فیزیکی کارا بوده‌اند و مقایسه تبدیل‌های لورنتس و گالیلئ را ساده کرده باشند، ولی از نقطه نظر فرمول‌بندی ریاضی زیبا نیستند و اعمال جبری و هندسی در فضا-زمان چاربعدي را آسان نکرده‌اند. در این بخش این نارسایی را چاره می‌کنیم. ولی پیش از پرداختن به موضوع،

یک مطلب روزآشنا را یاد آور می‌شویم. برای سنجیدن هر "چیز" به یک سنجه نیاز است و مقدار آن چیز برابر است با اندازه سنجه ضرب در عدد سنجه‌ها در آن چیز. به دو مثال زیر توجه شود:

۱. با هزار ریال چند آب‌نبات می‌توان خرید

$$\text{عدد آب‌نبات} \times \text{بهای یک آب‌نبات} = ۱۰۰۰ \text{ ریال}$$

بهای آب‌نبات سنجه است، اگر کم یا زیاد شود مقدار آن زیاد یا کم خواهد شد.

۲. در فضای سه بعدی بردار $\vec{V}$ را می‌توان بر حسب تصاویر آن روی بردار واحدهای $(\hat{e}_i; i = 1, 2, 3)$ چارچوب مختصات (x, y, z) چنین نوشت:

$$\vec{V} = \sum_i V^i \hat{e}_i.$$

بردار واحدهای $\hat{e}_i$ سنجه‌ها هستند. هر تغییر در آن‌ها سبب تغییر معکوس در مولفه‌های V^i خواهد شد. به عنوان مثال، کم شدن طول بردارهای واحد سبب افزایش اندازه مولفه‌ها خواهد شد، یا چرخش آن‌ها در جهت عقربه‌های ساعت برابر با چرخش مولفه‌ها در خلاف جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود. آگاهی از این نکته در بحثی که در پیش داریم ضروری است، و برای تمیز گذاشتن بین آن‌ها سنجه‌ها را با صفت هم‌وردا و سنجیده‌ها را با صفت پادورا به کار خواهیم برد. هم‌چنین باید به یاد داشته باشیم قاعده تبدیل هم‌ورداها و پادورداها وارون هم‌دیگر است

تعریف: فضای چاربعدهای $(x^\alpha : (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3))$ را که در آن فاصله فضا-زمانی دو رخداد با تفاوت مختصات dx^α ، به صورت زیر تعریف شده باشد و در تبدیل لورنتس از یک چارچوب لخت به چارچوب لخت دیگر ناوردا بماند فضای مینکوسکی می‌گویند:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta. \quad (۱۲.۳)$$

که در آن η متریک مینکوسکی (Minkowski) است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\eta_{\alpha\beta}] = [\eta^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det \eta = -1.$$

مولفه‌های آن عبارت‌اند از

$$\eta_{\circ\circ} = \eta^{\circ\circ} = 1, \quad \eta_{\circ i} = \eta_{i\circ} = \eta^{\circ i} = \eta^{i\circ} = 0, \quad \eta_{ij} = \eta^{ij} = -\delta_{ij}, \quad (i, j) = 1, 2, 3.$$

به قرارداد جمع روی یک زیر نگاشت و یک زیرنگاشت تکرار شده توجه شود. مجموعه چارتایی

$$dx^\alpha = (dx^\circ, dx^1, dx^2, dx^3)$$

با زیرنگاشت از حروف یونانی را چاربردار پادوردا (Contravariant) در فضای مینکوسکی خواهیم نامید. هر چاربردار پادوردا یک هم‌زاد هم‌وردا (Covariant) خواهد داشت که به صورت زیر، با زیرنگاشت یونانی، تعریف خواهیم کرد:

$$dx_\alpha = (dx_\circ, dx_1, dx_2, dx_3) = \eta_{\alpha\beta} dx^\beta = (dx^\circ, -dx^1, -dx^2, -dx^3),$$

و به عکس:

$$dx^\alpha = \eta^{\alpha\beta} dx_\beta = (dx_\circ, -dx_1, -dx_2, -dx_3).$$

برای کوتاه‌نویسی ds^2 را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نوشت:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx^\alpha dx_\alpha = dx_\beta dx^\beta.$$

۴.۳ تبدیل‌های پوانکاره و لورنتس - کنکاش بیشتر

در دو چارچوب مختصات لخت O و O' ، ممکن است: ساعت‌ها هم‌زمان نباشند،

مبدأها روی هم نباشند،
محورها نسبت به هم چرخیده باشند،
 O و O' نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت کنند،
وارونی در مکان داشته باشند،
وارونی در زمان، به معنای وارونی در سرعت‌ها داشته باشند.

در تبدیل دو مختصات به هم، همه این تفاوت‌ها را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$x' = \Lambda x + a : \quad x'^{\alpha} = \Lambda^{\alpha}_{\beta} x^{\beta} + a^{\alpha}, \quad x'_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\beta} x_{\beta} + a_{\alpha}, \quad (13.3)$$

نیز می‌توان نوشت

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \Lambda^{\alpha}_{\beta}, \quad \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \Lambda_{\alpha}^{\beta}. \quad (14.3)$$

که در آن ماتریس چهار در چهار Λ در کلی‌ترین حالت شش پارامتر پیوسته دارد (سه پارامتر برای سه چرخش مثلا حول سه محور مختصات، و سه پارامتر برای سه حرکت لخت در سه امتداد). a^{α} چاربردار انتقال مبدأهای زمان و مکان است و چهار پارامتر پیوسته دارد. در نوشتن زیر و زبرنگاشت‌های Λ ، ترتیب مهم است و باید مراعات شود.

ساختار Λ :

گروه تبدیل‌های ده‌گانه‌ای که با Λ و a^{α} تعریف می‌شوند باید فاصله‌های فضا-زمانی را ناوردانگاه دارند:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx'_{\alpha} dx'^{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\beta} dx_{\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} dx^{\gamma} = dx_{\beta} dx^{\beta}. \implies \\ \Lambda_{\alpha}^{\beta} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} &= (\Lambda^{-1})^{\beta}_{\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma}, \implies \\ (\Lambda^{-1})^{\beta}_{\alpha} &= \Lambda_{\alpha}^{\beta} = \eta_{\alpha\delta} \eta^{\beta\epsilon} \Lambda^{\delta}_{\epsilon}. \end{aligned} \quad (15.3)$$

چنان‌که دیده می‌شود وارون ماتریس Λ با بالا و پایین آوردن اندیس‌های آن به کمک متریک مینکوسکی به دست می‌آید. صورت ماتریسی معادله (۱۵.۳) چنین است:

$$\Lambda^{-1} = \eta \Lambda \eta, \quad \Lambda \Lambda^{-1} = \Lambda \eta \Lambda \eta = I.$$

از دو طرف معادله بالا دترمینان بگیریم:

$$|\det \Lambda|^2 = 1, \quad \det \Lambda^{-1} = \det \Lambda = \pm 1. \quad (۱۶.۳)$$

نام‌گذاری:

تبدیل‌های معادله (۱۳.۳) را که در آن Λ در معادله‌های (۱۵.۳) و (۱۶.۳) صدق می‌کند، به علاوه دو تبدیل ناپیوسته وارونی‌های زمان و مکان، تبدیل‌های گروه پوانکاره عام می‌نامند. اگر تبدیل‌های ناپیوسته کنار گذاشته شوند، گروه را پوانکاره خاص می‌نامند. گروه پوانکاره ۱۰ پارامتر پیوسته دارد.

در گروه پوانکاره، اگر چهار انتقال a^α کنار گذاشته شوند، گروه شش پارامتری باقی مانده گروه لورنتس عام یا خاص نامیده می‌شود، بسته به این که وارونی‌های زمان و مکان منظور بشوند یا نه. از شش پارامتر گروه لورنتس سه پارامتر طبیعت زاویه دارند، که در بازه $(0 - 2\pi)$ یا $(0 - \pi)$ تغییر می‌کنند، و می‌توانند سه زاویه اوپلر یا سه چرخش دور سه محور مختصات باشند. سه پارامتر دیگر، حرکت یک‌نواخت مختصات در سه امتداد را تولید می‌کنند. سه زاویه موهومی معادله (۶.۳) گستره‌های نامحدود دارند. بنابراین گروه لورنتس گروه لی نافشرده است (به گشت ریاضی زیر نگاه شود). در مانده کتاب تنها از گروه لورنتس خاص، یا به کوتاهی لورنتس، سخن خواهیم گفت.

گشت ریاضی - چند سخن در باره گروه‌ها

مجموعه $G(a, b, \dots)$ به علاوه یک رابطه بین هر دو عضو آن (در این جا آن را عمل ضرب خواهیم نامید) که در چهار شرط زیر صدق کند گروه نامیده می‌شود:

- حاصل ضرب هر دو عضو، عضو دیگری در گروه باشد: $ab = c; a, b, c \in G$
- یک عضو واحد i وجود داشته باشد به طوری که $ai = ia = a; a, i \in G$
- هر عضو a یک عضو وارون a^{-1} داشته باشد به طوری که $aa^{-1} = a^{-1}a = i; i, a \in G$
- عمل ضرب اشتراک‌پذیر باشد: $abc = (ab)c = a(bc); a, b, c \in G$

چند مثال:

۱ مجموعه اعداد صحیح مثبت و منفی تحت عمل جمع یک گروه است. عضو واحد آن صفر است. مجموعه اعداد گویا تحت عمل ضرب یک گروه است. عضو واحد آن ۱ است. اعضای این دو گروه گسسته و قابل شمارش، ولی بی‌نهایت‌اند.

۲ مجموعه ماتریس‌های 2×2 :

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

تحت عمل ضرب ماتریس‌ها یک گروه است. دترمینان ماتریس $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ است. اعضای این گروه به پارامتر پیوسته φ بستگی دارند که می‌تواند به طور پیوسته در بازه $(-\pi, \pi)$ تغییر کند. در ضرب این گروه عامل‌های ضرب می‌توانند جابه‌جا شوند $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

۳ مجموعه ماتریس‌های 2×2 مختلط:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix},$$

با دترمینان $aa^* + bb^* = 1$ تحت عمل ضرب ماتریس‌ها یک گروه است. این گروه دارای سه پارامتر آزاد (از بین چهار جزء حقیقی و موهومی a و b) است که در بازه $(-1, +1)$ می‌توانند به طور پیوسته تغییر کنند. عامل‌های ضرب در این گروه جابه‌جا نمی‌شوند $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$.

۴ ماتریس‌های 2×2 حقیقی

$$\begin{bmatrix} \cosh \zeta & \sinh \zeta \\ \sinh \zeta & \cosh \zeta \end{bmatrix},$$

با دترمینان $\cosh^2 \zeta - \sinh^2 \zeta = 1$ تحت عمل ضرب ماتریس‌ها گروه است. اعضای گروه با پارامتر ζ مشخص می‌شوند که می‌تواند به طور پیوسته در بازه $(-\infty, +\infty)$ تغییر کند. عامل‌های ضرب در این گروه جابه‌جا می‌شوند $g_1 g_2 = g_2 g_1$.

۵ گروه تبدیل‌های معادله (۱.۱) یک گروه سه پارامتری پیوسته است. بازه پارامترهای آن بی‌نهایت است. عضو واحد آن تبدیل با سرعت صفر است: $\mathbf{x} = \mathbf{x}', t = t'$.

چند تعریف:

• گروهی که اعضای آن با یک یا چند پارامتر مشخص شود و پارامترها به طور پیوسته تغییر کنند، گروه لی (Lie) نامیده می‌شود. در مثال‌های بالا شماره ۱ گروه لی نیست، شماره‌های

- ۲ و ۴ لی یک پارامتری هستند. شماره‌های ۳ و ۵ لی سه پارامتری هستند.
- اگر بازه پارامترهای گروه لی محدود باشد گروه لی فشرده (Compact) نامیده می‌شود. اگر بازه تغییر پارامترها نامحدود باشد گروه لی نافشرده (Non-compact) نام می‌گیرد. در مثال‌های بالا شماره‌های ۲ و ۳ فشرده و شماره‌های ۴ و ۵ نافشرده هستند.
- در عمل ضرب اگر ترتیب عامل‌های ضرب قابل جابه‌جایی باشد گروه آبلی (Abelian) و اگر نباشد گروه ناآبلی (Non-abelian) است. در مثال‌های بالا شماره‌های ۱، ۲، ۴ و ۵ آبلی و شماره ۳ ناآبلی است.

۵.۳ تعریف نرده، بردار، و تانسور - قاعده تبدیل آن‌ها

پیش‌تر dx^α و dx_α را چاربردارهای پادوردا و هم‌وردا نامیدیم، و تبدیل لورنتس آن‌ها را از O به O' به صورت زیر نوشتیم:

$$dx'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta dx^\beta, \quad dx'_\alpha = \Lambda_\alpha^\beta dx_\beta \quad (17.3)$$

- هر چهار تایی u^α و $u_\alpha = \eta_{\alpha\beta} u^\beta$ که مانند dx^α و dx_α تبدیل شوند به ترتیب چاربردار پادوردا و هم‌وردا نامیده خواهند شد.
- هر تانسور 4×4 دو اندیسی، مانند $T^{\alpha\beta}$ ، T^α_β ، و $T_{\alpha\beta}$ را که اندیس‌های پادوردا و هم‌وردای آن‌ها مانند چاربردارهای پادوردا و هم‌وردا تبدیل شوند، چارتانسور مرتبه دو نامیده خواهند شد. مثال:

$$T'^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda_\beta^\delta T^\gamma_\delta.$$

این قاعده قابل تعمیم به تانسورهای مرتبه‌های بالا است.

- هر تک‌تایی، $\phi(x^\gamma)$ ، که در تبدیل لورنتس ناورد بماند،

$$\phi'(x') = \phi'(\Lambda x) = \phi(x),$$

کمیت چارنرده‌ای یا به اختصار نرده نامیده خواهد شد.

مثال: حاصل ضرب داخلی دو چاربردار پادوردا و هموردا، $v^\alpha u_\alpha$ ، یک کمیت نرده‌ای است. درستی این گزاره را نشان دهید.

عملگرهای دیفرانسیلی:

تعمیم مفاهیمی مانند گرادیان، دیورژانس، و کرل از فضای سه بعدی به فضا-زمان چاربع‌دی و دیدن تبدیل لورنتس آن‌ها آسان است. کافی است توجه کنیم که $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$ یک عملگر دیفرانسیلی برداری همورداست و به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\beta} = \Lambda^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial x'^\beta} = (\Lambda^{-1})_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x'^\beta}, \quad (18.3)$$

$$\partial'_\beta = \frac{\partial}{\partial x'^\beta} = \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} = (\Lambda^{-1})^\gamma_\beta \frac{\partial}{\partial x^\gamma} = \Lambda_\beta^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma}. \quad (19.3)$$

همزاد پادوردای ∂_α به صورت زیر است:

$$\partial^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\partial_1, -\partial_2, -\partial_3 \right).$$

- چارگرادیان: اثر هر کدام از دو عملگر ∂_α و ∂^α روی یک کمیت چارنرده‌ای چاربردار هموردا یا پادوردا می‌دهد (تعمیم گرادیان):

$$\partial_\alpha \Phi = \left(\frac{1}{c} \partial_t \Phi, \partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi, \partial_3 \Phi \right),$$

$$\partial^\alpha \Phi = \left(\frac{1}{c} \partial_t \Phi, -\partial_1 \Phi, -\partial_2 \Phi, -\partial_3 \Phi \right).$$

این عمل قابل تعمیم است، با دو یا چند بار عمل روی یک چارنرده‌ای تانسور مرتبه دو یا مرتبه چند به دست می‌آید. هم‌چنین با هر بار عمل چارگرادیان روی یک تانسور از مرتبه n ، تانسور مرتبه $n+1$ به دست می‌آید. به طور مثال، $\partial_\alpha u^\beta$ یک تانسور مرتبه دو با اندیس پادوردای β و هموردای α است.

- عملگر $\partial^\alpha \partial_\alpha = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ ، یک اپراتور دیفرانسیلی نرده‌ای است.

- دیورژانس بردار پادوردا یا هموردا به شرح زیر است: $\partial_\alpha u^\alpha = \partial^\alpha u_\alpha$.

• کرل چاربردار پادوردا یا هم‌وردا به شرح زیر است:

$$\partial_\beta u_\alpha - \partial_\alpha u_\beta, \quad \partial^\beta u^\alpha - \partial^\alpha u^\beta.$$

کرل در فضا-زمان چاربعدهی یک تانسور مرتبه دو پادقرینه است.

۱.۵.۳ مولدهای تبدیل‌های لورنتس

این بخش کم و بیش پیش‌رفته است و در مانده کتاب کم‌تر به آن خواهیم گشت. در خوانش اول خواننده می‌تواند آن را کنار بگذارد.

سخن را با چرخش محورهای مختصات حول محور x ها به اندازه زاویه ϕ آغاز کنیم. ماتریس تبدیل عبارت است از:

$$\Lambda(\phi) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{array} \right]$$

چرخش به اندازه ϕ را می‌توان دنباله‌ای از چرخش‌های کوچک $\Delta\phi = \phi/N$ در حد $N \mapsto \infty$ دانست:

$$\Lambda(\phi) = \lim_{N \mapsto \infty} \Lambda^N(\Delta\phi),$$

که در آن تا مرتبه اول $\Delta\phi$:

$$\Lambda(\Delta\phi) = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta\phi \\ 0 & 0 & \Delta\phi & 1 \end{array} \right] = I + \Delta\phi S_1,$$

$$S_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

ماتریس S_1 را مولد چرخش حول محور x ‌ها خواهیم نامید. توان‌های زوج و فرد آن چنین‌اند:

$$(S_1)^{2n} = (-1)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (S_1)^{2n+1} = (-1)^n S_1.$$

با جای‌گذاری این عبارت‌ها در معادله $\Lambda(\phi)$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \Lambda(\phi) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (I + \frac{\phi}{N} S_1)^N = \exp(\phi S_1) \quad (20.3) \\ &= I + S_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\phi^{2k}}{(2k)!} + S_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= I + S_1^2 (\cos \phi - 1) + S_1 \sin \phi \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

در تبدیل $\Lambda(\phi)$ به صورت نهایی آن از بسط سری تابع نمایی $\exp(\phi S_1)$ و توان‌های زوج و فرد S_1 استفاده شده است. برای چرخش حول محورهای y و z فهرست را با دو مولد S_2 و S_3 کامل می‌کنیم:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (21.3)$$

همین کار را می‌توانیم برای سه حرکت در سه امتداد x و y و z انجام دهیم و به سه مولد

دیگر برای تولید حرکت O' نسبت به O (تبدیل‌های لورنتس ساده) برسیم:

$$K_1 = \left[\begin{array}{c|ccc} \circ & 1 & \circ & \circ \\ \hline 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{array} \right], \quad K_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} \circ & \circ & 1 & \circ \\ \hline \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{array} \right], \quad K_3 = \left[\begin{array}{c|ccc} \circ & \circ & \circ & 1 \\ \hline \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & \circ & \circ & \circ \end{array} \right]. \quad (22.3)$$

به یاد بیاوریم تبدیل از یک چارچوب لخت به چارچوب لخت دیگر را که با سرعت $\beta = v/c$ حرکت می‌کند، چرخش در صفحه t و یکی از مختصات x و y و z به اندازه زاویه موهومی $\zeta = \operatorname{tgh}^{-1} \beta$ نامیده‌ایم. معادله (۲۰.۳) را می‌توان برای سه دوران حول سه محور مختصات و سه حرکت در امتداد سه محور به صورت زیر گسترش داد و نوشت:

$$\Lambda(\Phi, \zeta) = \exp(-\Phi \cdot \mathbf{S} - \zeta \cdot \mathbf{K}). \quad (23.3)$$

که در آن $\Phi : (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ نماینده سه دوران، $\zeta : (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ نماینده سه حرکت، و $\mathbf{S}$ و $\mathbf{K}$ شش مولد معادله‌های (۲۱.۳) و (۲۲.۳) هستند. مولدهای S و K با هم جابه‌جا نمی‌شوند. قلاب‌های جابه‌جایی آن‌ها چنین است:

$$[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k, \quad [S_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} S_k. \quad (24.3)$$

قلاب‌های جابه‌جایی بالا ساختار جبری گروه لورنتس، $O(3, 1)$ ، را نشان می‌دهند، که به معنای جبر ماتریس‌های متعامد (Orthogonal) در سه بعد فضا و یک بعد زمان هستند. قلاب‌های $[S, S]$ جبر تکانه زاویه‌ای است و زیرگروه $O(3)$ از $O(3, 1)$ است. جبر $O(3)$ بسته است، به این معنا که دو چرخش در دو امتداد مختلف، خود برابر یک چرخش معادل است. چنین ویژگی در قلاب‌های $[K, K]$ دیده نمی‌شود. نتیجه آن که برآیند دو حرکت لخت در دو امتداد مختلف برابر با یک حرکت لخت معادل نیست، با یک چرخش نیز همراه است. قلاب‌های جابه‌جایی $[K, S]$ همین را نشان می‌دهد و در زیر به آن می‌پردازیم.

سه چارچوب O و O' و O'' را در نظر بگیریم. محورهاى O' موازی محورهاى O باشند و با سرعت $\vec{\beta}$ نسبت به آن حرکت کنند. محورهاى O'' موازی محورهاى O' باشند و نسبت به آن با سرعت $\vec{\beta}'$ در سویی به جز سوی $\vec{\beta}$ حرکت کنند. حرکت O'' نسبت به O

برابر با یک حرکتِ لختِ معادل، یعنی یک تبدیل لورنتس ساده نخواهد بود. محورهای O'' نسبت به O چرخش خواهند داشت. به عبارت دیگر اصل آشنای هندسه اقلیدسی که دو خط موازی با خط سوم، خود موازی‌اند، در فضا-زمان مینکوسکی شکسته می‌شود. این اثر سینماتیک در ژيروسکوپ‌ی که در یک سفینه فضایی حرکت شتاب‌دار دور زمین دارد، یا در اسپین الکترونی که دور هسته اتم حرکت شتاب‌دار دارد، سبب حرکت تقدیمی ژيروسکوپ یا اسپین الکترون می‌شود. در مورد الکترون، تقدیم اسپین جفتیدگی اسپین و تکانه زاویه‌ای مداری الکترون را در پی دارد (L-S coupling)، و هامیلتونی ناشی از آن ترازهای انرژی اتم را به هم می‌ریزد. اثر اخیر به نام حرکت تقدیمی توماس (Thomas precession)، (۱۹۲۵)، شناخته می‌شود و در زیر به آن می‌پردازیم.

۲.۵.۳ حرکت تقدیمی توماس

در گفتار زیر برای بیان آسان منظور، از واژه ژيروسکوپ استفاده خواهیم کرد. منظور از آن هر سیستم دینامیکی است که بتوانیم یک چاربردار به آن نسبت دهیم. این چاربردار می‌تواند چاربردار تکانه زاویه‌ای، چار اسپین، یا آشنا تر از همه چاربردار زمان-مکان یک سیستم در چارچوب سکون سیستم باشد. نشان می‌دهیم، اگر سرعت سیستم $\mathbf{v}$ و شتاب آن $\mathbf{a}$ باشد، چاربردار مورد نظر می‌چرخد و سرعت زاویه‌ای چرخش متناسب با $\mathbf{v} \times \mathbf{a}$ خواهد بود. این چرخش که از آن با نام حرکت تقدیمی توماس یاد خواهیم کرد یک پدیده نسبیتی است و در حد سرعت‌های کم به صفر می‌گراید.

مانده این بخش تا اندازه‌ای پیچیده است. در خوانش اول می‌توان آن را کنار گذاشت. یک ژيروسکوپ را که در یک سفینه فضایی دور زمین می‌گردد و شتاب دارد در نظر بگیریم. O چارچوب لختِ مستقر در زمین باشد. در لحظه t سرعت ژيروسکوپ نسبت به O ، $\vec{\beta}$ ، باشد. چارچوب دیگری در سفینه تصور کنیم که در همان لحظه با سرعت یک‌نواخت $\vec{\beta}$ ، حرکت می‌کند ولی شتاب ژيروسکوپ را ندارد. آن را با $O'(t)$ نشان دهیم و چارچوب سکون ژيروسکوپ در لحظه t بنامیم. تبدیل از O به $O'(t)$ یک تبدیل لورنتس ساده است و اگر محورهای دو چارچوب را موازی هم انتخاب کنیم موازی هم می‌مانند. در لحظه $t + \delta t$ سرعت ژيروسکوپ $\vec{\beta} + \delta \vec{\beta}$ شده است. چارچوب سکون جدید را $O''(t + \delta t)$ بنامیم. تبدیل از O به $O''(t + \delta t)$ هنوز تبدیل لورنتس ساده است و می‌توانیم محورهای O

$O''(t + \delta t)$ را موازی هم انتخاب کنیم. ولی از نظر ناظر $O'(t)$ تغییرهای نظیر در زمان و سرعت ژيروسکوپ، $\delta t'$ و $\delta \vec{\beta}'$ است. هر فاصله زمانی $\delta t'$ از نظر O اتساع پیدا می‌کند، و هر فاصله فضایی موازی با $\vec{\beta}$ منقبض می‌شود، و هر فاصله فضایی عمود بر $\vec{\beta}$ بی‌تغییر می‌ماند. بنابراین:

$$\delta t' = \frac{1}{\gamma} \delta t, \quad \delta x'_{\parallel} = \gamma \delta x_{\parallel}, \quad \delta x'_{\perp} = \delta x_{\perp}.$$

با توجه به این رابطه‌ها تبدیل سرعت $\delta \vec{\beta}' = \delta \mathbf{x}' / \delta t'$ از O به $O'(t)$ چنین می‌شود:

$$\delta \beta'_{\parallel} = \gamma^2 \delta \beta_{\parallel}, \quad \delta \beta'_{\perp} = \gamma \delta \beta_{\perp}.$$

حال از نگاه ناظر O' به تبدیل از $O'(t)$ به چارچوب سکون جدید ژيروسکوپ، پس از گذشت زمان $\delta t'$ بپردازیم. برای او چارچوب سکون جدید را $O'''(\delta t')$ بنامیم. تبدیل هنوز تبدیل لورنتس ساده است و محورهای $O'(t)$ و $O'''(\delta t')$ باهم موازی‌اند. رابطه بین مختصات چهار چارچوب O ، $O'(t)$ ، $O''(t + \delta t)$ و $O'''(\delta t')$ که تا این جا تعریف کرده‌ایم چنین است:

$$x' = \Lambda(\vec{\beta})x, \quad x = \Lambda(-\vec{\beta})x', \quad (25.3)$$

$$x'' = \Lambda(\vec{\beta} + \delta \vec{\beta})x, \quad x = \Lambda(-\vec{\beta} - \delta \vec{\beta})x'', \quad (26.3)$$

$$x''' = \Lambda(\delta \vec{\beta}')x', \quad x' = \Lambda(-\delta \vec{\beta}')x'''. \quad (27.3)$$

در معادله‌های بالا، Λ ها ماتریس‌های تبدیل لورنتس ساده از نوع معادله (۵.۳) هستند. مختصات x''' برابر x'' نیست. تفاوت آن‌ها با توجه به معادله‌های (۲۵.۳) - (۲۷.۳) چنین است:

$$x''' - x'' = [\Lambda(\delta \vec{\beta}')\Lambda(\vec{\beta})\Lambda(-\vec{\beta} - \delta \vec{\beta}) - I]x''. \quad (28.3)$$

مسیر ژيروسکوپ از t به $t + \delta t$ یک صفحه است. آن را صفحه (x, y) چارچوب‌های O و $O'(t)$ بگزینیم و $\vec{\beta}$ در امتداد x باشد. با این گزینش، ماتریس $\Lambda(\delta \vec{\beta}')$ یک تبدیل بی‌نهایت کوچک است که در آن $\delta \vec{\beta}'$ دو مولفه در امتدادهای x و y دارد و برابر معادله (۳.۲۳) صورت آن چنین است:

$$\Lambda(\delta \vec{\beta}') = I - \delta \beta'_{\parallel} K_1 - \delta \beta'_{\perp} K_2, \quad (29.3)$$

که در آن I ماتریس واحد 4×4 و K_1 و K_2 مولدهای معادله (۲۲.۳) هستند. ماتریس $\Lambda(\vec{\beta})$ یک تبدیل لورنتس ساده در صفحه (x, t) است. صورت آن از معادله (۵.۳) چنین است:

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + (\gamma - 1)K_1^2 - \gamma\beta K_1, \quad (30.3)$$

$$\gamma(\vec{\beta}) = (1 - |\vec{\beta}|^2)^{-1/2}.$$

ماتریس $\Lambda(-\vec{\beta} - \delta\vec{\beta})$ در مسئله پایانی بخش (۲۰.۵.۳) داده شده است. تنها باید توجه داشت تا تقریب درجه اول $\delta\vec{\beta}$ باید از تقریب‌های زیر استفاده کرد:

$$|\vec{\beta} + \delta\vec{\beta}|^2 = (\beta + \delta\beta_{\parallel})^2 + \delta\beta_{\perp}^2 \approx \beta^2 + 2\beta\delta\beta_{\parallel} + O^2(\delta\vec{\beta}),$$

$$|\vec{\beta} + \delta\vec{\beta}| \approx \beta + \delta\beta_{\parallel} + O^2(\delta\vec{\beta}).$$

با داشتن این روابط، خواهیم داشت:

$$\Lambda(-\vec{\beta} - \delta\vec{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma(1 + \gamma^2\beta\delta\beta_{\parallel}) & \gamma(\beta + \gamma^2\delta\beta_{\parallel}) & \gamma\delta\beta_{\perp} & 0 \\ \gamma(\beta + \gamma^2\delta\beta_{\parallel}) & \gamma(1 + \gamma^2\beta\delta\beta_{\parallel}) & -(\gamma - 1)\frac{\delta\beta_{\perp}}{\beta} & 0 \\ \gamma\delta\beta_{\perp} & -(\gamma - 1)\frac{\delta\beta_{\perp}}{\beta} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I + [(\gamma - 1) + \gamma^3\beta\delta\beta_{\parallel}]K_1^2 + (\gamma\beta + \gamma^3\delta\beta_{\parallel})K_1$$

$$+ \gamma\delta\beta_{\perp}K_2, -\frac{(\gamma - 1)}{\beta^2}\beta\delta\beta_{\perp}\Sigma_3 \quad (31.3)$$

که در آن

$$\Sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32.3)$$

۵.۳. تعریف نرده، بردار، و تانسور - قاعده تبدیل آن‌ها ۴۱

است و در تجزیه ماتریس $\Lambda(-\vec{\beta} - \delta\vec{\beta})$ ظاهر می‌شود. با جای‌گذاری مستقیم ماتریس‌های بالا در معادله (۲۸.۳) و کمی جمع و تفریق، به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{x''' - x''}{\delta t} &= \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2} \beta \frac{\delta\beta_{\perp}}{\delta t} S_{\parallel} x'' = \frac{\gamma^2}{(\gamma + 1)} (\vec{\beta} \times \delta\vec{\beta}) \cdot \mathbf{S} x'' \\ &= \frac{\gamma^2}{(\gamma + 1)} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c^2} \cdot \mathbf{S} x'' = \Omega \cdot \mathbf{S} x'', \quad \Omega = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c^2} \quad (33.3) \end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{a} = \delta\vec{\beta}/\delta t$ و $\mathbf{v} = c\vec{\beta}$ به ترتیب شتاب و سرعت ژيروسکوپ هستند و Ω باید سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی آن تعبیر شود.

مسئله‌ها

۱. نشان دهید وارون ماتریس $\Lambda(\vec{\beta})$ ماتریس $\Lambda(-\Lambda(\vec{\beta}))$ است.
۲. ناوردایی فاصله فضا-زمانی رخدادها را در تحت تبدیل‌های لورنتس نشان دهید. راهنمایی: به جای dx و dt تبدیل یافته آن‌ها را از معادله (۵.۳) قرار دهید.
۳. با استفاده از قانون جمع سرعت‌ها نشان دهید سرعت نور بیش‌ترین سرعت است.
۴. نشان دهید اگر $\phi(x)$ چارنرده‌ای باشد، گرادیان آن، $\partial_{\alpha}\phi$ چاربردار هم‌وردا است.
۵. نشان دهید $\partial_{\alpha}u^{\beta}$ یک چارتانسور مرتبه دو با اندیس هم‌وردای α و پادوردای β است.
۶. نشان دهید $\partial_{\alpha}u^{\alpha}$ چارنرده‌ای است.
۷. درستی رابطه $(\Lambda^{-1})^{\gamma}_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\gamma}$ را با محاسبه مستقیم آن نشان دهید.
۸. از معادله (۱۴.۳) داریم:

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta} = \partial x'^{\alpha} / \partial x^{\beta}.$$

نشان دهید:

$$(\Lambda^{-1})^{\beta}_{\alpha} = \Lambda_{\alpha}^{\beta} = \partial x^{\beta} / \partial x'_{\alpha}.$$

به طوری که:

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta} \Lambda_{\alpha}^{\gamma} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\gamma}_{\beta}.$$

۹. لورنتس ناوردایی $\partial^{\alpha}\partial_{\alpha}$ را نشان دهید.

۱۰. نشان دهید حاصل ضرب داخلی دو چاربردار، $u^\alpha v_\alpha$ ، لورنتس ناورد است. نشان دهید چاردیورژانش چاربردار، $\partial u^\alpha / \partial x^\alpha$ ، لورنتس ناورد است.
۱۱. درستی قلاب‌های جابه‌جایی معادله (۳.۲۴) را نشان دهید.
۱۲. توان‌های زوج و فرد شش مولد S و K را به دست آورید.
۱۳. درستی قلاب‌های جابه‌جایی معادله (۲۴.۳) را نشان دهید.
۱۴. فرض کنید چارچوب O' با سرعت $\vec{\beta} = \beta_1 \hat{x}_1 + \beta_2 \hat{x}_2$ نسبت به O حرکت می‌کند که در آن $\hat{x}_1$ و $\hat{x}_2$ دو بردار واحد در امتداد محورهای ۱ و ۲ هستند. نشان دهید:

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \exp [-(\beta_1 K_1 + \beta_2 K_2) \text{tgh}^{-1} \beta]$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & 0 \\ -\gamma\beta_1 & \gamma - (\gamma-1)\frac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & 0 \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \gamma - (\gamma-1)\frac{\beta_2^2}{\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

که در آن $\gamma(\vec{\beta}) = (1 - \beta_1^2 - \beta_2^2)^{-1/2}$ و $\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$.

۱۵. فرض کنید $\beta_1 \gg \beta_2$ و $\gamma \approx (1 - \beta_1^2)^{-1/2}$. نشان دهید تا تقریب درجه اول β_2 :

$$\Lambda(\beta_1, \beta_2) = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & 0 \\ -\gamma\beta_1 & \gamma & (\gamma-1)\frac{\beta_2}{\beta} & 0 \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma-1)\frac{\beta_2}{\beta} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

فصل ۴

تبدیل‌های لورنتس - سخن دینامیک

۱.۴ هم‌وردایی قانون‌های فیزیک

پیش‌تر گفته شد ناظران لخت نسبت به هم امتیازی ندارند و قانون‌های فیزیک برای همه آن‌ها باید یک‌سان باشند. به زبان ریاضی لازم است قانون‌های فیزیک تحت تبدیل‌های شش‌گانه‌ای که در بخش (۴.۳) گفته شد ناوردا بمانند. چارنرده‌ای‌ها، چاربردارها و چارتانسورها در تبدیل لورنتس صورت نرده‌ای، برداری، و تانسوری خود را نگاه می‌دارند و مناسب‌ترین ساز و کار برای برآوردن این خواسته هستند.

معادله‌های الکترومغناطیس در صورت معمول خود به طور پنهان لورنتس ناوردا هستند. ولی دیدن «ناوردایی آشکار» آن‌ها و انجام آسان اعمال ریاضی مستلزم صورت‌بندی دوباره الکترومغناطیس به صورت رابطه بین چارکمیت‌ها است. در زیر به این کار خواهیم پرداخت. از سوی دیگر مکانیک کلاسیک از تبدیل گالیله پیروی می‌کند. اگر به سفارش انیشتن قرار است همه فیزیک از یک تبدیل پیروی کند و آن هم، به خاطر ثابت جهانی بودن سرعت نور، تبدیل لورنتس باشد، لازم است مکانیک نیوتنی بازبینی شده و از نو ساخته و پرداخته شود. قانون حرکت نیوتن را می‌توان ترمیم کرد و به صورت لورنتس ناوردا درآورد. ولی قانون گرانش او در چارچوب نسبیت خاص نمی‌گنجد و موضوع نسبیت عام است. به آن نیز در بخش دوم کتاب خواهیم پرداخت.

۱.۱.۴ هم‌وردایی آشکار الکترومغناطیس

از اصل پایستگی بار الکتریکی آغاز کنیم. بار الکتریکی را نمی‌توان آفرید و نمی‌توان آن را نابود کرد. چارتایی‌های $J^\alpha : (c\rho, \mathbf{J})$ و $J_\alpha : (c\rho, -\mathbf{J})$ را به ترتیب به عنوان چاربردارهای پادوردا و هم‌وردا بپذیریم و آن‌ها را چاربردارهای چگالی جریان الکتریکی (یا به کوتاهی چاربردارهای جریان) بنامیم. معادله پیوستگی (۳.۲) را برحسب J^α می‌توان به صورت زیر در آورد:

$$\partial_\alpha J^\alpha = \partial^\alpha J_\alpha = 0. \quad (1.4)$$

دیورژانس چاربردارها کمیت‌های چارنرده‌ای‌اند و لورنتس ناوردایی معادله (۱.۴) آشکار است.

از پتانسیل‌های برداری $\mathbf{A}$ و نرده‌ای Φ نیز می‌توان چاربردارهای پادوردا و هم‌وردا ساخت:

$$A^\alpha : (\Phi, \mathbf{A}), \quad A_\alpha : (\Phi, -\mathbf{A}).$$

دو معادله (۹.۲) و (۱۰.۲) برای Φ و $\mathbf{A}$ و همچنین معادله (۸.۲) برای پیمانه لورنتس به صورت زیر در می‌آیند:

$$\partial^\beta \partial_\beta A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\alpha, \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (2.4)$$

برای نوشتن ناوردایی آشکار معادله‌های مکسول، تانسور میدان الکترومغناطیسی را معرفی می‌کنیم:

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$$F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} F^{\gamma\delta} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

تانسورهای میدان پادقرینه‌اند. به دوگان (Dual) میدان الکترومغناطیسی هم نیاز است و آن را با تانسور لوی‌چیویتا (Levi-Civita) می‌سازیم. این تانسور از مرتبه چهار، ثابت، و کاملاً پادقرینه است، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= +1, \quad \text{اگر } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{ جای‌گشت زوج } (0, 1, 2, 3) \text{ باشد} \\ &= -1, \quad \text{اگر } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{ جای‌گشت فرد } (0, 1, 2, 3) \text{ باشد} \\ &= 0, \quad \text{در غیر این صورت}\end{aligned}$$

به یاری تانسور لوی‌چیویتا می‌توان برای هر تانسور پادقرینه مرتبه دو، F ، یک دوگان پادقرینه مرتبه دو، $\mathcal{F}$ ، ساخت:

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta} = \begin{bmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

چنان که دیده می‌شود در فرآیند دوگان‌گیری E با B و B با $-E$ جابه‌جا شده است. به یاری تانسور میدان و دوگان آن جفت معادله‌های ناهمگن و همگن مکسول به صورت زیر در می‌آیند:

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \frac{4\pi}{c}J^\alpha, \quad (6.4)$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0: \quad F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} = 0. \quad (7.4)$$

از تانسور میدان و دوگان آن می‌توان دو کمیت چارنرده‌ای ساخت که در تبدیل لورنتس ناوردا بمانند:

$$-\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\beta\alpha} = (E^2 - B^2), \quad \frac{1}{4}F^{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\beta\alpha} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \quad (8.4)$$

در صفحه‌های آینده به این چارنرده‌ای‌ها خواهیم پرداخت.

تانسور انرژی-تکانه: در زیربخش ۳.۲ از چگالی انرژی u ، و شار آن، بردار پوینتینگ S ؛ هم‌چنین چگالی تکانه g ، و شار آن تانسور تنش مکسول Θ_{ij} ، سخن گفتیم. همه این‌ها را می‌توان در تانسور 4×4 انرژی-تکانه جا داد و به آشکارا به صورت لورنتس ناورد را آورد:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi} (F^{\alpha\gamma} F_{\gamma}^{\beta} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} F_{\delta\gamma})$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} u = \frac{1}{4\pi} (E^2 + B^2) & cg = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \\ \hline \frac{1}{c} \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) & -\Theta = -[\Theta_{ij}] \end{array} \right]. \quad (9.4)$$

در معادله (۹.۴) در سطر اول چگالی انرژی و سه مولفه چگالی تکانه g جا گرفته است. ستون سه‌تایی زیر هر کدام از این چهار درایه، شار آن مولفه از چگالی است. به طور مثال، u چگالی انرژی است. ستون زیر آن بردار پوینتینگ S ، شار انرژی است. هم‌چنین، g ، مولفه ۱ چگالی تکانه و ستون زیر آن، Θ_{i1} ، شار آن است. معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر پایداری انرژی و تکانه، معادله‌های (۲۲.۲) و (۲). در معادله زیر خلاصه می‌شوند:

$$\partial_{\beta} T^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} J_{\beta}. \quad (10.4)$$

معادله‌های (۱۰.۴) - (۱۰.۴) صورت لورنتس ناوردای قانون‌های اصلی الکترومغناطیس هستند. همه آن‌ها رابطه بین چار کمیت‌ها هستند و آشکارا لورنتس ناوردایند.

مسئله‌ها

۱. درستی معادله (۴.۴) را نشان دهید.
مولفه صفر معادله (۶.۴) معادله پواسون است. درستی آن را نشان دهید.
مولفه صفر معادله (۷.۴) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ است. درستی آن را نشان دهید.
۲. نشان دهید تانسور لوی‌چیویتا تحت تبدیل‌های لورنتس ناورد است. راهنمایی:

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda^{\alpha}_{\lambda} \Lambda^{\beta}_{\mu} \Lambda^{\gamma}_{\nu} \Lambda^{\delta}_{\rho} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}.$$

۳. درستی معادله‌های (۸.۴) را نشان دهید.

۲.۱.۴ هم‌وردایی آشکار مکانیک

تا پیش از پیدایش نسبیت خاص، مکانیک کلاسیک و الکترومغناطیس راه جدا می‌رفتند و کمتر کسی نگران ریشه‌های مشترک آن‌ها بود. لورنتس ناوردایی نه تنها به این دو زیرشاخه بزرگ فیزیک وحدت بخشید و هر دو را زیر چتر یک منطق ریاضی درآورد، بلکه وحدت‌جویی در نظریه‌های علمی، و در راس آن‌ها فیزیک، را برای اندیشمندان به صورت یک آرمان درآورد. چه کوشش‌هایی انجام گرفته و چه پربار بوده‌اند.

اصل ثابت جهانی بودن سرعت نور و لورنتس ناوردایی لازم و ملزوم هم‌اند. قانون جمع سرعت‌های گالیلئ با لورنتس ناوردایی ناسازگار است. به ناچار سینماتیک گالیلئ‌ای باید رها شود. از سوی دیگر دینامیک نیوتنی بر اصل پایستگی تکانه خطی و به طور ضمنی بر اصل پایستگی انرژی بنا شده است. اصول پایستگی در مکانیک نسبیتی نیز اعتبار دارند و می‌شود قانون حرکت نیوتن (اصل پایستگی تکانه خطی) را با کمی دست‌کاری به صورت لورنتس ناورداد درآورد. در جست‌وجوی قانون حرکت لورنتس ناورداد، نخست مفاهیم سینماتیک و دینامیک در فضای سه بعدی را به فضا-زمان چاربعدهای گسترش دهیم:

- چارسرعت: $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$ چاربردار پادوردا است، زیرا $d\tau$ چارنرده‌ای و dx^α چاربردار است. رابطه آن با سه‌سرعت، $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt$ ، با توجه به $d\tau = dt/\gamma(u)$ چنین است:

$$U^\alpha = \gamma(u)(c, \mathbf{u}), \quad U_\alpha U^\alpha = c^2.$$

- جرم سکون: هر متحرک در «چارچوب سکون» خود جرمی دارد. این جرم را با آن‌چه در قانون حرکت نیوتن جرم ماندی (inertia) نامیده می‌شود یکسان خواهیم دانست و بنا به تعریفی که شد چارنرده‌ای و لورنتس ناورداد است.

- چارتکانه خطی: $p^\alpha = mU^\alpha = \gamma(u)m(c, \mathbf{u})$, $p^\alpha p_\alpha = m^2 c^2$ چاربردار پادوردا است و تعمیم سه‌تکانه $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ است. مولفه صفر چارتکانه تعبیر انرژی دارد،

$$\begin{aligned} p^0 &= \gamma(u)mc = mc \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2} mu^2 + \dots \right) = \frac{1}{c} \mathcal{E}. \end{aligned}$$

جمله mc^2 را انرژی در حال سکون گفته‌اند و $\frac{1}{2}mu^2$ انرژی جنبشی کلاسیک ذره است. بنابراین بی‌تناسب نیست $\mathcal{E} = p^0 c = \gamma mc^2$ را انرژی ذره در حال حرکت با سرعت $\mathbf{u}$ بنامیم.

- چارنیرو: نیروهای شناخته شده طبیعت چهار گروه‌اند: نیروهای بلندبرد گرانشی بین هر دو جرم گرانشه، نیروهای بلندبرد الکترومغناطیسی بین هر دو بار الکتریکی یا چند قطبی‌های الکتریکی و مغناطیسی، و نیروهای کوتاه‌برد ضعیف و قوی بین ذره‌های بنیادی. در دنیای بزرگ‌مقیاس دور و برمان، مادام که به پدیده‌هایی مانند فتوالکتریسته و شکافت هسته‌ای و مانند آن‌ها نپردازیم، نیروهای ضعیف و قوی خود را نشان نمی‌دهند. نیروهای الکترومغناطیسی نیز، به خاطر وجود بارهای مثبت و منفی در محیط، بلندبردی خود را پنهان می‌کنند (Deby sheilding) یا حداکثر خود را به صورت نیروهای برخورد و مالش بین اجسام سخت و نرم، و فشار و چسبندگی در شاره‌ها نشان می‌دهند.

- نیروی گرانش نیوتن علی‌رغم همه کارایی و ظرافتی که در کاربردهای زمینی و آسمانی از خود نشان داده است، در چارچوب نسبیت خاص نمی‌گنجد و موضوع نسبیت عام است.

- نیروهای الاستیک و چسبندگی و فشار اکثراً قاعده‌های آمپری دارند، و با دشواری در فرمول‌بندی نسبیت خاص می‌گنجد. از سوی دیگر این دسته از نیروها را بیشتر در سیستم‌های ماکرو و در سرعت‌های کم می‌بینیم. بنابراین به بررسی آن‌ها در این مجال که به سرعت‌های زیاد توجه داریم نمی‌پردازیم.

- ولی نیروی لورنتس (نیروی وارد به ذره باردار در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی) را می‌توان به آسانی به چاربردار ارتقا داد.

قانون حرکت نیوتن برای ذره باردار در میدان الکترومغناطیسی چنین است:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{q}{c}(\mathbf{E}c + \mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

آن را در $\gamma(u)$ ضرب کنیم و مولفه ۱ آن را بررسی کنیم:

$$\begin{aligned}\gamma \frac{dp^1}{dt} &= \frac{dp^1}{d\tau} = \frac{q}{c} (E_1 \gamma c + B_2 \gamma u_2 - B_3 \gamma u_3) \\ &= \frac{q}{c} (F^{10} U_0 + F^{12} U_2 + F^{13} U_3) = \frac{q}{c} F^{1\beta} U_\beta.\end{aligned}$$

در این عبارت از تانسور میدان برای جای‌گذاری مولفه‌های E و B و از چارسرعت برای جای‌گذاری مولفه‌های سه‌سرعت یاری گرفته‌ایم. برای دو مولفه دیگر کافی است زیرنگاشت ۱ را با ۲ و ۳ عوض کنیم. در گام نهایی، برای تعمیم به چهار بعد، مولفه صفر را نیز به آن می‌افزاییم و به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} U_\beta, \quad \frac{dU^\alpha}{d\tau} = \frac{q}{mc} F^{\alpha\beta} U_\beta. \quad (11.4)$$

معادله (۱۱.۴) رابطه بین دو چاربردار است، لورنتس ناوردایی آشکار دارد، و گسترش قانون حرکت نیوتن در فضا-زمان مینکوسکی است:

تغییر در چارتکانه یک سیستم بر حسب ویژه‌زمان سیستم برابر است با چارنیروی وارد بر سیستم.

مولفه صفر معادله (۱۱.۴) که به نظر می‌رسد بی‌مقدمه وارد صحنه شده، آشناست:

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c} \gamma \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q}{c} F^{0j} U_j = \frac{q}{c} \gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} \implies \frac{d\mathcal{E}}{dt} = q \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}.$$

تعبیر روشن است، تغییر در انرژی ذره برابر است با کار میدان الکتریکی روی ذره.

اسپین:

ذره‌های بنیادی افزون بر جرم و بار الکتریکی، ویژگی‌های کوانتومی دیگری مانند اسپین، ایزواسپین، عددهای لپتونی و باریونی، و ... دارند. از این میان اسپین طبیعت تکانه زاویه‌ای دارد و در فضا-زمان چاربعدهای تعریف می‌شود. اگر ذره باردار باشد به خاطر اسپین گشتاور مغناطیسی پیدا می‌کند و ذره در برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی شرکت می‌جوید.

به عنوان اصل بپذیریم اسپین ذره چاربردار است، و در چارچوب سکون ذره، تنها مولفه‌های مکانی دارد و مولفه زمانی آن صفر است،

$$S_\alpha|_{rest} = (0, \mathbf{s}).$$

در این عبارت، سه‌بردار اسپین در چارچوب سکون ذره را با $\mathbf{s}$ کوچک نشان داده‌ایم. از سوی دیگر چارسرعت ذره در چارچوب سکون ذره تنها مولفه زمانی دارد و مولفه‌های مکانی ندارد،

$$U^\alpha|_{rest} = (c, 0).$$

حاصل ضرب آن‌ها صفر است، $U^\alpha S_\alpha|_{rest} = 0$. ولی این رابطه لورنتس ناورد است. نه تنها در چارچوب سکون ذره، بلکه در هر چارچوب لخت دیگر نیز باید درست باشد. بنابراین در هر چارچوب عام لخت باید داشته باشیم: $U^\alpha S_\alpha = 0$. نتیجه: چاراسپین در همه حال عمود بر چارسرعت است، اندازه‌ای ثابت دارد، و در تبدیل مختصات از تبدیل‌های لورنتس پیروی می‌کند.

$$U^\alpha S_\alpha = 0, \quad S_\alpha S^\alpha = \text{const.} \quad (12.4)$$

$$S_\alpha = \Lambda_\alpha^\delta(\vec{\beta}) S_\delta|_{rest} \quad S_0 = \gamma \beta s_\parallel, \quad S_\parallel = \gamma s_\parallel, \quad S_\perp = s_\perp.$$

$$(13.4)$$

یادآوری می‌شود در این معادله $\mathbf{s}$ سه‌بردار اسپین در چارچوب سکون ذره و $(S_\perp, S_\parallel, S_0)$ به ترتیب مولفه‌های صفر، موازی با، و عمود بر $\vec{\beta}$ است. برای به دست آوردن تغییرات زمانی اسپین از معادله اول (12.4) نسبت به τ مشتق می‌گیریم و به جای $dU/d\tau$ از معادله (11.4) جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{dS_\alpha}{d\tau} U^\alpha + S_\beta \frac{dU^\beta}{d\tau} = \left(\frac{dS_\alpha}{d\tau} - \frac{e}{mc} F_{\alpha\beta} S^\beta \right) U^\alpha = 0. \quad (14.4)$$

چاربردار درون پُرانتز در این معادله عمود بر U^α است. با ضرب درون پُرانتز به S^α و با توجه به ثابت بودن اندازه اسپین و پادقیرنگی $F_{\alpha\beta}$ ، به آشکار می‌توان دید که به S^α نیز عمود است. بارگمن، میچل و تلگدی آن را چنین می‌نویسند:

$$\frac{dS_\alpha}{d\tau} - \frac{e}{mc} F_{\alpha\beta} S^\beta = \left(\frac{g}{2} - 1 \right) \frac{e}{mc} \left(F_{\alpha\beta} S^\beta + \frac{1}{c^2} U_\alpha F_{\beta\gamma} S^\beta U^\gamma \right).$$

طرف راست این معادله از ضرب بردارهای سرعت و شتاب، خود اسپین، و تنجش آن‌ها ساخته شده است. ضریب تناسب بی‌بعد $a = g/2 - 1$ را آنومالی گشتاور مغناطیسی ذره، و فاکتور g را Gyromagnetic ratio می‌نامند. سرانجام معادله تحول اسپین با کمی جمع و تفریق به صورت زیر به دست می‌آید (نگاه کنید به [۱۰]):

$$\frac{dS_\alpha}{d\tau} = \frac{e}{2mc} \left[g F_{\alpha\beta} S^\beta + \frac{1}{c} (g - 2) U_\alpha (F_{\beta\gamma} S^\beta U^\gamma) \right]. \quad (15.4)$$

آنومالی مغناطیسی را نمی‌توان از فیزیک کلاسیک به دست آورد. به الکترودینامیک کوانتومی نیاز است. برای الکترون دیراک آنومالی مغناطیسی دقیقاً صفر است. با در نظر گرفتن برهم‌کنش الکترون و قطبش خلأ (این که الکترون می‌تواند از خلأ فوتون مجازی نشر و جذب کند)، شوینگر (۱۹۴۸) آن را $a = \alpha/2\pi$ به دست آورده است، که در آن $\alpha = e^2/2hc = 1/137$ ثابت ساختار ظریف (Fine structure constant) است. امروزه آنومالی گشتاور مغناطیسی الکترون به طور نظری تا مرتبه α^4 و در آزمایشگاه تا 12 رقم اعشار به دست آمده است. هم‌خوانی یافته‌های نظری و آزمایشگاهی از بزرگ‌ترین پیروزی‌های نظریه کوانتومی میدان‌ها به حساب می‌آید.

هم‌وردایی آشکار الکترومغناطیس و الکترودینامیک اکنون کامل شده است. برای دسترسی آسان، فرمول‌های کلیدی را در جدول زیر جمع‌آوری می‌کنیم:

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = \begin{bmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_\beta F^{\alpha\beta} &= \frac{4\pi}{c} J^\alpha \\
 \partial_\beta \mathcal{F}^{\alpha\beta} &= 0, \quad \text{or} \quad F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha} = 0 \\
 \partial^\beta \partial_\beta A^\alpha &= \frac{4\pi}{c} J^\alpha, \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0 \\
 T^{\alpha\beta} &= T^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi} (F^{\alpha\gamma} F_\gamma^\beta + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} F_{\gamma\delta}) \\
 \partial_\beta T^{\alpha\beta} &= F^{\alpha\beta} J_\beta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_\alpha J^\alpha &= \partial^\alpha J_\alpha = 0 \\
 \frac{dp^\alpha}{d\tau} &= \frac{q}{c} F^{\alpha\beta} U_\beta \\
 \frac{dS_\alpha}{d\tau} &= \frac{e}{4mc} \left[g F_{\alpha\beta} S^\beta + \frac{1}{c^2} (g - 2) U_\alpha (F_{\beta\gamma} S^\beta U^\gamma) \right].
 \end{aligned}$$

۲.۴ چند کاربرد تبدیل‌های لورنتس

۱.۲.۴ جابه‌جایی دپلر و ابیراهی نور ستارگان

در بررسی موج الکترومغناطیسی، معادله‌های (۱۲.۲) و (۱۳.۲) گفته شد فاز موج زاویه است، $(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ ، و زاویه یک کمیت چارنرده‌ای و بنابراین لورنتس ناورد است. آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha : (ct, \mathbf{x}), \quad k_\alpha : (\omega/c, -\mathbf{k}).$$

در طرف چپ این معادله، فاز موج کمیت چارنرده‌ای است. در طرف راست x^α چاربردار پادورد است، بنابراین k_α باید چاربردار هم‌وردا فرض شود و تحت تبدیل‌های لورنتس مثل چاربردار هم‌وردا تبدیل شود. آن را چاربردار انتشار خواهیم نامید. حال فرض کنیم چشمه موج در چارچوب O' ساکن است، بسامد و بردار انتشار موج در آن ω' و $\mathbf{k}'$ است. و O' نسبت به O با سرعت $\mathbf{v}$ حرکت می‌کند. تبدیل k'_α در O' به k_α در O تبدیل لورنتس است:

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k_\parallel \\ \mathbf{k}_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ k'_\parallel \\ \mathbf{k}'_\perp \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad (16.4)$$

$$\frac{\omega}{c} = \gamma \left(\frac{\omega'}{c} - \beta k'_{\parallel} \right) \implies \omega = \gamma(1 - \beta_{\parallel})\omega', \quad (17.4)$$

$$k_{\parallel} = \gamma \left(-\beta \frac{\omega'}{c} + k'_{\parallel} \right) \implies k_{\parallel} = \gamma(k'_{\parallel} - \beta k'), \quad (18.4)$$

$$k_{\perp} = k'_{\perp}. \quad (19.4)$$

که در آن $k_{\parallel}$ و $k_{\perp}$ ، به ترتیب، مولفه‌های k در امتداد v و عمود بر v هستند. متقابلاً $\beta_{\parallel}$ مولفه v/c در امتداد k است. معادله (۱۷.۴) جابه‌جایی دپلر است:

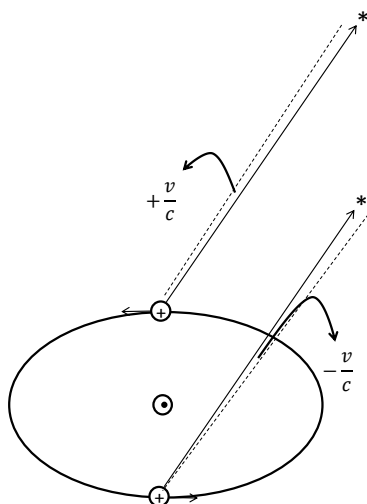
$$\frac{\Delta\omega}{\omega'} = \frac{\omega - \omega'}{\omega'} \approx -\beta_{\parallel} + \frac{1}{2}\beta^2.$$

جمله $-\beta_{\parallel}$ جابه‌جایی کلاسیک و جمله $\beta^2/2$ تصحیح نسبیتی است. اگر چشمه و ناظر از هم دور شوند بسامد کاهش و طول موج افزایش می‌یابد، جابه‌جایی به سرخ است. اگر به هم نزدیک شوند جابه‌جایی به بنفش است.

از معادله‌های (۱۸.۴) و (۱۹.۴) پیداست که سه بردارهای k و k' در یک امتداد نیستند و جبهه‌های موجی که O و O' می‌بینند، نمی‌توانند با هم موازی باشند. k' بردار انتشاری است که از یک چشمه دوردست ساکن در O' نشر می‌شود. و k بردار انتشاری است که به O می‌رسد و چشمه در این چارچوب سرعت $-\beta$ دارد. زاویه‌های k و k' با امتداد v را به ترتیب θ و θ' بنامیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{|k_{\perp}|}{k_{\parallel}} = \frac{|k'_{\perp}|}{\gamma(k'_{\parallel} - k'\beta)} \\ &= \frac{\sin \theta'}{\gamma(\cos \theta' - \beta)} = \frac{\sin \theta'}{(\cos \theta' - \beta)(1 - \beta^2)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (20.4)$$

امتداد انتشار در دو چارچوب یکسان نیست. طرف راست معادله (۲۰.۴) بدون جمله γ جواب کلاسیک است. حضور γ تصحیح نسبیتی آن است. این پدیده در مورد نور ستارگان که از زمین رصد می‌شوند و زمین حرکت سالیانه دور خورشید دارد، برای ستاره‌شناسان از سده‌ها پیش شناخته شده است و آن را ابیراهی گفته‌اند. برابر شکل ۱.۴، اگر زمین در زمانی از ستاره دور می‌شود شش ماه بعد که زمین نیمی از مدار خود را پیموده است به آن نزدیک می‌شود. امتداد نور رسیده به ناظر زمینی در دو موقعیت، موازی هم نخواهد بود و



شکل ۱.۴: ابیراهی ستارگان: ستاره در صفحه آسمان یک بیضی می‌پیماید.

مکان ستاره در میان ستارگان دور دست‌تر عوض خواهد شد. تغییر در مکان ستاره در صفحه آسمان عموماً بیضی است.

۲.۲.۴ تبدیل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی

تانسور میدان از O به O' به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$F^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\gamma} \Lambda^{\beta}_{\delta} F'^{\gamma\delta}. \quad (۲۱.۴)$$

برای تانسور تبدیل معادله (۵.۳)، مولفه‌های E و B چنین‌اند:

$$E_{\parallel} = E'_{\parallel}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}'_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}'), \quad (۲۲.۴)$$

$$B_{\parallel} = B'_{\parallel}, \quad \mathbf{B}_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}'_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'). \quad (۲۳.۴)$$

تبدیل از O به O' با عوض کردن علامت $\boldsymbol{\beta}$ و جابه‌جا کردن زبرنگاشت از سوی چپ به سوی راست معادله انجام می‌گیرد. این دو معادله نشان می‌دهند میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی وجود مستقل ندارند. در یک چارچوب ممکن است تنها میدان الکتریکی یا

مغناطیسی داشت. ولی در چارچوب دیگری که نسبت به آن حرکت می‌کند میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی القایی به وجود بیایند. البته محدودیتی هم وجود دارد. از معادله (۴.۸)، کمیت $(E^2 - B^2)$ چارنرده‌ای و ناورداست. علامت آن هم لورنتس ناورداست. اگر مثبت باشد می‌توان چارچوبی پیدا کرد که B در آن صفر شود و تنها E بماند. اگر منفی باشد می‌توان چارچوبی داشت که E در آن نباشد و تنها B بماند.

مسئله‌ها

- از معادله‌های (۱۴.۲) و (۱۵.۲) نشان دهید $\partial_\alpha J^\alpha = 0$ است.
- درستی معادله‌های (۱۰.۴) را نشان دهید.
- درستی معادله‌های (۱۷.۴) - (۱۹.۴) را نشان دهید.
- درستی معادله‌های (۲۲.۴) و (۲۳.۴) را نشان دهید.
- میدان کولن یک بار نقطه‌ای در چارچوب مختصات O

$$\mathbf{E} = q \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{B} = 0$$

است. ناظر O' با سرعت v نسبت به O حرکت می‌کند. چه میدان E' و B' در مختصات $(t', \mathbf{x}')$ خود خواهد دید؟

۳.۴ دوباره الکترومغناطیس - راه دیگر ، نگاه دیگر

آنچه که در زیر آمده است رهیافت نویسنده [۲۰] برای به دست آوردن هم‌زمان الکترومغناطیس و الکترودینامیک، تنها با پذیرش دو گزاره ساده و بی‌نیاز از قانون‌های آمپیریک و آزمایشگاهی آن است. گزاره‌ها چنین‌اند:

۱. سرعت نور ثابت جهانی است (یا معادل آن، فاصله‌های زمانی-مکانی لورنتس ناورد هستند)،

۲. ذره‌های باردار در پیرامون خود میدان ایجاد می‌کنند و باهم برهم‌کنش دارند. رابطه بین بار ذره‌ها و میدان‌شان خطی و لورنتس ناورد است.

در این صورت‌بندی به بنیان‌های آزمایشگاهی الکترومغناطیس و الکترودینامیک نیازی نیست. بلکه قانون‌های کولن و آمپر و فاراده و ... را می‌توان، بی‌کم و کاست، به صورت قضایای ریاضی به دست آورد. به بحث ریاضی کوتاهی نیاز است.

تعریف دوگان یک تانسور پادقرینه را یادآوری می‌کنیم. دو تانسور پادقرینه F و $\mathcal{F}$ را که به صورت زیر به هم مربوط شوند دوگان هم‌دیگر گفته‌ایم:

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}, \quad F^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{F}_{\gamma\delta}. \quad (24.4)$$

قضیه ۱. اگر F مشتق از یک چاربردار باشد، دیورژانس دوگان آن صفر است:

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha, \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\alpha(\partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma) = 0.$$

با توجه به پادقرینگی تانسور لوی‌چیویتا، صفر شدن چاردیورژانس $\mathcal{F}$ آشکار است.

قضیه ۲. هر تانسور پادقرینه مرتبه دو را می‌توان مجموع دو تانسور پادقرینه دیگر نوشت، که یکی از آن‌ها و دوگان دیگری مشتق از دو چاربردار اند:

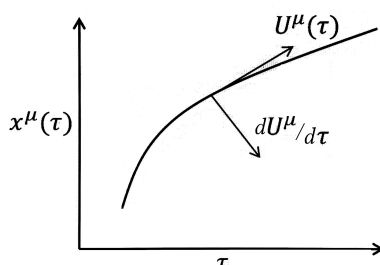
$$F^{\alpha\beta} = F_1^{\alpha\beta} + \mathcal{F}_1^{\alpha\beta}, \quad \mathcal{F}^{\alpha\beta} = \mathcal{F}_1^{\alpha\beta} + F_1^{\alpha\beta} \quad (25.4)$$

$$F_i^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A_i^\beta - \partial^\beta A_i^\alpha, \quad \partial_\gamma A_i^\gamma, \quad i = 1, 2. \quad (26.4)$$

در این معادله‌ها A_1 و A_2 دو چاربردار و تا اینجا نامعلوم‌اند. آزادی در انتخاب پیمانه اجازه می‌دهد چاردیورژانس آن‌ها را صفر بگیریم. برای به دست آوردن A_1 و A_2 کافی است در دو معادله (۲۵.۴) به جای F و $\mathcal{F}$ از معادله‌های (۲۶.۴) جای‌گذاری کنیم، و چاردیورژانس بگیریم و با توجه به قضیه ۱ به دست آوریم:

$$\partial_\beta \partial^\beta A_1^\alpha = \partial_\beta F^{\alpha\beta}, \quad \partial_\beta \partial^\beta A_2^\alpha = \partial_\beta \mathcal{F}^{\alpha\beta}. \quad (27.4)$$

معادله‌های (۲۷.۴) دو معادله موج‌اند. چشمه موج برای A_1 چاردیورژانس F و برای A_2 چاردیورژانس دوگان آن، $\mathcal{F}$ ، است. برای اثبات قضیه کافی است جواب‌های «دیرکرده» (Retarded) آن‌ها را در معادله‌های (۲۵.۴) قرار دهیم و درستی آن‌ها را ببینیم. قضیه‌ای که در این جا گفته شد تعمیمی از قضیه هلمهولتز در جبر بردار هاست: هر سه‌بردار را می‌توان مجموع دو سه‌بردار نوشت که یکی از آن‌ها مشتق از پتانسیل نرده‌ای و دیگری مشتق از پتانسیل برداری است.



شکل ۲.۴: نمایش نمادین چارمسیر ذره بر حسب ویژه زمان ذره. U^α و p^α در روی مسیر تعریف شده‌اند و تا اینجا میدان نیستند.

۱.۳.۴ گفتار سینماتیک

انبوه‌ای از ذره‌های باردار را در نظر بگیریم و حرکت یکی از آن‌ها را در میدان ذره‌های دیگر بررسی کنیم. در این گام آغازین به هیچ پیش‌فرضی درباره چیهستی میدان نیاز نیست، جز این که ذره مورد آزمایش در حضور ذره‌های دیگر حرکت یک‌نواخت ندارد. مسیر ذره موردنظر را در فضا-زمان با $x^\gamma(\tau)$ نشان دهیم که در آن τ ویژه زمان ذره و لورنتس ناورداست. چارسرعت و چارتکانه ذره را

$$U^\alpha(x^\gamma(\tau)), \quad p^\alpha(x^\gamma(\tau)) = mU^\alpha(x^\gamma(\tau)),$$

بنامیم، که در آن m جرم سکون ذره است. بنا به تعریفی که شد جرم سکون ثابت و لورنتس ناورداست، و بردارهای U^α و p^α چار بردارند و نرم آنها نیز ثابت و لورنتس ناورداست:

$$U^\alpha U_\alpha = c^2, \quad p^\alpha p_\alpha = m^2 c^2.$$

توجه شود چاربردارهای U^α و p^α در روی مسیر $x^\gamma(\tau)$ تعریف شده‌اند. میدان، به این معنی که در همه نقاط فضا-زمان تعریف شده باشند، نیستند. چاربردار شتاب ذره را بررسی کنیم:

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{e}{m} F_{\alpha\beta} p^\beta. \quad (28.4)$$

تساوی آخر در معادله (۲۸.۴) تعریف $F_{\alpha\beta}$ است:

$$eF_{\alpha\beta} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (29.4)$$

که در آن e ضریب ثابتی است و به آن بازخواهیم گشت. معادله (۲۸.۴) را در p^α ضرب کنیم، و با توجه به ثابت بودن اندازه چارثکانه به دست آوریم:

$$p^\alpha \frac{dp_\alpha}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d(p^\alpha p_\alpha)}{d\tau} = \frac{e}{m} F_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = 0. \quad (30.4)$$

$F_{\alpha\beta}$ تا به اینجا، همانند U_α و p_α ، در روی مسیر ذره تعریف شده است. ولی با انتخاب مناسب شرایط اولیه حرکت ذره می‌توان از هر نقطه x^γ هر مسیری را گذراند و نتیجه گرفت در هر نقطه از فضا-زمان تابعی مانند $F_{\alpha\beta}$ وجود دارد که مستقل از مسیرهای احتمالی‌ای است که از آن نقطه بگذرند یا نگذرند. با این استدلال $F_{\alpha\beta}$ میدان است، میدان ذره‌هایی که به ذره آزمایشی نیرو وارد می‌کنند و به آن شتاب می‌دهند. از سوی دیگر در معادله (۳۰.۴)، ضریب $p^\alpha p^\beta$ نسبت به جابه‌جایی α و β قرینه است برای صفر شدن معادله لازم است $F_{\alpha\beta}$ پادقرینه باشد:

$$F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}, \quad F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}, \quad \text{tr}(F) = 0. \quad (31.4)$$

بنا به قضیه ۲ که در بالا گفته شد، می‌توان آن را مجموع دو پادقرینه دیگر، که مشتق از دو پتانسیل A و A' هستند، نوشت:

$$\begin{aligned} F^{\alpha\beta} &= (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) + \frac{1}{4} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (\partial_\gamma A'_\delta - \partial_\delta A'_\gamma), \\ \partial_\alpha A^\alpha &= \partial_\alpha A'^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (32.4)$$

۲.۳.۴ گفتار دینامیک

تا به اینجا سینماتیک حرکت ذره آزمایشی را بررسی کرده‌ایم و نتیجه گرفته‌ایم که میدان حاکم بر حرکت ذره در حضور ذره‌های دیگر، یک تانسور پادقرینه مرتبه دو است و می‌توان آن را بر حسب دو پتانسیل برداری نوشت. در جست‌وجوی قانون حاکم بر میدانی که ذره‌ها به وجود آورده‌اند، پیشنهاد می‌کنیم ویژگی‌ای از میدان را با ویژگی همانندی از ذره‌ها برابر بگیریم. از میدان F ، برابر قضیه ۲ و برابر معادله (۲۷.۴) دو چاربردار بی‌دیورژانس می‌توان ساخت:

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = \partial_\beta \partial^\beta A^\alpha, \quad \partial_\beta F^{\alpha\beta} = \partial_\beta \partial^\beta A'^\alpha. \quad (33.4)$$

از ذره‌ها تنها یک چاربردار بی‌دیورژانس به دست می‌آید: واحد حجمی در نقطه $x^\gamma : (t, \mathbf{x})$ در نظر به گیریم. بار ذره‌های موجود در آن را در سرعت ذره‌ها ضرب کنیم و جمع کنیم. به چاربردار جریان ذره‌ها می‌رسیم [۲۲]:

$$\begin{aligned} J^\alpha(x^\gamma) &= \sum_n e_n v_n^\alpha(\mathbf{x}_n(t)) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\ &= \sum_n \int e_n U_n^\alpha(x_n(\tau)) \delta^4(x - x_n(\tau)) d\tau, \quad \partial_\alpha J^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (34.4)$$

برای به دست آوردن معادله‌های حاکم بر میدان می‌توان هر ترکیب خطی از $\partial_\beta F^{\alpha\beta}$ و $\partial_\beta \mathcal{F}^{\alpha\beta}$ را مساوی با J^α گرفت و ترکیب خطی دیگری را برابر صفر گذاشت. ولی همیشه می‌توان تبدیل دوگانی مناسبی پیدا کرد که معادله‌های به دست آمده را به صورت معادله‌های شناخته شده مکسول در بیورد [۱۰]، و آن انتخاب زیر است:

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} = -\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\alpha, \quad (35.4)$$

$$\partial_\beta \mathcal{F}^{\alpha\beta} = -\partial_\beta \partial^\beta A'^\alpha = 0. \quad (36.4)$$

بردار A' را بی‌چشمه گزیده‌ایم. یدک کشیدن آن سودی ندارد. می‌توان آن را در چارچوب آزادی در انتخاب پیمانه همیشه صفر گرفت. به پایان سخن رسیده‌ایم. کافی است $F^{\alpha\beta}$ را میدان الکترومغناطیسی و $J^\alpha : (c\rho, \mathbf{J})$ را چاربردار چگالی بار و جریان الکتریکی بشناسیم. معادله‌های (۳۵.۴) و (۳۶.۴) به ترتیب جفت معادله‌های ناهمگن و همگن مکسول خواهند شد. انتخاب ضریب تناسب $4\pi/c$ برای هماهنگی با سیستم واحدهای الکترومغناطیسی بین‌المللی است.

معادله (۲۸.۴) نیز بر حسب مولفه‌های F ، حرکت ذره تحت نیروی لورنتس را نشان خواهد داد:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{e}{c} F^{\alpha\beta} U_\beta \implies \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (37.4)$$

تک‌قطبی مغناطیسی

دیراک [۵] در ۱۹۳۱ نشان داد، اگر تک‌قطبی مغناطیسی وجود داشته باشد بار الکتریکی باید کوانتیده باشد، به این معنا که بار الکتریکی در هر جای کیهان باید مضرب صحیحی از

بار الکترون باشد. این نتیجه‌گیری دیراک شور و شوقی در جویندگان نظری و آزمایشگاهی تک‌قطبی مغناطیسی به وجود آورد [۱۴] و انواع تک‌قطبی و راه‌های آشکارسازی آن‌ها پی گرفته شد و تا امروز یکی از زمینه‌های مورد علاقه پژوهش‌گران است. تاکنون تک‌قطبی مغناطیسی در کیهان شناخته شده دیده نشده است. ولی، جدای از این که در عالم واقع چه هست و چه نیست، می‌توان دینامیک خودسازگاری همانند الکترومغناطیس ترتیب داد که در آن ذره در کنار بار الکتریکی بار مغناطیسی هم داشته باشد [۱۰]. در فرمول‌بندی‌ای که تا به این جا گفته شده، ترتیب این کار آسان است. در معادله (۲۹.۴) در تعریف تانسور پادقرینه F ، برای ذره تنها یک پارامتر e در نظر گرفتیم و بعدها آن را به بار الکتریکی ذره تعبیر کردیم. حال که می‌دانیم $F_{\alpha\beta}$ در معادله (۲۸.۴) میدان پادقرینه است و هر تانسور پادقرینه را می‌توان به دو پاد قرینه تجزیه کرد، معادله (۲۸.۴) به صورت زیر گسترش دهیم:

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} = eF_{\alpha\beta} + g\mathcal{F}_{\alpha\beta}.$$

که در آن g ویژگی جدیدی برای ذره است و به بار مغناطیسی آن تعبیر خواهد شد. حال برای مجموعه ذره‌ها، علاوه بر چاربردار چگالی بار الکتریکی و جریان الکتریکی، می‌توان مانند معادله (۳۴.۴)، چاربردار بار و جریان مغناطیسی، J_m^α ، تعریف کرد و طرف راست معادله (۳۶.۴) را به جای صفر برابر J_m^α قرار داد:

$$\begin{aligned} J_m^\alpha(x) &= \sum_n \int g_n U_n^\alpha(x_n(\tau)) \delta^4(x - x_n(\tau)) d\tau, \quad \partial_\alpha J_m^\alpha = 0, \\ \partial_\beta F^{\alpha\beta} &= -\partial_\beta \partial^\beta A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\alpha, \\ \partial_\beta \mathcal{F}^{\alpha\beta} &= -\partial_\beta \partial^\beta A'^\alpha = \frac{4\pi}{c} J_m^\alpha. \end{aligned}$$

میدان پروکا (Proca) - فوتون جرم دار

در به دست آوردن معادله‌های میدان به دنبال چاربردارهای بی‌دیورژانس گشتیم. آزادی در انتخاب پیمانه اجازه داد A^α نیز بی‌دیورژانس گزیده شود. بنابراین می‌توانیم معادله (۴.۳۵) را به صورت زیر گسترش دهیم و به میدان پروکا برسیم:

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} + \mu^2 A^\alpha = \frac{4\pi}{c} J^\alpha. \quad (۳۸.۴)$$

که در آن ثابت μ بُعد وارون طول دارد. معادله بالا دینامیک خودسازگاری همانند الکترو دینامیک است. در تعبیر کوانتومی، $m_{ph} = \mu\hbar/c$ که بعد جرم دارد، باید جرم فوتون دانسته شود. دقیق ترین اندازه گیری های آزمایشگاهی روز، جرم فوتون را، اگر داشته باشد، کمتر از 10^{-10} الکترون ولت نشان می دهند. بنابراین می توان نتیجه گرفت در حد دقت یاد شده فوتون جرم دار از گزینه های طبیعت نیست.

مسئله ها

- نشان دهید چار دیورژانس، هر چارتانسوری که مشتق از چاربردار باشد، صفر است.
- درستی معادله (۳۷.۴) نشان دهید.

فصل ۵

نسبیت عام - قانون حرکت و گرانش انیشتن

مکانیک کلاسیک، شامل قانون حرکت و قانون گرانش نیوتن، به مدت بیش از دویست سال تا پایان سده ۱۹، توانسته بود کم‌وبیش همه مشاهد‌های زمینی و آسمانی را توضیح دهد و پیش‌بینی‌های بسیار دقیق برای کاربردهای علمی، صنعتی و نظامی آن روزها بنماید. ولی چند نارسایی مفهومی و انتزاعی داشت که در بخش نسبیت خاص به بعضی از آن‌ها اشاره شد و در این جا فهرست را کامل می‌کنیم:

الف) قانون حرکت نیوتن نیاز به چارچوب مختصات لخت دارد و لازمه آن فرض‌های دیگری است:

- فرض فضای مطلق که بتوان در آن چارچوب ساکن لخت برپا کرد و چارچوب‌های بی‌شتاب دیگر را با آن سنجید. فضای مطلق یاد شده باید اقلیدسی باشد و فواصل مکانی در آن در مختصات دکارتی به صورت $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ نوشته شود.
- فرض زمان مطلق، زمانی که در تمام چارچوب‌های لخت یکی باشد.

ب) برای اجسام به ویژگی‌ای به نام جرم لختی نیاز است که بتوان قانون حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F} = m_I d^2 \mathbf{x} / dt^2.$$

همه این فرض‌ها در مقیاس‌های مکانی و زمانی کوچک، مثلاً در ابعاد منظومه شمسی و در زمان‌های چند صد و چند هزار سال قابل تصور و راستی‌آزمایی هستند و نیازهای سده‌های ۱۹ و پیش‌تر را برآورده می‌کردند. ولی در مقیاس‌های مکانی و زمانی کیهانی آزموده نشده بودند. اندیشمند ریزبین حق داشت در درستی آن‌ها شک کند. افزون بر این ملاحظات، قانون حرکت نیوتن از قانون جمع سرعت‌های گالیله پیروی می‌کرد. ولی با ظهور الکترومغناطیس و شناخته شدن سرعت نور و سرعت امواج الکترومغناطیسی به عنوان ثابت جهانی، قانون جمع سرعت‌های گالیله و به تبع آن خود تبدیل‌های گالیله مورد تردید قرار گرفت.

نسبیت خاص بخشی از این نارسایی‌ها را چاره می‌کند. سرعت نور را به عنوان ثابت جهانی اصل می‌گیرد. به جای فضای مطلق و زمان مطلق، فضا-زمان مطلق را جای‌گزین می‌کند، که در آن فاصله فضا-زمانی رخدادها از قاعده

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

به دست می‌آید. تبدیل‌های لورنتس را به جای تبدیل‌های گالیله می‌نشانند. قانون پایستگی تکانه و انرژی را، نه با گذشت زمان مختصاتی t ، بلکه با گذشت ویژه‌زمان τ می‌پذیرد.

ج) در قانون گرانش نیوتن، $F = Gm_G m'_G / |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2$ ، علاوه بر پیش‌فرض فضای مطلق اقلیدسی فرض‌های دیگری هم نهفته است:

- به هر جسم گرانش‌ده خاصیتی به نام جرم گرانشی، m_G ، نسبت داده می‌شود. ولی گالیله (۱۶۴۲ - ۱۵۶۴) مشاهده کرده بود اجسام مختلف در میدان گرانش زمین هم‌زمان می‌افتند. برای توجیه این مشاهده لازم است نسبت m_I/m_G برای تمام اجسام، جدا از جنس، ساختار، و بزرگی آن‌ها، یکسان و ثابت باشد. ثابت بودن نسبت m_I/m_G همچنین ایجاب می‌کند که زمان تناوب آونگ‌های هم‌طول که با گلوله‌های با اندازه‌ها و جنس‌های مختلف ساخته شده‌اند یکسان باشند. این نیز با دقتی بهتر از مشاهده گالیله توسط نیوتن و سپس بسل نشان داده شده بود. بعدها ثابت بودن این نسبت توسط اُتووش (۱۸۹۰، Eotvos) با دقت 10^{-9} و دیکی (۱۹۶۴، Dicke) با دقت 10^{-11} نشان داده شد. ثابت بودن m_I/m_G با مکانیک کلاسیک قابل توجیه نیست و باید آن را به عنوان یک تصادف پذیرفت.

• قانون گرانش نیوتن، به صورتی که نیوتن تدوین کرده است، نشان می‌دهد اگر در یک لحظه t در موقعیت یا اندازه یکی از دو جرم m و m' تغییر به وجود آید، جرم دیگر در همان لحظه از این تغییر آگاه می‌شود و خود را با وضع جدید سازگار می‌سازد. به سخن دیگر تغییر در گرانش نیوتنی با سرعت بی‌نهایت منتشر می‌شود، سخنی که تا آغاز سده ۲۰ نه آزموده شده بود و نه از نظر اندیشه روز، که بالاترین سرعت‌ها را سرعت نور یافته بود، پذیرفتنی به نظر می‌آمد.

نسبیت عام نظریه حرکت و نظریه گرانش انیشتن است. نارسایی‌های یاد شده در بالا را چاره می‌کند.

• زمان مطلق، فضای مطلق اقلیدسی، و فضا-زمان مطلق و تخت مینکوسکی را با فضا-زمان خمیده جای‌گزین می‌کند، و خمیدگی فضا-زمان را به حضور ماده نسبت می‌دهد.

• چارچوب لخت را بازتعریف و دست‌یافتنی می‌کند، به طوری که در «نزدیکی»‌های هر نقطه از فضا-زمان بتوان آن را به طور عملی برپا کرد. این چارچوب تنها به طور موضعی لخت است و به فضاها و زمان‌های دور و دراز قابل گسترش نیست و چنان که خواهیم دید نیازی هم به داشتن و به کار بردن آن نیست.

• مسیر یک ذره متحرک را مستقل از جرم لختی ذره به دست می‌دهد و افتادن هم‌زمان اجسام یا هم‌زمان بودن آونگ‌های هم‌طول را در حضور اجسام دیگر توجیه می‌کند.

• نشر اختلالات در میدان گرانش را به صورت موج و با سرعت نور پیش‌بینی می‌کند.

تاریخ تدوین نظریه نسبیت عام انیشتن سال ۱۹۱۶ است. سینماتیک آن بر دو اصل زیر بنا شده است:

۱. همه ناظرین در همه چارچوب‌ها، چه لخت و چه نالخت، در برداشت‌شان از قانون‌های طبیعت با هم برابرند. این سخن به این معناست که همه قانون‌های فیزیک در تبدیل از یک چارچوب مختصات عام به چارچوب عام دیگر باید صورت ناوردا داشته باشند.

۲. در هر نقطه از فضا-زمان می‌توان گروهی چارچوب لخت موضعی پیدا کرد و قانون‌های فیزیک در آن‌ها قانون‌های نسبیت خاص‌اند.

۳. قانون‌های فیزیک در چارچوب مختصات عام از تبدیل قانون‌های نسبیت خاص از چارچوب لخت موضعی به چارچوب عام مورد نظر به دست می‌آید.

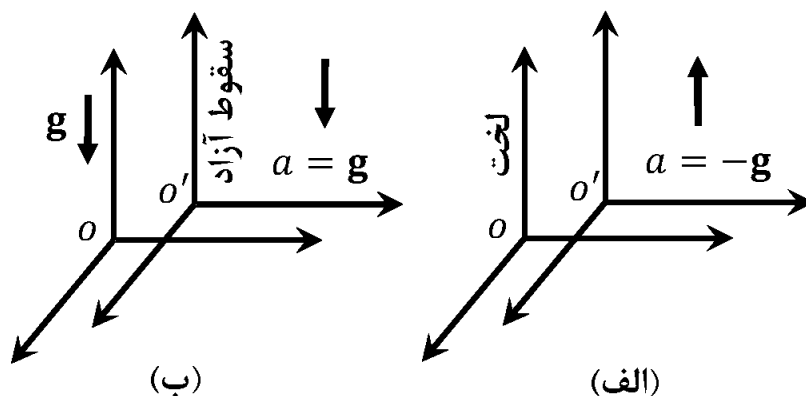
دو پیش‌بینی که در پذیرش نظریه نسبیت عام نقش مهمی داشتند عبارت بودند از:

۱. توجیه چرخش غیرعادی حضيض تیر: تا سال ۱۸۸۸ نیوکام (Newcomb) نشان داده بود که حضيض تیر (نزدیک‌ترین نقطه مدار سیاره به خورشید) در هر صد سال ۴۳ ثانیه قوسی، با به حساب آوردن همه اختلال‌هایی که از بیضی‌گونی خورشید و گرانش سیاره‌های دیگر روی تیر وارد می‌شد، در صفحه مدار سیاره می‌چرخد. گرانش نیوتن توانایی توجیه آن را نداشت. گرانش انیشتن دقیقاً همین مقدار را از عهده برآمد.

۲. خمش مسیر نور به هنگام گذر از کنار اجرام آسمانی: ستارگان ثابت در صفحه آسمان کم‌وبیش موقعیت ثابتی دارند. اگر خورشید بین ما و ستاره‌ای قرار گیرد، نور ستاره به هنگام عبور از کنار خورشید کمی خمیده می‌شود و تصویر ستاره در صفحه آسمان نسبت به ستارگان دیگر کمی جابه‌جا می‌شود. این جابه‌جایی برای عبور نور از لبه خورشید $1/75$ ، دو برابر مقداری است که از گرانش نیوتنی می‌توان به دست آورد. برای رصد خمش نور می‌بایست منتظر خورشیدگرفتگی کلی بود تا ستارگان دور و بر خورشید به هنگام روز دیده شوند. خمش نور را ادینگتون در خورشیدگرفتگی سال ۱۹۱۹ در جزیره سوبرال در برزیل و جزیره پرینسیپه در خلیج گینه و دیگران در سال‌های بعد رصد کردند. رصدها درستی پیش‌بینی نسبیت عام را تأیید می‌کنند.

۱.۵ اصل هم‌ارزی - مقدمه

فضانورد در داخل فضاپیما بی‌وزن است و گرانش زمین را احساس نمی‌کند. این گفته را در چارچوب مکانیک نیوتنی چگونه می‌توان پذیرفت؟ به دو مثال زیر توجه شود:



شکل ۱.۵: (الف) چارچوب O لخت است. چارچوب O' نسبت به O شتاب $a = -g$ دارد. (ب) چارچوب O در میدان گرانش g قرار دارد، و O' در همان میدان سقوط آزاد دارد.

در شکل ۱.۵ (الف)، چارچوب (x) : O لخت و به دور از هر جسم گرانشی است. برابر قانون حرکت نیوتن ذره‌ای که به آن نیرو وارد نشود شتاب نخواهد داشت:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0. \quad (1.5)$$

چارچوب (x') : O' نالخت است و نسبت به O با شتاب $a = -g$ حرکت می‌کند، در زمان t فاصله OO' برابر $\frac{1}{2}at^2 + v_0t$ است، که در آن v_0 سرعت O' نسبت به O است. تبدیل گالیلئ از O به O' چنین است:

$$x' = x - \left(\frac{1}{2}at^2 + v_0t\right). \quad (2.5)$$

دو بار مشتق‌گیری از این عبارت و استفاده از معادله (۱.۵) می‌دهد:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -a = g. \quad (3.5)$$

انگار چارچوب O' در میدان گرانش g قرار گرفته است.

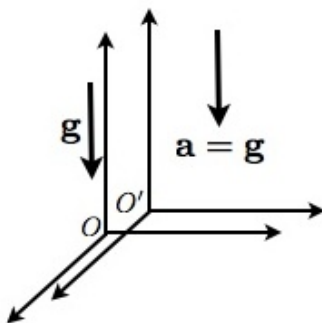
در شکل ۱.۵ (ب)، چارچوب O در میدان گرانش g قرار دارد و چارچوب O' این بار با شتاب $a = g$ نسبت به آن حرکت می‌کند (یعنی در میدان گرانش g سقوط آزاد دارد). قانون حرکت ذره در O عبارت است از:

$$d^2x/dt^2 = g. \quad (4.5)$$

و قانون حرکت آن در O' با دو بار مشتق‌گیری از (۲.۵) به دست می‌آید:

$$d^2x'/dt^2 = g - a = 0. \quad (5.5)$$

ذره در چارچوب شتابنده O' یا ساکن می‌ماند و یا حرکت یکنواخت دارد. راز بی‌وزنی در



شکل ۲.۵: چارچوب O در گرانش g قرار دارد. چارچوب O' در همان میدان شتاب $a = g$ دارد.

فضاپیما همین است. از نگاه ناظر زمینی نیروی گرانش صرف شتاب فضاپیما می‌شود و هرچه در درون آن است با شتاب g سقوط آزاد دارد. از نگاه فضاانورد، در درون فضاپیما گرانش وجود ندارد و تمام اجسام دور و برش جدا از جنس، ساختار و بزرگی و کوچکی‌شان یا ساکن می‌مانند یا حرکت یکنواخت دارند.

در چارچوب‌های مختصات شتاب‌دار، نیروهای ناشی از شتاب چارچوب روی اجسام را نیروهای لختی می‌گویند، مانند نیروی گریز از مرکز و نیروی کوریولیس. به نظر می‌رسد بتوان بخشی از نیروهای گرانشی را با بخشی از نیروهای لختی برابر دانست، و یکی را به جای دیگری گرفت. آسانسوری که به دور از هر جرم گرانشی است و شتاب $a = -g$ دارد، انگار در میدان گرانش g قرار دارد. یا در آسانسوری که در میدان گرانش زمین سقوط آزاد دارد می‌توان گفت گرانش با نیروی لختی ناشی از شتاب آسانسور خنثی شده است و آسانسور به مانند یک چارچوب لخت عمل می‌کند. اصل هم‌ارزی (Principle of equivalence) برابری نیروهای گرانشی و نیروهای لختی را بیان می‌کند و راهی برای دستیابی به چارچوب مختصات لخت (ولی موضعی) و زدودن انتزاع از تعریف چارچوب لخت است.

برای بیان رسمی و کمی اصل هم‌ارزی به سخن دقیق نیاز است. در دو مثال بالا میدان

گرانش در زمان و مکان ثابت فرض شده بود. اگر $g(x, t)$ تابعی از زمان و مکان باشد، می‌توان آن را در نزدیکی‌های هر رخداد (x_0, t_0) بسط تیلور داد:

$$g(x, t) = g(x_0, t_0) + (x - x_0) \cdot \nabla g|_{(x_0, t_0)} + (t - t_0) \partial g / \partial t|_{(x_0, t_0)} + \dots$$

با انتخاب O' در نقطه (x_0, t_0) و اجازه سقوط آزاد دادن به آن می‌توان $g(x_0, t_0)$ را در O' حذف کرد ولی گرادیان‌های زمانی و مکانی $g(x, t)$ حذف‌شدنی نیستند. برای دیدن آن‌ها آسانسوری با پهنای زیاد و دو گلوله ساکن در دو گوشه آن تصور کنید. اگر آسانسور سقوط آزاد کند از نگاه ناظر زمینی مسیر گلوله‌ها به سوی مرکز زمین است و باهم موازی نیستند. از نگاه ناظر درون آسانسور گلوله‌ها بی‌وزن‌اند، ولی در امتداد پهنای آسانسور به سوی هم حرکت می‌کنند.

نارسایی دیگری را هم در سخنان بالا یادآور شویم. در دو مثال یاد شده از قانون‌های حرکت نیوتن سود جسته‌ایم و می‌دانیم که تنها در سرعت کم اعتبار دارند. این نارسایی را در سطرهای آینده چاره خواهیم کرد.

۱.۱.۵ بیان رسمی اصل هم‌ارزی - بازتعریف چارچوب لخت

در هر نقطه (x_0, t_0) از فضا-زمان، در هر میدان گرانشی که باشد، و با هر مختصات عامی که بیان شود، می‌توان چارچوب مختصاتی برپا کرد که سقوط آزاد می‌کند. در این چارچوب نیروی گرانش $g(x_0, t_0)$ در رویارویی با شتاب سقوط چارچوب از بین می‌رود. ولی گرادیان‌های زمانی و مکانی باقی می‌مانند.

گرادیان‌های زمانی و مکانی را در زمان‌های کوتاه و مکان‌های تنگ می‌توان ناچیز گرفت و چارچوب مختصات سقوط‌کننده را به طور موضعی لخت دانست. در چارچوب لخت موضعی جسمی که نیروی دیگری به آن وارد نشود یا ساکن می‌ماند یا حرکت یکنواخت دارد (قانون اول نیوتن).

چارچوب لخت موضعی، برخلاف چارچوب لخت جهانی گالیله-نیوتن، یا مینکوسکی، بدون هیچ فرض دیگر، قابل تعریف و دست‌یافتنی است، به عنوان مثال، فضاپیما در مدار زمین برای آزمایش‌های فیزیکی کوتاه‌مدت و در ابعاد کوچک‌تر از مقیاس‌های مکانی و زمانی تغییرات گرانش، یک چارچوب لخت است. اگر اجسام گوناگونی با جنس، ساختار و بزرگی‌های مختلف در فضاپیما چیده شوند، از نگاه ناظر درون فضاپیما، نیرویی به آن‌ها

وارد نمی‌شود و همه بی‌حرکت‌اند. از نگاه ناظر مستقر در روی زمین همه آن‌ها با شتاب برابر به سوی زمین کشیده می‌شوند و با هم به دور زمین می‌چرخند. نیازی به تعریف جرم لختی نیست و به تبع نیازی به مقایسه آن‌چه تعریف نشده با جرم گرانشی (که هنوز سخنی از آن نگفته‌ایم) نیست. در چارچوب لخت موضعی فاصله فضا-زمانی دو رخداد فاصله مینکوسکی است؛ و اگر گفته شود قوانین فیزیک در چارچوب لخت موضعی قوانین نسبیت خاص است به دور از انتظار نخواهد بود.

سخنی دیگر: چارچوب لخت موضعی در فضا-زمان، در فضاهاى هندسی خمیده، همانند دارد. به طور مثال، سطح کره فضای دوبعدی خمیده است، با دو مختصه (θ, φ) که طبیعت زاویه دارند قابل پیمایش است. فاصله هر دو نقطه نزدیک را می‌توان برابر $dl^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ نوشت. ولی به هر نقطه (θ_0, φ_0) در روی کره می‌توان یک صفحه مماس گذراند. صفحه مماس بخش کوچکی از رویه کره را می‌پوشاند، و می‌توان در آن چارچوب مختصات اقلیدسی (ξ_1, ξ_2) برپا کرد و فاصله‌های کوتاه را به صورت اقلیدسی،

$$dl^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2,$$

نوشت. تفاوت dl^2 برحسب (θ, φ) و dl^2 برحسب (ξ_1, ξ_2) از مرتبه دوم انحنای کره است. این مثال را می‌توان به فضا یا فضا-زمان خمیده n بعدی گسترش داد. هر نقطه از فضای خمیده n بعدی دارای یک فضای مماس تخت n بعدی است. در روی فضای مماس می‌توان مختصات تخت n بعدی اقلیدسی برپا کرد. فضا-زمانی که میدان گرانش دارد فضای خمیده است. چارچوب لخت موضعی در هر رخداد آن نقش فضای مماس را بازی می‌کند. می‌توان در آن مختصات مینکوسکی موضعی برپا کرد و فیزیک را در آن فیزیک نسبیت خاص دانست.

۲.۵ بخشی از اصل‌های موضوعه نسبیت عام - گفتار سینماتیک

فرض بر این است که حضور ماده، دارنده انرژی و تکانه، فضا-زمان را خمیده می‌کند. چگونگی آن در فصل ۸ بحث خواهد شد و موضوع دینامیک نسبیت عام است. در این بخش تنها به سینماتیک مسئله می‌پردازیم. سه اصل زیر را خواهیم پذیرفت:

- در هر نقطه از فضا-زمان خمیده می‌توان چارچوب لخت موضعی برپا کرد.
- قانون‌های فیزیک در چارچوب لخت موضعی قانون‌های نسبیت خاص‌اند.
- برای دستیابی به قانون‌های فیزیک در فضا-زمانی که به خاطر گرانش خمیده شده است کافی است قانون‌های نسبیت خاص از چارچوب لخت موضعی به چارچوب مختصات عامی، که فضا-زمان خمیده را می‌پیماید، تبدیل عام یابند.

حال ببینیم با یاری آن‌چه گفته شد، بی‌افزودن هیچ مفهوم فیزیکی دیگر، به چه نتیجه‌هایی می‌توانیم برسیم. برای پرهیز از پرنویسی، در کاربرد مفاهیم و اعمال ریاضی کمی بی‌پروا خواهیم بود که ممکن است خواننده ریزبین ریاضی‌دوست را خوش نیاید. چنین خواننده‌ای را به کتاب‌های واینبرگ و دیگران راهنمایی می‌کنیم.

۱.۲.۵ تبدیل از چارچوب لخت موضعی به چارچوب مختصات عام و وارون آن

فرض کنیم مختصات عام

$$x^\mu; \mu = 0, 1, 2, 3$$

فضا-زمان خمیده‌ای را می‌پیماید. هر نقطه آن یک فضای مماس دارد و می‌توان در آن مختصات لخت موضعی

$$\xi^\alpha(x^\mu), \alpha = 0, 1, 2, 3$$

برپا کرد. فضای مماس بخش کوچکی از فضای خمیده را، در نقطه x^μ می‌پوشاند. دو نقطه نزدیک به هم در این پوشش مشترک بگزینیم. تفاوت مختصات آن‌ها به ترتیب dx^μ در فضای خمیده و $d\xi^\alpha$ در فضای مماس باشد. رابطه آن‌ها چنین است:

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha. \quad (۶.۵)$$

ماتریس $\partial \xi^\alpha / \partial x^\mu$ ماتریس تبدیل از x^μ به ξ^α است. وارون آن، $\partial x^\mu / \partial \xi^\alpha$ ، ماتریس تبدیل از ξ^α به x^μ است:

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\beta} = \delta^\alpha_\beta, \quad \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} = \delta^\nu_\mu. \quad (۷.۵)$$

فاصله فضا-زمانی دو رخداد در دو چارچوب کمیت نرده‌ای است و باهم برابر است. بنابراین در تبدیل عام از x^μ به ξ^α و در وارون آن باید ناوردا بماند:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (۸.۵)$$

که در آن $g_{\mu\nu}$ و وارون آن $g^{\mu\nu}$ به شرح زیر تعریف شده‌اند:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\beta}, \quad g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta_\mu^\lambda, \quad (۹.۵)$$

تانسورهای $g_{\mu\nu}$ و $g^{\mu\nu}$ را به ترتیب متریک‌های هم‌وردا و پادورداى فضای خمیده خواهیم نامید و نقش $\eta^{\alpha\beta}$ و $\eta_{\alpha\beta}$ را در فضای مینکوسکی بازی می‌کنند. معادله (۹.۵) تنها تعریف تانسور متریک است و دستور محاسبه آن نیست. در نسبیت عام، جدا از مفهوم هندسی، تانسور متریک یک سیستم دینامیکی است و تحول آن را داشته‌های کیهان معین می‌کنند. در بخش‌های آینده به تفصیل به آن خواهیم پرداخت.

۲.۲.۵ قانون حرکت در نسبیت عام - معادله ژئودزیک

در چارچوب لخت موضعی گرانش به طور موضعی حذف شده است. اجسام با ابعاد کوچک در آن و در زمان‌های کوتاه شتاب ندارند:

$$d^2 \xi^\alpha / d\tau^2 = 0. \quad (۱۰.۵)$$

تبدیل معادله (۱۰.۵) از ξ^α به x^μ چنین است:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} &= \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}, \\ \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} &= \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0. \end{aligned}$$

از ضرب معادله پایانی در $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (۱۱.۵)$$

معادله (۱۱.۵) معادله حرکت یک ذره در چارچوب نالخت x^μ در حضور گرانش است و به نام معادله ژئودزیک شناخته می‌شود، واژه‌ای که از نقشه‌برداران، به معنای کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه در روی زمینِ کره‌وار، وام گرفته شده است. Γ ها را هم‌وستارهای (Affine connections) فضای خمیده و گاهی نشانه‌های کریستوفل (Christoffel symbols) می‌نامند. برای امواج الکترومغناطیس و ذره‌هایی که جرم در حال سکون ندارند $d\tau^2 = 0$ است. برای نشانه‌گذاری مسیر آن‌ها باید پارامتر دیگری به جز τ به کار برد و مشتق نسبت به τ را با مشتق نسبت به پارامتر جدید جای‌گزین کرد، مثلاً $x^\mu(\sigma)$ ، که در آن σ می‌تواند t یا هر ترکیب خطی و غیرخطی از خود مختصات باشد. به این ترتیب معادله ژئودزیک برای امواج و ذره‌های بی‌جرم سکون به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0, \quad d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0. \quad (12.5)$$

۳.۲.۵ هم‌وستارها بر حسب تانسور متریک

جدا از تعریف معادله (۱۱.۵)، هم‌وستارها را می‌توان برحسب مشتق‌های متریک $g_{\mu\nu}$ به دست آورد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \eta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\rho \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \right) \\ &= \Gamma_{\rho\mu}^\kappa g_{\kappa\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\kappa g_{\mu\kappa}, \end{aligned} \quad (13.5)$$

که در آن برای جای‌گذاری مشتق‌های دوم ξ^α از تعریف هم‌وستار در معادله (۱۱.۵) یاری جسته‌ایم:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\kappa}.$$

در معادله (۱۳.۵) با جای‌گشت دادن زیرنگاشت‌های (ρ, ν, μ) و جمع و تفریق آن‌ها به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} = 2g_{\kappa\rho}\Gamma_{\mu\nu}^\kappa, \quad \Rightarrow$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} \right]. \quad (14.5)$$

۴.۲.۵ چند کاربرد از آنچه تا این‌جا گفته شده است

نسبیت عام، فیزیک در سرعت‌های زیاد و گرانش‌های قوی است. اگر v سرعت حرکت جسم و Φ پتانسیل گرانشی باشد که جسم در آن قرار گرفته است، منظور از سرعت زیاد و گرانش قوی این است که نسبت‌های بی‌بعد $(v/c)^2$ و Φ/c^2 چشم‌پوشیدنی نباشند. از سوی دیگر باید انتظار داشته باشیم در سرعت‌های کم و گرانش‌های ضعیف، حد قانون حرکت نسبیتی عام، قانون حرکت نیوتن باشد. در چنین شرایطی می‌توانیم متریک فضا-زمان را به صورت زیر ساده کنیم:

$$ds^2 \approx [1 + h(\mathbf{x})]c^2 dt^2 - d\mathbf{x}^2, \quad h(\mathbf{x}) \ll 1. \quad (15.5)$$

این متریک عملاً متریک مینکوسکی است. تنها در g_{00} اختلال کوچک $h(\mathbf{x})$ به خاطر بزرگی ضریب c^2 لحاظ شده است. دو مسئله را با این متریک ضعیف خواهیم آزمود: حد نیوتنی معادله ژئودزیک و اتساع گرانشی زمان.

حد نیوتنی معادله ژئودزیک

در سطح خورشید و ستارگان ریز و درشت، به جز در نزدیکی‌های سیاه‌چاله‌ها و ستاره‌های نوترونی، Φ/c^2 را حساب کنید و نشان دهید از مرتبه 10^{-6} تا 10^{-7} است. سرعت‌های سیارات در منظومه‌های ستاره‌ای و سرعت‌های ستارگان در مدارهای کهکشانی نیز از چند ده و چند صد کیلومتر بر ثانیه فراتر نمی‌روند، $v/c \approx 10^{-4}$ تا 10^{-5} . در معادله ژئودزیک نیز سرعت‌های $dx/d\tau$ در برابر $cdt/d\tau$ چشم‌پوشیدنی‌اند. معادله (۱۱.۵) به صورت زیر

در می‌آید:

$$c^2 \frac{d^2 t}{d\tau^2} + c^2 \Gamma_{\circ\circ}^{\circ} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + c^2 \Gamma_{\circ\circ}^i \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

مشتق نسبت به τ را بامشتق نسبت به t جای‌گذاری کنیم، $d/d\tau = (dt/d\tau)d/dt$:

$$\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{d^2 t}{d\tau^2} \frac{dx^i}{dt} + c^2 \Gamma_{\circ\circ}^i \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

از معادله (۱۴.۵) در تقریب متریک معادله (۱۵.۵) داریم

$$\Gamma_{\circ\circ}^{\circ} = 0, \quad \Gamma_{\circ\circ}^i = -\frac{1}{c^2} \partial h / \partial x^i,$$

نتیجه می‌گیریم:

$$t = \tau, \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{c^2} \partial h / \partial x^i = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}, \quad h = -\frac{2\Phi}{c^2}. \quad (16.5)$$

در تقریبی که به کار برده‌ایم، معادله اول زمان مختصاتی t را برابر با ویژه‌زمان ذره می‌دهد و قابل پیش‌بینی بود. در معادله سوم Φ را تعریف کرده‌ایم. اگر آن را با پتانسیل گرانشی یکی بدانیم قانون حرکت نیوتن را باز خواهیم شناخت.

اتساع گرانشی زمان - سرخیدگی گرانشی خط‌های طیفی

متریک معادله (۱۵.۵) ایستاست. دو ساعت یکسان در دو نقطه x_1 و x_2 در حال سکون قرار دهیم و گذشت زمان Δt_1 و Δt_2 آن‌ها را با گذشت ویژه‌زمان $\Delta\tau$ ، مقایسه کنیم. با توجه به ناوردایی $\Delta\tau$ در هر چارچوب مختصات و ساکن بودن ساعت‌ها خواهیم داشت:

$$\Delta\tau = g_{\circ\circ}(x_1)^{1/2} \Delta t_1 = g_{\circ\circ}(x_2)^{1/2} \Delta t_2$$

$$\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t_1} = \left[\frac{g_{\circ\circ}(x_1)}{g_{\circ\circ}(x_2)} \right]^{1/2} - 1 \approx \frac{1}{c^2} (\Phi_2 - \Phi_1). \quad (17.5)$$

تقریب آخر در این معادله برای متریک تقریبی معادله (۱۵.۵) است. فاصله زمانی دو رخداد را، ناظر ۲ که در پتانسیل بالاتر $\Phi_2 > \Phi_1$ قرار دارد بیشتر از فاصله زمانی ناظر ۱ که

در پتانسیل پایین‌تر است اندازه خواهد گرفت. این فرایند را اتساع گرانشی زمان خواهیم نامید.

بسامد نور و هر موج دیگر با وارون زمان تناوب آن متناسب است. اگر $\nu_1 \propto (\Delta t_1)^{-1}$ بسامد یک خط طیفی در پتانسیل Φ_1 باشد، و طیف از Φ_1 به Φ_2 برسد، بسامد $\nu_2 \propto (\Delta t_2)^{-1}$ چنین خواهد بود:

$$\frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_1} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{c^2} \quad (18.5)$$

بسامد ν_1 که از کف اتاق (در پتانسیل پایین Φ_1) به پشت بام (در پتانسیل بالاتر Φ_2) می‌رود به ν_2 تبدیل خواهد شد و سرخ‌تر دیده خواهد شد، $\frac{\Delta \nu}{\nu} < 0$ و $\frac{\Delta \lambda}{\lambda} > 0$. سرخیدگی گرانشی معادله (18.5) در ۱۹۶۰ در خط طیفی آهن ۵۷ که تنها ۲۲.۵ متر در میدان گرانشی زمین بالا رفته بود توسط پوند و ربکا (Pound & Rebka) اندازه‌گیری شد [۱۶]. پیش‌بینی نظری معادله (18.5) برای مثال یاد شده $\frac{\Delta \nu}{\nu} = 2/46 \times 10^{-15}$ است. اندازه‌گیری‌های پوند و ربکا $2/57 \pm 0/26 \times 10^{-15}$ بود که در حد خود شاه‌کاری در تکنیک اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی است.

سرخیدگی در طیف خورشید و ستارگان معمولی، در مقایسه با سرخیدگی در آزمایش پوند و ربکا بسیار بزرگ‌تر و از مرتبه 10^{-6} است. ولی عامل‌های پیش‌بینی ناپذیر و فراوانی خط‌های طیفی خورشید و ستارگان را پهن و جابه‌جا می‌کنند و اندازه‌گیری سرخیدگی معمولی را نامطمئن می‌سازند. در صفحه‌های آینده به سرخیدگی گرانشی در مقیاس کیهانی باز خواهیم گشت.

۳.۵ بردارها و تانسورها در فضا-زمان خمیده

در بخش نسبیت خاص گفته شد بهترین راه برای دیدن ناوردایی آشکار قانون‌های فیزیک در تبدیل از یک چارچوب لخت به چارچوب لخت دیگر، نوشتن آن‌ها به صورت چاربردارها و چارتانسورها در فضای مینکوسکی است. این شگرد را در فضا-زمان‌های خمیده نیز می‌توان به کار برد. نخست تعریف دقیقی از چاربردارها، چاربردارها، و چارتانسورها در فضای خمیده داشته باشیم.

۱.۳.۵ چند تعریف

پیش‌تر $d\xi^\alpha(x)$ و $d\xi_\alpha(x)$ در فضای تخت موضعی (فضای مماس بر فضا-زمان خمیده در نقطه x^μ) را به ترتیب بردار پادوردا و هم‌وردا نامیدیم. تبدیل یافته آن‌ها در فضای خمیده،

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha, \quad dx_\mu = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} d\xi_\alpha, \quad (۱۹.۵)$$

را نیز بردارهای پادوردا و هم‌وردا در فضای خمیده خواهیم نامید. تبدیل آن‌ها به هم‌دیگر به کمک تانسور متریک انجام می‌گیرد:

$$dx_\mu = g_{\mu\nu} dx^\nu, \quad dx^\mu = g^{\mu\nu} dx_\nu. \quad (۲۰.۵)$$

معادله‌های (۲۰.۵) با معادله‌های (۱۹.۵) سازگارند. کافی است به جای $g_{\mu\nu}$ یا $g^{\mu\nu}$ از تعریف آن‌ها، معادله (۹.۵)، جای‌گذاری کنیم. به طور مثال:

$$dx_\mu = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\gamma} d\xi^\gamma = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} d\xi^\beta = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} d\xi_\alpha$$

تبدیل از چارچوب x به x' نیز برابر قاعده مشتق‌گیری چنین خواهد بود:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad dx'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} dx_\nu, \quad (۲۱.۵)$$

که در آن‌ها $\partial x'^\mu / \partial x^\nu$ و $\partial x^\nu / \partial x'^\mu$ به ترتیب تانسورهای تبدیل از x به $x'(x)$ و وارون آن از x' به $x(x')$ است:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} = \delta_\lambda^\mu, \quad \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} = \delta_\nu^\lambda. \quad (۲۲.۵)$$

در معادله (۲۲.۵)، از مشتق رابطه اول نسبت به x^ρ و از مشتق رابطه دوم نسبت به x'^ρ به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\lambda} = - \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\kappa}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\kappa \partial x'^\lambda}, \quad (۲۳.۵)$$

$$\frac{\partial x'^\kappa}{\partial x'^\rho} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} = - \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\rho \partial x'^\mu}. \quad (۲۴.۵)$$

از این دو معادله در صفحه‌های آینده استفاده خواهیم کرد.
هر کمیت $\Phi(x)$ که در تبدیل از x به $x'(x)$ ناوردا بماند کمیت نرده‌ای نامیده خواهد شد:

$$\Phi'(x'(x)) = \Phi(x) \quad (25.5)$$

هر چارتایی V^μ که مانند dx^μ تبدیل یابد چاربردار پادوردا نامیده خواهد شد:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (26.5)$$

هر چارتایی V_μ که مانند dx_μ تبدیل یابد چاربردار هم‌وردا نامیده خواهد شد:

$$V'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} V_\nu \quad (27.5)$$

هر کمیت n اندیسی که اندیس‌های بالای آن مانند dx^μ و اندیس‌های پایین آن مانند dx_μ تبدیل یابند تانسور مرتبه n (با ذکر نوع اندیس‌ها) نامیده خواهند شد:

$$T'^{\mu\dots\lambda\dots} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \dots \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda} \dots T^{\nu\dots\sigma\dots} \quad (28.5)$$

۲.۳.۵ چند قضیه و اثبات

متریک $g_{\mu\nu}$ و وارون آن $g^{\mu\nu}$ تانسورهای مرتبه دو هستند. برای اثبات کافی است تعریف $g'^{\mu\nu}$ و $g'_{\mu\nu}$ را از معادله‌های (۹.۵) جای‌گذاری کنیم و تبدیل از x' به x را بیازماییم:

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho}. \quad (29.5)$$

حاصل ضرب دو تانسور مرتبه n و m یک تانسور مرتبه $m+n$ است و اندیس‌های پادوردا و هم‌وردا طبیعت خود را حفظ می‌کنند. برای مثال، تبدیل حاصل ضرب دو بردار $V^\mu U^\nu$ ، را از x به x' بیازماییم:

$$V'^\mu U'^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} V^\lambda U^\rho.$$

در یک تانسور مرتبه n اگر دو اندیس پادوردا و هموردا را برابر بگذاریم و روی مقدارهای مجاز آن‌ها جمع بزنیم یک تانسور مرتبه $n-2$ به دست می‌آید. این عمل را تنجش و تنجیدن (Contraction) خواهیم نامید. مثال:

$$T^{\mu\lambda\sigma}{}_{\nu\lambda} = T^{\mu\sigma}{}_{\nu}. \quad (30.5)$$

برای اثبات کافی است قاعده تبدیل دو طرف را بیازماییم. دو تانسور هم‌مرتبه و با اندیس‌های پادوردا و هموردا یکی‌سان را می‌توان به دو عدد حقیقی یا مختلط a و b ضرب و جمع و تفریق کرد و تانسور دیگری با همان مرتبه و با همان اندیس‌های پادوردا و هموردا به دست آورد. مثال:

$$T^{\mu}{}_{\nu\lambda} = aR^{\mu}{}_{\nu\lambda} + bS^{\mu}{}_{\nu\lambda}. \quad (31.5)$$

برای اثبات کافی است قاعده تبدیل دو طرف را بیازماییم. توجه شود جای اندیس‌ها در یک تانسور معمولاً جابه‌جاشدنی نیستند و باید حفظ شوند. به عنوان مثال تانسور مرتبه دو زیر پادقرینه است:

$$F_{\mu\nu} = V_{\mu}U_{\nu} - V_{\nu}U_{\mu} = -F_{\nu\mu}.$$

۳.۳.۵ مشتق معمولی و مشتق هموردا

به نکته‌های زیر خوب توجه شود:

- مشتق‌های جزئی کمیت نرده‌ای Φ ، بردار هموردا می‌سازند (تعمیم گرادیان). کافی است به تبدیل آن‌ها از x به $x'(x)$ نگاه کنیم:

$$\frac{\partial \Phi'(x'(x))}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}}. \quad (32.5)$$

- مشتق‌های جزئی بردارهای پاوردا و هموردا، تانسورهای مرتبه دو نمی‌سازند! کافی است به قاعده تبدیل آن‌ها نگاه کنیم. مثال:

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} V^{\rho} \right) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial V^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\rho}} V^{\rho}.$$

اگر در طرف راست معادله جمله دوم نبود، تبدیل $\partial V^\rho / \partial x^\lambda$ تبدیل یک تانسور مرتبه دو با اندیس پادوردای ρ و اندیس هموردای λ ممکن بود باشد. ولی بودن جمله دوم، آن را از تانسور بودن بیرون می‌برد.

- هم‌وستانرها تانسورهای مرتبه سه نیستند! کافی است به قاعده تبدیل آن‌ها از تعریف معادله (۱۴.۵) نگاه کنیم:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \left[\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x^{\sigma} \partial x^{\tau}} \right] \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma_{\sigma\tau}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\nu}}.\end{aligned}$$

در طرف راست معادله، جمله اول قاعده تبدیل یک تانسور مرتبه سه با یک اندیس پادوردا و دو اندیس هم‌وردا به نظر می‌رسد. ولی جمله دوم تانسور بودن هم‌وستان را از میان می‌برد.

- ترکیب $\partial V^{\mu} / \partial x^{\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} V^{\lambda}$ تانسور مرتبه دو است. در تبدیل آن دوجمله‌ای که $\partial V^{\mu} / \partial x^{\nu}$ و $\Gamma_{\lambda\nu}^{\mu}$ را از تانسور بودن خارج می‌کردند هم‌دیگر را از میان می‌برند:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} V'^{\lambda} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial V^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\kappa}} V^{\kappa} \\ &+ \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma_{\sigma\tau}^{\rho} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} V^{\kappa} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} V^{\kappa}.\end{aligned}$$

با توجه به معادله (۲۳.۵) جمله‌های دوم و چهارم در سوی راست معادله هم‌دیگر را از میان می‌برند و مانده قاعده تبدیل تانسور مرتبه دو با اندیس پادوردای μ و هم‌وردای ν است:

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} V'^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial V^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\rho} V^{\kappa} \right).$$

ترکیب $\partial V^{\mu} / \partial x^{\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} V^{\lambda}$ را مشتق هم‌وردای بردار پادوردای V^{μ} می‌نامند. برای کوتاه‌نویسی، مشتق‌های هم‌وردا را با زیرنگاشت «;» و مشتق معمولی را با زیرنگاشت

«،» نشان خواهیم داد:

$$V^\mu_{;\nu} = V^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda. \quad (۳۳.۵)$$

- با روشی مانند بالا، مشتق هموردای یک بردار هموردا به صورت زیر در می‌آید:

$$V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} V_\lambda. \quad (۳۴.۵)$$

- در مشتق‌گیری هموردا از تانسورهای مرتبه بالاتر، برای هر اندیس پادوردا باید یک جمله هم‌وستار با علامت مثبت و برای هر اندیس هموردا یک جمله هم‌وستار با علامت منفی، برابر الگوی دو معادله (۳۳.۵) و (۳۴.۵)، در نظر بگیریم. مثال:

$$T^\mu_{\nu;\lambda} = T^\mu_{\nu,\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} T^\rho_{\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} T^\mu_{\rho}. \quad (۳۵.۵)$$

- مشتق هموردای تانسورهای متریک، $g_{\mu\nu}$ و $g^{\mu\nu}$ ، صفر است:

$$g_{\mu\nu;\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^\rho_{\mu\lambda} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} g_{\mu\rho} = 0, \quad (۳۶.۵)$$

$$g^{\mu\nu}_{;\lambda} = g^{\mu\nu}_{,\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} g^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\lambda\rho} g^{\mu\rho} = 0. \quad (۳۷.۵)$$

برای دیدن درستی معادله اول کافی است هم‌وستارها را از معادله (۱۴.۵) جای‌گذاری و ساده کنیم. برای دیدن درستی معادله دوم کافی است از عبارت $g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu$ نسبت به x^λ مشتق گرفته شود.

- مشتق هموردا از حاصل ضرب چند چیز (نرده‌ای، بردار، تانسور، ...) مانند مشتق معمولی، از قاعده لایبنیتس (Leibniz) پیروی می‌کند. مثال:

$$(V^\mu T^\nu_{\lambda})_{;\rho} = V^\mu_{;\rho} T^\nu_{\lambda} + V^\mu T^\nu_{\lambda;\rho}. \quad (۳۸.۵)$$

اپراتورهای دیفرانسیلی

- گرادیان: $\Phi(x)$ یک تابع نرده‌ای، $\partial\Phi/\partial x^\mu$ برابر معادله (۳۲.۵) یک بردار همورداست.

• دیورژانس: V^μ چاربردار پادوردا، دیورژانس آن:

$$V^\mu{}_{;\mu} = V^\mu{}_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} V^\lambda = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} V^\mu). \quad (39.5)$$

در گام آخر از عبارت زیر، که می‌توان آن را به طور مستقیم محاسبه کرد، استفاده شده است:

$$\Gamma^\mu_{\mu\lambda} = g^{-\frac{1}{2}} \partial g^{\frac{1}{2}} / \partial x^\lambda.$$

• کرل: V_μ چاربردار هم‌وردا، کرل آن:

$$V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu} = V_{\mu,\nu} - V_{\nu,\mu}. \quad (40.5)$$

هم‌وستارها هم‌دیگر را حذف می‌کنند. کرل یک بردار هم‌وردا در واقع یک تانسور مرتبه دو پادقرینه است.

• لاپلاسی: $\Phi(x)$ تابع نرده‌ای، با توجه به معادله‌های (۳۲.۵) و (۳۹.۵):

$$\Phi{}^{,\mu}{}_{;\mu} = [g^{\mu\nu} \Phi_{,\nu}]_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right). \quad (41.5)$$

۴.۳.۵ مشتق هم‌وردا در روی منحنی

به‌مثال زیر توجه شود: ذره‌ای در مسیر $x(\tau)$ حرکت می‌کند و بردار $A^\mu(x(\tau))$ ، مثلاً تکانه و اسپین را، با خود همراه می‌برد. مشتق A^μ نسبت به τ چنین خواهد بود.

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} A^\mu{}_{,\nu}.$$

ولی این عبارت بردار نیست، زیرا $A^\mu{}_{,\nu}$ تانسور نیست. ولی می‌توانیم با جای‌گزینی مشتق معمولی با مشتق هم‌وردا، آن را بردار کنیم. برای پرهیز از ابهام، همراه با این جای‌گزینی به جای $dA^\mu/d\tau$ نماد $DA^\mu/D\tau$ را به کار خواهیم برد:

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} A^\lambda \right) = \frac{dA^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu. \quad (42.5)$$

تعمیم معادله بالا به تانسورها با اندیس‌های هم‌وردا و پادوردا آسان است. به طور مثال:

$$\frac{DT^\mu{}_\nu}{D\tau} = \frac{dT^\mu{}_\nu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \frac{dx^\lambda}{d\tau} T^\rho{}_\nu - \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} T^\mu{}_\rho. \quad (43.5)$$

معادله ژئودزیک (۱۱.۵) نمونه‌ای از انتقال بردار چارسرعت، $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ ، در روی مسیر ذره است:

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} = \frac{D}{D\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0.$$

مسئله‌ها

- متریک $g^{\mu\nu}$ را با استفاده از تعریف معادله (۹.۵) از x به x' تبدیل کنید و نشان دهید تانسور مرتبه ۲ با دو اندیس پادورداست.
- از تعریف هم‌وستانر، معادله (۱۴.۵)، درستی معادله (۱۳.۵) را نشان دهید.
- سرعت فرار از سطح زمین ۱۱ کیلومتر بر ثانیه است. خط D_1 سدیم با طول موج 589.6 نانومتر که از زمین نشر شود، حد اکثر چه اندازه سرخ خواهد شد؟ همین خط اگر از سطح خورشید نشر شود چه اندازه سرخ خواهد شد؟
- پارامترهای Φ/c^2 و $(v_{\text{escape}}/c)^2$ را در سطح زمین و سطح خورشید حساب کنید و تصمیم بگیرید با چه دقتی می‌توان به مکانیک نیوتنی در منظومه خورشیدی اعتماد کرد.
- درستی معادله‌های (۲۰.۵) را با استفاده از تعریف بردارهای پادوردا و هم‌وردا، معادله‌های (۱۹.۵)، نشان دهید.
- نشان دهید $T^\mu{}_\mu$ یک کمیت نرده‌ای است. راهنمایی: تبدیل لورنتس $T^{\mu\nu}$ از O به O' را بنویسید و تنجش دهید.

فصل ۶

فضاهای خمیده

۱.۶ پیش‌گفتار

یک صفحه کاغذ، فضای دو بعدی و هندسه آن اقلیدسی است. می‌توان در آن چارچوب مختصات دکارتی (x, y) برپا کرد و فاصله دو نقطه با تفاوت مختصات (dx, dy) را به صورت

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

نوشت. سطح استوانه و مخروط و هر ورق کاغذ مچاله شده نیز فضاهای دو بعدی هستند. ظاهر خمیده دارند، ولی همیشه می‌توان آن‌ها را باز کرد، روی صفحه تخت خواباند، و مختصات دکارتی و هندسه اقلیدسی در آن به کار برد. رویه کره و تخم‌مرغ و زین اسب را نمی‌توان شکافت و بی‌آن که پاره‌های شکافته شده از هم دور شوند و یا هم‌دیگر را بپوشانند روی یک صفحه خواباند. هندسه در این فضاها اقلیدسی نیست و مختصات دکارتی‌ای که تمام فضا را بپیماید در آن‌ها نمی‌توان برپا کرد. این فضاها ذاتاً خمیده هستند. می‌توان در آن‌ها مختصات خمیده برپا کرد، بین هر دو نقطه آن‌ها کوتاه‌ترین فاصله (ژئودزیک) تعریف کرد، و فاصله آن‌ها را به صورت $dl^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ نوشت که در آن ماتریس واحد یا ماتریس مینکوسکی نیست.

بیش‌ترین چیزی که برای یک فضای خمیده پیوسته و قابل مشتق‌گیری می‌توان گفت این است که به هر نقطه آن می‌توان یک صفحه مماس کرد. این صفحه در بخش کوچکی، در دور

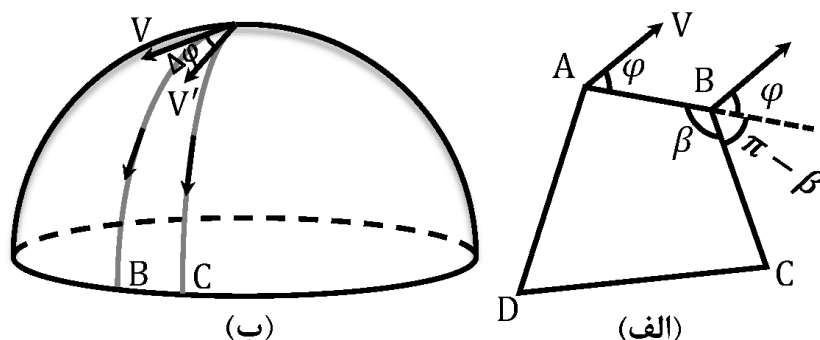
و بر نقطه تماس، با فضای خمیده مشترک است. می‌توان در این بخش مشترک مختصات دکارتی برپا کرد. ولی این مختصات همه فضای خمیده را نمی‌پیماید (هم‌پار مختصات تخت موضعی در فضای خمیده، مختصات لخت موضعی در فضا-زمان در حضور گرانش است). پرسش این است در یک فضا یا فضا-زمان n بعدی که در آن فاصله دو نقطه با تفاوت مختصات dx^μ با فرمول زیر داده شده است:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (۱.۶)$$

چگونه می‌توان معلوم کرد فضا تخت است یا خمیده؟ مختصات دکارتی همه‌جایی می‌توان در آن برپا کرد یا نه؟ یا پرسش بنیادی‌تر، خمیدگی را چگونه باید تعریف کرد و رابطه آن با متریک فضا یا فضا-زمان چیست؟ در جستجوی پاسخ به سراج فضاهای دو بعدی، صفحه کاغذ، رویه‌های کره، تخم‌مرغ و زین اسب برویم و نشانه‌ها را در آن‌ها جستجو کنیم.

نشانه ۱: مجموع زاویه‌های یک مثلث تخت ۱۸۰ درجه است. مجموع زاویه‌های یک مثلث کروی بیشتر از ۱۸۰ درجه، و یک مثلث در روی زین اسب کمتر از ۱۸۰ درجه است. یادآوری می‌شود اضلاع مثلث در هر کدام از این سه فضا کوتاه‌ترین فاصله‌ها بین رأس‌های مثلث‌اند و ژئودزیک‌اند. هم‌چنین نیز توجه شود در روی کره و زین اسب هر اندازه مساحت مثلث‌ها بزرگ‌تر باشد تفاوت مثبت و منفی مجموع سه زاویه از ۱۸۰ درجه بیشتر است.

نشانه ۲: انحراف ژئودزیک: در یک فضای تخت، هر خط مستقیم بین دو نقطه ژئودزیک است. دو ژئودزیک موازی همیشه موازی می‌مانند. در روی کره، نصف‌النهارها از قطب تا استوا یا از قطب تا قطب ژئودزیک هستند. دو نصف‌النهار در قطب‌ها با هم یکی‌اند. ولی به تدریج که به استوا نزدیک می‌شوند به سبب خمیدگی رویه کره از هم دور می‌شوند (انحراف ژئودزیک‌ها از هم‌دیگر). دور و نزدیک شدن ژئودزیک‌ها از هم‌دیگر نشان دیگری از خمیدگی فضا است. انحراف ژئودزیک هم‌پاری در فضا-زمان در حضور گرانش دارد: دو سنگ را در میدان گرانش زمین بدون سرعت اولیه رها کنیم تا به آزادی سقوط کنند. مسیر سنگ‌ها خط مستقیم، از نقطه رهاش به مرکز زمین است. این مسیرها بخش فضایی مسیر ژئودزیک در فضا-زمان هستند، به آرامی به هم نزدیک می‌شوند (خمیدگی فضا-زمان به خاطر گرانش).



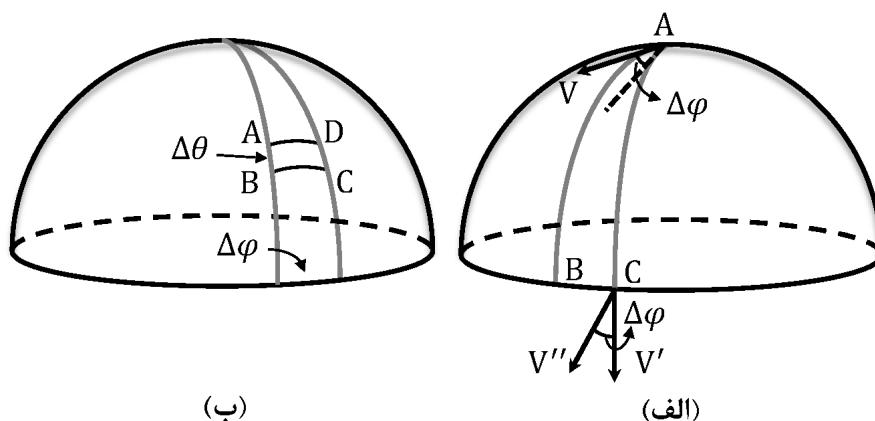
شکل ۱۰۶: (الف) انتقال موازی بردار در مسیر بسته در فضای تخت. بردار پس از یک دور کامل به جای خود برمی‌گردد. (ب) انتقال موازی بردار در مسیر بسته در روی کره. بردار پس از زدن یک دور کامل به جای خود برنمی‌گردد.

نشانه ۳: انتقال موازی در طول ژئودزیک: در شکل ۱۰۶ (الف)، بردار V را موازی با خود از A به B به C به D ببریم و به A برگردانیم. اضلاع چارضلعی خط‌های راست هستند. برای انتقال موازی کافی است زاویه بردار با اضلاع چارضلعی به هنگام جابه‌جایی ثابت نگاه داشته شود. بردار پس از زدن یک دور کامل به جای خود برمی‌گردد و تغییر نکرده است.

حال در شکل ۱۰۶ (ب)، بردار V را در روی مثلث کروی ABC موازی با خود جابه‌جا کنیم، به طوری که هر نقطه زاویه بردار با ژئودزیکی که در طول آن جابه‌جا می‌شود ثابت بماند. AB نصف‌النهار، BC کمانی از دایره استوا، و CA نصف‌النهار است. هر سه خط ژئودزیک‌اند. فرض کنیم بردار V در A مماس بر نصف‌النهار AB باشد و تا B جابه‌جا شود. در B عمود بر دایره استواست و به C که برسد مماس بر نصف‌النهار CA خواهد بود. در انتهای مسیر از C به A مماس بر نصف‌النهار CA در نقطه A خواهد بود و به روی بردار پیشین V نمی‌افتد. آن را با V' نمایش داده‌ایم. تفاوت دو بردار، $\Delta V = V' - V$ است و نشان از خمیده‌گی رویه کروی دارد.

مسئله انتقال موازی بردار در طول ژئودزیک را به صورت دیگر هم می‌توان گفت. در شکل ۲۰۶ (الف) بردار V را به موازات خودش از A به B و سپس به C برسانیم. بردار V'

خواهد شد. بار دیگر همان بردار را از مسیر AC به نقطه C برسانیم. در نقطه A بردار V با مماس بر AC زاویه $\Delta\varphi$ می‌سازد. در رسیدن به نقطه C باید همین زاویه را با مماس بر AC در نقطه C نگاه دارد. به بردار V'' خواهیم رسید که با V' زاویه $\Delta\varphi$ می‌سازد. نتیجه آن که اگر یک بردار از دو مسیر مختلف موازی با خودش جابه‌جا شود و به نقطه دیگری برسد دو بردار پایانی روی هم نخواهند افتاد. از این ویژگی در نشانه ۴ که در زیر می‌آید دوباره یاد خواهیم کرد.



شکل ۲.۶: (الف) انتقال موازی بردار از یک نقطه به نقطه دیگر از دو مسیر مختلف به دو نتیجه مختلف می‌رسد. (ب) ناجابه‌جایی ترتیب مشتق‌ها در فضاهای خمیده: دو ضلع AB و CD بخشی از دو دایره نصف‌النهار با تفاوت زاویه $\Delta\varphi$ اند و ژئودزیک‌اند. اندازه آن‌ها $\Delta\theta$ است. دو ضلع دیگر AD و BC هم ژئودزیک‌اند. بخشی از دو دایره عظیمه‌ای هستند که نقطه‌های (A,D) و (B,C) را به هم وصل می‌کنند. ولی اندازه آن‌ها $\Delta\varphi$ نیست.

نشانه ۴: در شکل ۲.۶ (ب)، میدان برداری $V(\theta, \varphi)$ را در روی کره در نظر بگیریم. از آن نخست نسبت به θ و سپس نسبت به φ مشتق هم‌وردا بگیریم. اگر ترتیب مشتق‌گیری را عوض کنیم خواهیم دید باهم برابر نیستند. این تفاوت ریشه در انتقال موازی بردارها در طول ژئودزیک‌ها دارد. در شکل ۲.۶ (ب) مختصه گوشه‌های چارضلعی ABCD عبارت‌اند از:

$$A(\theta, \varphi), \quad B(\theta + \Delta\theta, \varphi), \quad C(\theta + \Delta\theta, \varphi + \Delta\varphi), \quad D(\theta, \varphi + \Delta\varphi).$$

دو ضلع AB و CD روی نصف‌النهارها هستند و ژئودزیک‌اند. اندازه آن‌ها $\Delta\theta$ است. دو ضلع AD و BC هم ژئودزیک‌اند ولی برابر $\Delta\varphi$ نیستند. این دو بخشی از دو دایره عظیمه‌ای هستند که نقطه‌های $(A$ و $D)$ و $(B$ و $C)$ را به هم وصل می‌کنند و در روی مدارهای θ و $\theta + \Delta\theta$ نمی‌افتند.

برای مشتق‌گیری هم‌وردا نخست نسبت به θ و سپس نسبت به φ باید گام‌های زیر را برداریم:

$$۱. \quad V_A \text{ به } B \text{ بیاوریم، آن را به } V_{AB} \text{ نمایش دهیم و از } V_B \text{ کم کنیم، } (V_B - V_{AB}).$$

$$۲. \quad V_B - V_{AB} \text{ برداری در } B \text{ است. به } C \text{ بیاوریم و به } (V_B - V_{AB})_C \text{ نمایش دهیم.}$$

$$۳. \quad V_B \text{ به } C \text{ بیاوریم، به } V_{BC} \text{ نمایش دهیم و از } V_C \text{ کم کنیم، } (V_C - V_{BC}).$$

$$۴. \quad (V_C - V_{BC}) \text{ برداری در } C \text{ است. از آن } (V_B - V_{AB})_C \text{ را کم کنیم:}$$

$$(V_C - V_{BC}) - (V_{BC} - V_{ABC}) = V_C - 2V_{BC} + V_{ABC}.$$

۵. در گام نهایی بردار $V_C - 2V_{BC} + V_{ABC}$ را به $\Delta\theta\Delta\varphi$ بخش کنیم و $\Delta\theta$ و $\Delta\varphi$ را به صفر میل دهیم:

$$V^\mu_{;\theta;\varphi} = \lim_{(\Delta\theta, \Delta\varphi) \rightarrow 0} (V_C^\mu - 2V_{BC}^\mu + V_{ABC}^\mu) / \Delta\theta\Delta\varphi.$$

در این عبارت زیرنگاشت μ را که تا به حال ننوشتیم به آشکار آورده‌ایم. یادآوری می‌شود V_{ABC} بردار V_A است که به موازی خود از A به B و سپس به C آورده شده است. اگر ترتیب مشتق‌گیری عوض شود و بردار V_A از مسیر ADC به نقطه C بیاید، نتیجه چیز دیگری خواهد شد:

$$V^\mu_{;\varphi;\theta} = \lim_{(\Delta\theta, \Delta\varphi) \rightarrow 0} (V_C^\mu - 2V_{DC}^\mu + V_{ADC}^\mu) / \Delta\theta\Delta\varphi.$$

آشکار است اگر فضا خمیده باشد V_{ABC} با V_{ADC} ، و V_{BC} با V_{DC} ، برابر نخواهند بود و دو مشتق با دو ترتیب وارونه یکی نخواهند بود.

$$V^\mu_{;\theta;\varphi} - V^\mu_{;\varphi;\theta} \neq 0.$$

۲.۶ تانسور خمشِ ریمان - کریستوفل

هر کدام از نشانه‌های بالا را می‌توان راهنما گرفت و به یک تعریف ریاضی برای خمیدگی فضا یا فضا-زمان دست یافت. در این کتاب راهنمای ما نشانه ۴ خواهد بود. از بردار $V_\mu(x)$ نخست نسبت به ν و سپس نسبت به κ مشتق هم‌وردا بگیریم، $V_{\mu;\nu;\kappa}$. بار دیگر ترتیب مشتق‌گیری را جابه‌جا کنیم، $V_{\mu;\kappa;\nu}$ ، و از هم کم کنیم. با یاری معادله‌های (۳۵.۵) - (۳۳.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} V_{\mu;\nu;\kappa} &= \partial_\kappa V_{\mu;\nu} - \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda V_{\mu;\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda V_{\lambda;\nu} \\ &= \partial_\kappa [\partial_\nu V_\mu - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda V_\lambda] \\ &\quad - \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda [\partial_\lambda V_\mu - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma V_\sigma] - \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda [\partial_\nu V_\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V_\sigma] \\ &= \partial_\nu \partial_\kappa V_\mu - \partial_\kappa V_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - V_\lambda \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \\ &\quad - \partial_\lambda V_\mu \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda + \Gamma_{\nu\kappa}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma V_\sigma - \partial_\nu V_\lambda \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda + \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma V_\sigma. \end{aligned}$$

حال جای κ و ν را عوض کنیم و از عبارت بالا کم کنیم. مشتق‌های درجه یک و دو V_μ از هم می‌روند و خواهیم داشت:

$$V_{\mu;\nu;\kappa} - V_{\mu;\kappa;\nu} = -V_\lambda R_{\mu\nu\kappa}^\lambda \quad (۲.۶)$$

که در آن

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\kappa\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda. \quad (۳.۶)$$

اگر به جای بردار هم‌وردای V_μ ، از بردار پادوردای V^λ یا از یک تانسور مرتبه بالاتر، مانند T_{μ}^λ ، دو بار مشتق می‌گرفتیم و ترتیب آن‌ها را جابه‌جا می‌کردیم به نتیجه‌های زیر می‌رسیدیم:

$$V^\lambda_{;\nu;\kappa} - V^\lambda_{;\kappa;\nu} = V^\sigma R_{\sigma\nu\kappa}^\lambda \quad (۴.۶)$$

$$T^\lambda_{\mu;\nu;\kappa} - T^\lambda_{\mu;\kappa;\nu} = T^\sigma_{\mu} R_{\sigma\nu\kappa}^\lambda - T^\lambda_{\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^\sigma \quad (۵.۶)$$

عبارت $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$ را تانسور خمشِ ریمان - کریستوفل (Riemann-Christoffel) یا به کوتاهی تانسور خمش خواهیم نامید. تانسور بودن آن از معادله‌های (۲.۶) - (۵.۶) آشکار است.

مثلا در معادله (۲.۶)، طرف چپ تانسور مرتبه سه است. بنابراین در طرف راست، $R^\sigma_{\mu\nu\kappa}$ پیش از تنجیدن با V_σ باید تانسور مرتبه چهار باشد. البته می‌توان قانون تبدیل معادله (۶.۳) را در تبدیل عام مختصات از x به x' آزمود و مطمئن شد که تانسور ریمان - کریستوفل به درستی مانند یک تانسور مرتبه چهار تبدیل می‌شود.

در تانسور خمشی ریمان - کریستوفل مشتق‌های دوم متریک با توان یک و مشتق اول آن با توان دو ظاهر می‌شوند. تمام مولفه‌های تانسور خمشی در فضاهای تخت مانند صفحه و رویه‌های مخروط و استوانه صفر است. زیرا همیشه می‌توان در چنین فضاهایی چارچوب مختصات دکارتی همه‌جایی برپا کرد که در آن همه هم‌وستارها و مشتق‌های‌شان صفر است؛ و اگر یک عبارت برداری یا تانسوری در یک چارچوب مختصات در همه نقاط فضا صفر شود، تبدیل شده آن در هر چارچوب دیگر نیز باید صفر باشد.

۱.۲.۶ تقارن‌های تانسور خمشی

نخست تانسور خمشی را با اندیس‌های همه هم‌وردا بنویسیم:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\rho} R^\rho_{\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\rho} [\partial_\kappa \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\kappa} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\sigma\kappa} - \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} \Gamma^\rho_{\sigma\nu}]$$

با توجه به تعریف هم‌وستارها، معادله (۱۴.۵)، و رابطه

$$\partial_\kappa (g_{\lambda\rho} g^{\rho\sigma}) = g_{\lambda\rho} \partial_\kappa g^{\rho\sigma} + g^{\rho\sigma} \partial_\kappa g_{\lambda\rho} = 0.$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = & \frac{1}{2} [\partial_\kappa \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\kappa \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu g_{\lambda\kappa} + \partial_\nu \partial_\lambda g_{\mu\kappa}] \\ & + g_{\rho\sigma} [\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} - \Gamma^\rho_{\kappa\lambda} \Gamma^\sigma_{\mu\nu}]. \end{aligned} \quad (۶.۶)$$

با یک نگاه به معادله (۶.۶) می‌توان قرینه‌گی‌ها و یادقرینه‌گی‌های زیر را شناخت.

- نسبت به جابه‌جایی جفت زیرنگاشت اول با جفت زیرنگاشت دوم، تانسور خمشی قرینه است:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu} \quad (۷.۶)$$

- نسبت به جابه‌جایی دو زیرنگاشت اول با همدیگر یا دو زیرنگاشت دوم با همدیگر تانسور خمش پادقرینه است:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu}. \quad (۸.۶)$$

- با ثابت نگاه داشتن λ (یا هر کدام از زیرنگاشت‌ها) و جمع روی جای‌گشت‌های سه زیرنگاشت دیگر حاصل صفر است:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0. \quad (۹.۶)$$

اتحاد بیانکی

گذشته از سه ویژگی جبری بالا، تانسور خمش در معادله دیفرانسیلی زیر نیز صدق می‌کند:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\rho} + R_{\lambda\mu\rho\nu;\kappa} + R_{\lambda\mu\kappa\rho;\nu} = 0. \quad (۱۰.۶)$$

معادله (۱۰.۶) را اتحاد بیانکی (Bianchi) می‌نامند.

۲.۲.۶ تنجش‌های تانسور خمش

تنجش تانسور خمش بین دو اندیس اول یا دو اندیس دوم، به سبب پادقرینگی‌های معادله (۸.۶) صفر می‌دهد. تنجش معنادار باید روی یکی از اندیس‌های جفت اول و یکی از اندیس‌های جفت دوم باشد:

$$R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\kappa} = -R^{\lambda}_{\mu\kappa\lambda} = -R_{\mu}^{\lambda}{}_{\lambda\kappa} = R_{\mu}^{\lambda}{}_{\kappa\lambda}. \quad (۱۱.۶)$$

این تانسور را تانسور ریچی (Ricci) می‌نامند که نسبت به جابه‌جایی دو زیرنگاشت قرینه است:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}.$$

از تنجش دوباره تانسور ریچی «خمش نرده‌ای» به دست می‌آید:

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} \quad (۱۲.۶)$$

از تنجش اتحاد بیانکی روی اندیس‌های λ و ν رابطه زیر به دست می‌آید:

$$R_{\mu\kappa;\rho} - R_{\mu\rho;\kappa} + R^{\lambda}_{\mu\kappa\rho;\lambda} = 0 \quad (13.6)$$

بار دیگر از تنجش روی اندیس‌های μ و κ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} R_{;\rho}^{\mu} - R^{\mu}_{\rho;\mu} - R^{\lambda}_{\rho;\lambda} = 0 &\Rightarrow R^{\mu}_{\rho;\mu} = \frac{1}{4}R_{;\rho}, \\ (R^{\mu\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}R)_{;\nu} = G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \end{aligned} \quad (14.6)$$

که در آن،

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}R$$

را تانسور انیشتن می‌نامند. چار دیورژانس تانسور انیشتن صفر است و در بخش‌های آینده خواهیم دید این ویژگی در تدوین گرانش انیشتن و اصل پایستگی انرژی-تکانه نقش اساسی دارد.

۳.۲.۶ درایه‌های مستقل تانسورهای ریمان - کریستوفل و ریچی

گفته شد $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ نسبت به جابه‌جایی (λ, μ) پادقرینه است بنابراین در فضای چهار بعدی می‌توان این جفت را به $6 = \frac{1}{4}(4 \times 4 - 4)$ جور برگزید. جفت (ν, κ) نیز به همان دلیل شش گزینه بیشتر ندارد. از سوی دیگر تانسور خمشی نسبت به جابه‌جایی جفت (λ, μ) با جفت (ν, κ) قرینه است. بنابراین درایه‌های متمایز از هم آن‌ها $21 = 6 + \frac{1}{4}(6 \times 6 - 6)$ است. ولی معادله جبری (۹.۶) یک قید دیگر روی این عدد می‌گذارد، و آن را تا 20 پایین می‌آورد. بنابراین تانسور ریمان در فضا-زمان چهار بعدی حد اکثر 20 درایه مستقل دارد. تانسورهای ریچی و انشتین از مرتبه دو و قرینه هستند و درایه‌های متمایز از هم آن‌ها حد اکثر 10 است.

در حالت کلی، در فضای n بعدی می‌توان نشان داد که تعداد مولفه‌های تانسور ریمان - کریستوفل برابر است با [۲۲]:

$$\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1). \quad (15.6)$$

این عدد برای فضای یک بعدی صفر است و این شگفت‌انگیز نیست. همیشه می‌توان فضای یک بعدی (یک رشته نخ مچاله‌شده) را باز کرد و روی یک خط مستقیم خواباند و برای آن نوشت $dl^2 = dx^2$. در فضای دو بعدی تنها یک مولفه وجود دارد، $R_{1212} = R_{2112} = -R_{2121} = -R_{1221}$ در فضای سه بعدی این عدد ۶ است.

مسئله‌ها:

- تانسور خمش را برای رویه کروی با متریک $dl^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ حساب کنید.
- تانسور خمش را در فضای دو بعدی با متریک $dl^2 = d\xi^2 - \sinh^2 \xi d\eta^2$ حساب کنید.
- تانسور خمش را در فضای سه بعدی با متریک $dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ حساب کنید و نشان دهید همه مولفه‌های آن صفر است و فضای سه بعدی اقلیدسی، اگر در مختصات خمیده هم نوشته شود، هنوز تخت است.

فصل ۷

داشته‌های کیهان : ماده و تابش - اصل‌های پایستگی

در کیهان رصدپذیر با دو چیز آشنا هستیم: تابش الکترومغناطیسی و ماده. هر کدام از این دو به همراه خود انرژی و تکانه دارند. تابش الکترومغناطیسی جرم در حال سکون ندارد و در بخش نسبیت خاص دیده‌ایم سرعت نشر آن، سرعت نور، یک ثابت کیهانی است. ماده، شامل انبوهه‌های ذره‌های بنیادی، مهم‌ترین آن‌ها پروتون، نوترون و الکترون، جرم در حال سکون دارند، و می‌توانند با هر سرعتی کم‌تر از سرعت نور حرکت کنند. ذره‌های بنیادی دیگری هم هستند که تا به امروز جرم سکون برای آن‌ها شناخته نشده است، مانند نوترینوها، که با سرعت نور حرکت می‌کنند و انرژی و تکانه با خود می‌برند.

در رصدهای نجومی، از گستره کهکشانی گرفته تا کیهانی، سخن از ماده تاریک و انرژی تاریک هم رفته است، تا در جاهایی که گرانش ماده مشاهده‌پذیر کم می‌آورد جای کم‌آوری‌ها را پر کنند. با این توصیف، ماده و انرژی تاریک را باید چیزهایی دانست که با ماده دیده‌شدنی اندرکنش الکترومغناطیسی ندارند و نباید با روش‌های معمول آشکارسازی، که الزاماً مبتنی بر اندرکنش‌های الکترومغناطیسی‌اند، آشکار شوند. در این بخش تنها از دیده‌شدنی‌ها سخن خواهیم گفت.

۱.۷ پایستگی شمار ذره‌ها

در شرایط فیزیکی معمول زمینی و آسمانی، ذره‌های تشکیل دهنده ماده انبوه به هم تبدیل نمی‌شوند و شمار آن‌ها پایسته است. برای یافتن صورت ریاضی پایستگی شمار ذره‌ها به شرح زیر عمل می‌کنیم: شماره‌ای از ذره‌ها در نظر بگیریم. در نقطه x ، در چارچوب لخت موضعی شاره، چگالی شمار ذره‌ها $n(x)$ و چگالی شار آن‌ها nU^α باشد. برای پایستگی شمار ذره‌ها لازم است چار دیورژانس شار صفر باشد،

$$(nU^\alpha)_{,\alpha} = 0.$$

برای یافتن صورت هم‌وردای آن در چارچوب مختصات عام کافی است دیورژانس در فضای تخت موضعی با دیورژانس در فضا-زمان خمیده عام جای‌گزین شود:

$$(nU^\mu)_{;\mu} = n_{,\mu}U^\mu + nU^\mu_{;\mu} = 0. \quad (1.7)$$

در تقریب سرعت‌های کم و گرانش ضعیف اگر بپذیریم،

$$U^0 \approx c, \quad U^i \approx v^i = dx^i/dt$$

و مشتق هم‌وردا را با مشتق معمولی برابر بگیریم به معادله پایستگی کلاسیک برای شمار ذره‌ها یا جرم آن‌ها می‌رسیم:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0.$$

۲.۷ پایستگی انرژی-تکانه

در معادله (۹.۴)، از تانسور انرژی-تکانه میدان الکترومغناطیس سخن گفته‌ایم. تعمیم آن به نسبیت عام چنین است:

$$T_{\text{em}}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (F^{\mu\kappa} F_{\kappa}^{\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} F^{\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa}), \quad (2.7)$$

$$F_{\mu\kappa} = \partial_\kappa A_\mu - \partial_\mu A_\kappa.$$

برای داشته مادی کیهان، کهکشان، ستاره، یا هر سیستم دیگر نیز می‌توان تانسور انرژی-تکانه تعریف کرد. در بسیاری از جاها می‌توان ماده را شاره کامل دانست و آن را پیوستاری

از اتم و مولکول و ذره‌های بنیادی گرفت. در چارچوب سکون شاره انتظار می‌رود تانسور انرژی-تکانه قطری باشد و برای شاره هم‌سان‌گرد، درایه‌های مکانی باهم برابر باشند:

$$T_{\text{rest}}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

در معادله (۳.۷)، در درایه‌های قطری مکانی، p باید به فشار تعبیر شود، و ρc^2 چگالی انرژی باشد. لازم است تاکید شود، ρ بعد چگالی جرمی دارد ولی الزاما برابر با حاصل ضرب شمار ذره‌ها در جرم سکون آن‌ها نیست. صورت‌های دیگری از انرژی، مانند انرژی جنبشی و گرمایی ممکن است در آن سهم داشته باشند. فرق دیگر این که n یک کمیت نرده‌ایست و ρ بخشی از یک تانسور مرتبه دو است و قانون تبدیل یک‌سان ندارند. با وجود این باریک‌بینی‌ها در زیر در نوشتن قانون حرکت شاره‌ها در تقریب کلاسیک، معادله اوایلر، چگالی جرمی و ذره‌ای را با هم متناسب خواهیم گرفت. اگر شاره در حال حرکت باشد و سرعت آن در چارچوب لخت موضعی $v(x, t)$ باشد، برای یافتن تانسور انرژی-تکانه شاره در حال حرکت کافی است از چارچوب سکون شاره به چارچوب لخت موضعی تبدیل لورنتس انجام گیرد:

$$T_{\text{local inertial}}^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta T_{\text{rest}}^{\gamma\delta}, \quad (4.7)$$

که در آن ماتریس تبدیل لورنتس برابر است با:

$$\Lambda^0_0 = \gamma, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \beta = v/c, \quad (5.7)$$

$$\Lambda^0_i = \Lambda^i_0 = -\gamma\beta_i, \quad \beta_i = v_i/c, \quad (6.7)$$

$$\Lambda^i_j = \Lambda^j_i = \gamma\delta^i_j - (\gamma - 1)\frac{\beta_i\beta_j}{\beta^2}. \quad (7.7)$$

برای به دست آوردن این عبارت‌ها به مسئله پایانی زیربخش ۱.۵.۳ مراجعه شود. از جایگذاری معادله‌های (۷.۷ - ۵.۷) و (۳.۷) در معادله (۴.۷) به دست می‌آید:

$$T_{\text{local inertial}}^{\alpha\beta} = -p\eta^{\alpha\beta} + (p/c^2 + \rho)U^\alpha U^\beta, \quad (8.7)$$

که در آن $U^\alpha = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ چارسرعت شاره در چارچوب لخت موضعی است. گام پایانی، تبدیل معادله (۸.۷) از چارچوب لخت موضعی به چارچوب مختصات عام در حضورگرانش، است. برای این منظور کافی است متریک $\eta^{\alpha\beta}$ با متریک عام $g^{\mu\nu}$ جای‌گزین شود و به جای چارسرعت U^α چارسرعت U^μ در چارچوب عام به کار رود:

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (p/c^2 + \rho)U^\mu U^\nu. \quad (۹.۷)$$

انرژی و تکانه سیستم‌های دینامیکی در گذر زمان پایسته‌اند. نمی‌توان آن‌ها را بود یا نابود کرد. بنابراین لازم است چاردیورژانس تانسور انرژی-تکانه صفر شود:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} + \frac{1}{\gamma} \partial_\nu \ln(-g) T^{\mu\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu T^{\lambda\nu} = 0, \quad (۱۰.۷)$$

که در آن g دترمینان تانسور متریک است.

۱.۲.۷ حد کلاسیک پایستگی انرژی-تکانه

برای این‌که مفاهیم فیزیکی در پیچیدگی‌های ریاضی گم نشود، حد کلاسیک معادله (۹.۷) را در زیر بررسی می‌کنیم. در سرعت‌های کم:

$$U^0 \approx c, \quad U^i \approx v^i = dx^i/dt, \quad (v/c)^2 \ll 1$$

است. در گرانش ضعیف و ایستا، چنان‌چه پیش‌تر دیده‌ایم،

$$g_{00} \approx 1 + 2\phi(x)/c^2, \quad g_{0i} = g_{i0} \approx 0,$$

$$g_{ij} \approx -\delta_{ij}, \quad g \approx -(1 + 2\phi/c^2), \quad \ln(-g) \approx 2\phi/c^2.$$

هم‌وستارها همه صفراند به جز:

$$\Gamma_{00}^i \approx \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^i}.$$

در تانسور انرژی-تکانه نیز از فشار در برابر ρc^2 ، از ϕ/c^2 در برابر ۱، و از جمله‌هایی مانند $p \partial \phi / \partial x^i$ و $p v^i$ به خاطر کوچکی آن‌ها می‌توان گذشت کرد:

$$T^{00} \approx \rho c^2, \quad T^{0i} \approx \rho c v^i, \quad T^{ij} \approx p \delta^{ij} + \rho v^i v^j. \quad (۱۱.۷)$$

۲.۲.۷ معادله حرکت شاره کامل

با در نظر گرفتن تقریب‌های بالا، مولفه i معادله (۱۰.۷) می‌دهد:

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \frac{\partial(p\delta^{ij})}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^i v^j) + \rho \frac{\partial\phi}{\partial x^i} = 0.$$

با به کار بردن تقریب نیوتنی معادله (۱.۷) که در آن ρ و n را متناسب با هم می‌گیریم، به دست می‌آوریم:

$$\rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x^i} - \rho \frac{\partial\phi}{\partial x^i}.$$

معادله بالا حرکت شاره کامل و معادله اوایلر است.

فصل ۸

گرانش انیشتن

It is contrary to the mode of thinking in science to conceive of a thing (the space-time continuum) which acts itself, but which cannot be acted upon.

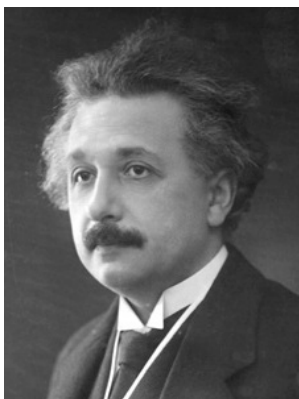
Einstein, The Meaning of relativity

سخن از چیزی (پیوستار فضا-زمان) که روی چیزهای دیگر اثر کند و خود از چیزی اثر نپذیرد اندیشه علمی نیست.

انیشتن، معنای نسبیت

تحول سامانه‌های دینامیکی در فضا-زمان انجام می‌گیرد. فضا-زمان نسبیت خاص مطلق است. بر سرنوشت سامانه‌ها اثر می‌گذارد و خود از آن‌ها اثر نمی‌پذیرد. این اندیشه را انیشتن علمی نمی‌داند. انتظار دارد کنش فضا-زمان روی سامانه‌های دینامیکی واکنش آن‌ها را برانگیزد و روی فضا-زمان اثر بگذارند. با این اندیشه، انرژی-تکانه ماده و تابش باید هندسه فضا-زمان را تغییر دهد، و متقابلاً تحول فضایی-زمانی انرژی و تکانه را فضا-زمان رقم بزند. به این ترتیب هندسه فضا-زمان خود به عنوان یک میدان، یک سامانه دینامیکی، در می‌آید و به یک قانون تحول نیاز پیدا می‌کند.

۱.۸ معادله میدان انیشتن



در جست‌وجوی پیوندی بین فضا-زمان و انرژی-تکانه، انیشتن پیش‌نهاد می‌کند ویژگی‌ای از فضا-زمان با ویژگی همانندی از ماده و تابش برابر هم گذاشته شوند. تانسور خمش انیشتن، معادله (۶). (۱۴)، و تانسور انرژی تکانه، معادله (۹.۷)، هر دو تانسور مرتبه دو و قرینه هستند و چارديورژانس هر دو صفر است. می‌توانند با هم برابر گذاشته شوند:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T^{\mu\nu}. \quad (1.8)$$

در این معادله ضریب تناسب κ بعد زمان بر طول برجرم دارد و خواهیم دید با ثابت گرانش نیوتن متناسب است:

$$\kappa = 8\pi G/c^4. \quad (2.8)$$

معادله (۱.۸) را به صورت دیگری هم می‌توان نوشت. تنجش آن با $g_{\mu\nu}$ به $R = \kappa T$ می‌انجامد و جای‌گذاری R در معادله (۱.۸) می‌دهد:

$$R^{\mu\nu} = \kappa(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T). \quad (3.8)$$

معادله‌های (۱.۸) - (۳.۸) را معادله‌های میدان انیشتن می‌نامند. پیش‌تر $R^{\mu\nu}$ و R را بر حسب متریک فضا-زمان شناخته‌ایم. با داشتن $T^{\mu\nu}$ می‌توان معادله‌های میدان را حل کرد و به هندسه فضا-زمان در حضور انرژی-تکانه دست یافت. متقابلاً، اگر تانسور متریک معلوم باشد، می‌توان به انرژی-تکانه‌ای که هندسه فضا-زمان را معماری کرده است رسید. تانسورهای $T^{\mu\nu}$ ، $G^{\mu\nu}$ و $g^{\mu\nu}$ مرتبه دو و قرینه‌اند. ده درایه متمایز از هم دارند. معادله (۱.۸) نیز به ظاهر ده مولفه دارد، ولی چارديورژانس آن صفر است، که خود چهار شرط دیفرانسیلی است و مولفه‌های مستقل معادله را به شش کاهش می‌دهد. بنابراین در تعیین

تانسور متریک چهار درجه آزادی وجود دارد که می‌توان از آن، حسب مورد، برای ساده‌سازی مسئله یاری جست. در نسبیت عام، آزادی در گزیدن مختصات، همانند آزادی در گزیدن پیمانه در الکترومغناطیس است. مختصات هارمونیک یکی از رایج‌ترین گزینه‌هاست و در بخش موج گرانشی از آن سخن خواهیم گفت. در مختصات هارمونیک آمیزه تنجیده‌ای از هم‌وستارها صفر گزیده می‌شود:

$$\Gamma^\lambda = g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \partial_\kappa [(-g)^{1/2} g^{\kappa\lambda}] = 0. \quad (4.8)$$

۱.۱.۸ ثابت کیهان شناختی، Λ

معادله میدان انیشتن در همان روزهای نخست پیدایش‌اش (۱۹۱۶) برای بررسی کیهان به کار رفت و نشان داده شد کیهان باید در حال انبساط باشد. آگاهی از آسمان و کیهان در آن سال‌ها اندک بود. صاحبان نظر کیهان پایدار و همیشه به یک‌حال را می‌پسندیدند. انیشتن برای رسیدن به کیهان پایدار شگرد دیگری اندیشید (۱۹۱۷). چار دیورژانس تانسور متریک، همانند تانسور انیشتن، صفر است، $g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ، و می‌تواند با یک ضریب Λ ، که بعدها ثابت کیهان شناختی نامیده شد، در معادله میدان گنجانده شود و ضریب طوری گزیده شود که از انبساط کیهان جلو بگیرد:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}. \quad (5.8)$$

با انباشت رصدهای نجومی، هابل در ۱۹۲۹ اعلام کرد که کیهان بزرگ‌مقیاس به راستی در حال انبساط است. انیشتن از کرده‌اش پا پس کشید و دیگران هم آن را تا سال‌ها رها کردند. ولی در دهه‌های پایانی سده بیست معلوم شد کیهان بزرگ‌مقیاس نه تنها منبسط می‌شود بلکه انبساط آن شتابنده هم هست. برای توجیه این پدیده به گرانشی بسیار بیش از آن چه ماده دیده‌شدنی داشت، نیاز بود. انرژی و تکانه موجود در کیهان تنها ۵ درصد گرانش مورد نیاز را تامین می‌کرد. برای ۹۵ درصد مانده باید از چیز یا چیزهای دیگری (اگر بتوان این کلمه‌ها را رسا دانست)، که امروزه به نام انرژی و ماده تاریک نامیده شده‌اند، کمک گرفته شود. انرژی و ماده تاریک چیزهای شناخته‌شده‌ای نیستند. تنها برای تامین گرانش بیشتر پای‌شان به میان کشیده شده است. فرض می‌شود انرژی تاریک مانند شارهای همه کیهان را پر کرده است. معادله حالت آن طوری گزیده می‌شود که بعضی از پارامترهای رصدی کیهان

را بتواند توجیه کند. در سال‌های اخیر، ثابت کیهان‌شناختی انیشتن دوباره مورد توجه قرار گرفته است. مدل کیهان‌شناختی رایج روز به نام Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter) شناخته می‌شود.

۲.۱.۸ حد ضعیف گرانش نسبیتی - گرانش نیوتنی

معادله‌های (۱.۸) و (۳.۸) گرانش نسبیتی و جانشینی برای گرانش نیوتنی هستند، و خواهیم دید بسیاری از نارسایی‌های گرانش نیوتنی را که در آغاز بخش ۵ به آن‌ها اشاره شد چاره می‌کند. از سوی دیگر گرانش نیوتنی در توجیه مشاهده‌های زمینی و آسمانی کارایی ستایش برانگیزی داشته و دارد. باید انتظار داشته باشیم حد کلاسیک گرانش نسبیتی، گرانش نیوتنی باشد. پیش‌تر در بررسی معادله ژئودزیک در حد سرعت‌های کم، متریک فضا-زمان را به صورت زیر نوشتیم:

$$g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2, \quad g_{0i} = g_{i0} = 0, \quad g_{ij} = -\delta_{ij},$$

Φ را با پتانسیل گرانش نیوتنی برابر یافتیم. معادله میدان انیشتن را با همین متریک ضعیف بیازماییم. از هم‌وستارها و درایه‌های تانسور خمش تنها جمله‌های غیرصفر، که از مرتبه بزرگی Φ/c^2 بیشتر نباشند، عبارت‌اند از:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}, \quad R^{00} = -\frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi.$$

در طرف راست معادله (۱.۸) نیز، با چشم‌پوشی از فشار در برابر چگالی و فرض سکون شاره، داریم:

$$T^{00} = \rho c^2, \quad T \approx \rho c^2.$$

از جای‌گذاری این تقریب‌ها در معادله (۱.۸) خواهیم داشت:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{2} \kappa c^4 \rho.$$

ولی گرانش نیوتنی از معادله پواسون پیروی می‌کند، $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$. از مقایسه این دو معادله، معادله (۲.۸) نتیجه می‌شود، $\kappa = 8\pi G/c^4$.

۲.۸ چند جواب تحلیلی معادله میدان

معادله میدان انیشتن معادله دیفرانسیلی درجه دو و غیرخطی است و مانند بسیاری از مسئله‌های غیرخطی راه آسانی برای دسترسی به جواب‌های آن نیست. با وجود همه این پیچیدگی‌ها، چند جواب تحلیلی با تقارن کروی و استوانه‌ای شناخته شده است و به کوتاهی به بعضی از آن‌ها خواهیم پرداخت. شناخته شده‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

- متریک شوارتزشیلد در فضای تهی از انرژی-تکانه و تقارن کروی،
- متریک شوارتزشیلد در درون ستاره‌ها و سامانه‌های آسمانی کروی،
- متریک ریسنر-نوردستروم (Reissner-Nordstrom) برای فضای با تقارن کروی، تهی از ماده، ولی دارای بار الکتریکی،
- متریک کر (Kerr) برای فضای تهی با تقارن استوانه‌ای،
- متریک کر-نیومن (Kerr-Neumann) برای فضای تهی از ماده، با تقارن استوانه‌ای، و دارای بار الکتریکی.

۱.۲.۸ فضا-زمان با تقارن کروی

در آسمان از ستاره‌ها و خوشه‌های ستاره‌ای گرفته تا کهکشان‌ها و خوشه‌های کهکشانی، نمونه‌های کروی فراوان می‌توان سراغ گرفت. گذشته از این نمونه‌ها، هر سامانه آسمانی اگر از فاصله به قدر کافی دور رصد شود در تقریب اول کروی به نظر می‌آید. در پیرامون چنین سامانه‌ها، انتظار می‌رود فضا-زمان نیز کروی و ایستا باشد:

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (۶.۸)$$

$$[g_{\alpha\beta}] = [g^{\alpha\beta}]^{-1} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad (۷.۸)$$

$$\det g = -ABr^4 \sin^2\theta.$$

که در آن فرض شده است فضا-زمان در پیرامون یک جرم مرکزی تقارن کروی دارد، و A و B تنها تابعی از r هستند. در بخش زاویه‌ای متریک نیازی به گنجاندن ضریب دیگری از r نیست. مولفه‌های غیرصفر هم‌وستارها برای این متریک عبارت‌اند از:

$$\begin{aligned}\Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2} \frac{B'}{B}, \\ \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2} \frac{B'}{A}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \frac{A'}{A}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r}{A} \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cot \theta.\end{aligned}\quad (۸.۸)$$

ماده تشکیل دهنده بسیاری از ستاره‌ها را می‌توان شاره کامل و ایستا گرفت، و بسیاری از خوشه‌های کروی ستاره‌ای و کهکشانی را می‌توان شاره کامل بدون فشار و ایستا فرض کرد. با این فرض، چارسرعت شاره، $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ ، تنها مولفه زمانی خواهد داشت:

$$U^t = cB^{-1/2}, \quad U_t = cB^{1/2}, \quad U^i = U_i = 0, \quad U^\mu U_\mu = c^2. \quad (۹.۸)$$

از معادله (۹.۷) برای تانسور انرژی-تکانه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}T_{tt} &= \rho c^2 B, \quad T_{rr} = pA, \quad T_{\theta\theta} = pr^2, \quad T_{\varphi\varphi} = pr^2 \sin^2 \theta, \\ T^{tt} &= \rho c^2 / B, \quad T^{rr} = p/A, \quad T_{\theta\theta} = p/r^2, \quad T_{\varphi\varphi} = p/r^2 \sin^2 \theta, \\ T &= T^\mu{}_\mu = \rho c^2 - 3p.\end{aligned}\quad (۱۰.۸)$$

جای‌گذاری این عبارت‌ها در معادله (۳.۸) می‌دهد:

$$R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} = \frac{\pi G}{c^4} (\rho c^2 - 3p)B, \quad (۱۱.۸)$$

$$R_{rr} = +\frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} = \frac{\pi G}{c^4} (\rho c^2 - p)A, \quad (۱۲.۸)$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{A} + \frac{r}{2A} \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) - 1 = \frac{\pi G}{c^4} (\rho c^2 - p)r^2, \quad (۱۳.۸)$$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (۱۴.۸)$$

مولفه‌های دیگر معادله میدان صفراند.

متریک شوارتزشیلد

در فضای تهی بیرون از یک جرم کروی مرکزی، طرف راست معادله‌های (۱۱.۸) - (۸). (۱۴) صفر است. از ترکیب دو معادله نخست به دست می‌آید:

$$\frac{R_{tt}}{B} + \frac{R_{rr}}{A} = -\frac{1}{rA} \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) = 0, \Rightarrow BA = \text{const.} \quad (15.8)$$

در حد $r \rightarrow \infty$ انتظار می‌رود گرانش جرم مرکزی به صفر میل کند و متریک شوارتزشیلد به متریک مینکوسکی برسد: $A \rightarrow 1$ ، $B \rightarrow 1$ ، باید $AB = 1$ باشد. از جای‌گذاری این عبارت‌ها در معادله (۱۳.۸) به دست می‌آید:

$$\frac{1}{A} - r \frac{A'}{A^2} = \frac{d}{dr} \frac{r}{A} = 1, \Rightarrow \frac{1}{A} = B = \left(1 + \frac{\text{const.}}{r} \right).$$

ولی پیش‌تر در حد گرانش ضعیف در معادله‌های (۱۵.۵) و (۱۶.۵) دیده‌ایم:

$$g_{\phi\phi} = (1 + 2\Phi/c^2)$$

و پتانسیل گرانشی برای یک جرم کروی M برابر است یا $\Phi = -GM/r$ بنابراین:

$$B = \frac{1}{A} = 1 - \frac{r_s}{r}, \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (16.8)$$

طول r_s را شعاع شوارتزشیلد جرم M می‌گویند. برای خورشید در حدود ۳ کیلومتر و برای زمین در حدود چند سانتی‌متر است. در $r = r_s$ متریک تکینه است و $r \leq r_s$ جهان دیگری بی‌ارتباط و بی‌آگاهی از جهان ماست.

تکینگی‌های مختصاتی و ذاتی متریک شوارتزشیلد - سیاه‌چاله شوارتزشیلد

فرض کنیم جرم M تا شعاع شوارتزشیلد خود فشرده شده باشد. در $r \rightarrow r_s$ ، $g_{\phi\phi}$ به صفر و g_{rr} به بی‌نهایت می‌گراید. خط‌کش کوتاه‌تر و کوتاه‌تر می‌شود و ساعت کندتر و کندتر کار می‌کند. برای ناظری که در نقطه (r, θ, φ) ساکن است،

$$(dr = d\theta = d\varphi = 0),$$

رابطه زمان مختصاتی dt ، و زمان خاص $d\tau$ ، چنین است:

$$d\tau = \sqrt{1 - r_s/r} dt > 0.$$

با $r \rightarrow r_s$ ، $d\tau$ به صفر می‌گراید. علامت نوری‌ای که از r به بیرون فرستاده می‌شود با $r \rightarrow r_s$ سرخ‌تر و سرخ‌تر می‌شود و پیامی به بیرون نمی‌رسد. رویه r_s رویه سرخیدگی بی‌نهایت است. هم‌چنین، چون در درون این رویه g_{rr} علامت عوض می‌کند و r زمان‌گونه می‌شود رویه r_s مرز سکون نیز هست. در $r < r_s$ هیچ ناظر و هیچ ذره مادی و غیرمادی نمی‌تواند ساکن باشد.

اخترفیزیک‌دانان، جرمی را که به درون شعاع شوارتسشیلد فرو ریخته باشد سیاه‌چاله می‌گویند. رویه r_s را افق رخداد می‌نامند، به معنای عرفی کلمه، که افق مرز دیدنی‌هاست و فراتر از آن را نمی‌توان دید.

هندسه شوارتسشیلد در مختصات (r, θ, φ) تکینگی نشان می‌دهد. در $r \rightarrow r_s$ ضریب g_{tt} به صفر و ضریب g_{rr} به ∞ می‌گراید. ولی این تکینگی‌ها مختصاتی‌اند. می‌توان چارچوب‌های مختصات دیگری یافت که چنین نباشند. به طور مثال ناظری که در فضا-زمان شوارتسشیلد سقوط آزاد دارد، بنا به اصل هم‌ارزی، در هر آن در مختصات لخت موضعی است. زمان برای او τ و فیزیک برایش فیزیک نسبیت خاص است. چنین ناظری تکینگی در r_s را نخواهد دید و تا $r = 0$ خواهد رسید. ولی پیامی به بیرون از r_s نخواهد توانست بفرستد (مختصات کراسکال [Kruskal, ۱۲]). با این همه فضا-زمان شوارتسشیلد در $r = 0$ تکینه است. تانسور خمش ریمان-کریستوفل در مختصات شوارتسشیلد در r_s پیوسته و در $r = 0$ تکینه است و تکینگی در $r = 0$ ذاتی است. در هیچ مختصاتی نمی‌توان آن را از میان برداشت.

قضیه برکهوف

بسیاری از ستاره‌ها در دورانی از عمر خود ممکن است تعادل ایستای خود را از دست بدهند و در زیر نیروی گرانش خود و بر اثر اندرکنش‌های گرمایی-هسته‌ای، به درون یا بیرون بریزند. اگر در فرآیند درون‌ریزی و برون‌ریزی، تقارن کروی هم‌چنان برجا باشد، متریک در فضای تهی بیرون از ستاره، متریک کروی و ایستای شوارتسشیلد خواهد بود، برکهوف (Birkhoff, ۱۹۲۳). دو نتیجه می‌توان از قضیه برکهوف گرفت:

- ستاره یا سامانه ستاره‌ای که نوسان کروی یا درون‌ریزی و برون‌ریزی کروی داشته باشد نمی‌تواند موج گرانشی نشر کند. در بخش موج گرانشی خواهیم دید برای نشر موج گرانشی ممان چهارقطبی جرم سامانه باید تغییر کند.
- فضا-زمان در درون یک پوسته کروی، تخت و فضا-زمان مینکوسکی است. هم‌پار این ویژگی قضیه برکهوف در گرانش کلاسیک نیوتنی صفر شدن نیروی گرانشی در درون پوسته‌های کروی تهی است.

متریک در درون یک توده کروی

این بخش برای آن‌هایی که ساختار ستاره‌های نسبیتی را بررسی می‌کنند ممکن است قابل توجه باشد.

از ترکیب سه معادله (۱۱.۸)، (۱۲.۸) و (۱۳.۸) خواهیم داشت:

$$\frac{R_{\circ\circ}}{2B} + \frac{R_{rr}}{2A} + \frac{R_{\theta\theta}}{r^2} = \frac{1}{A} - \frac{rA'}{A^2} - 1 = \frac{d}{dr} \left(\frac{r}{A} \right) = \frac{\Lambda\pi G}{c^2} \rho r^2, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{A} = 1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r^2}, \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 dr'. \quad (17.8)$$

معادله (۱۷.۸) برای A مانند معادله (۱۶.۸) است که در آن به جای جرم کل سامانه، جرم درون شعاع r نشسته است و یادآور صفر شدن نیروی گرانش نیوتنی در درون پوسته‌های کروی تهی است. برای به دست آوردن B به سراغ مولفه r معادله ماندگاری انرژی-تکانه می‌رویم. مولفه r معادله (۱۰.۷)، با توجه به این‌که همه متغیرها تنها تابعی از r هستند و تانسور انرژی-تکانه قطری است، می‌دهد:

$$\begin{aligned} T^{r\nu}_{;\nu} &= T^{rr}_{,r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\ln(-g)] T^{rr} \\ &\quad + \Gamma^r_{\circ\circ} T^{\circ\circ} + \Gamma^r_{rr} T^{rr} + \Gamma^r_{\theta\theta} T^{\theta\theta} + \Gamma^r_{\varphi\varphi} T^{\varphi\varphi} \\ &= \frac{1}{A} \left[p' + \frac{B'}{2B} (\rho c^2 + p) \right] = 0, \quad \Rightarrow \\ \frac{B'}{B} &= -\frac{2p'}{\rho c^2 + p}. \end{aligned} \quad (18.8)$$

حال می‌توانیم با جای‌گذاری معادله‌های (۱۷.۸) و (۱۸.۸) در معادله (۱۳.۸)، A و B را

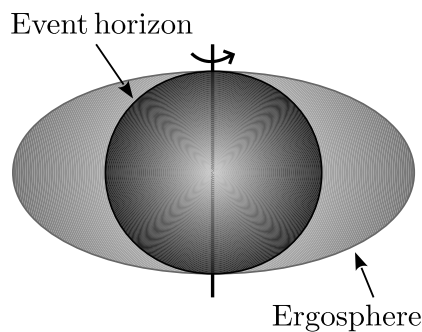
حذف کنیم و به دست آوریم:

$$\frac{p'}{\rho} = -\frac{GM(r)}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi p r^3}{c^2 M(r)}\right) \left(1 - \frac{2GM(r)}{c^2 r}\right)^{-1}. \quad (19.8)$$

ضریب $GM(r)/r^2$ در طرف راست معادله، یک جمله کلاسیک است و تعادل هیدروستاتیک شماره را در میدان گرانش نیوتنی $GM(r)/r^2$ نشان می‌دهد. ضریب‌های دیگر تصحیح‌های نسبیتی‌اند. با داشتن معادله حالت برای ماده تشکیل دهنده سامانه می‌توان معادله (۸.۱۹) را حل کرد و به ساختار سامانه دست یافت. به طور مثال، برای بعضی از ستاره‌ها که ترابری انرژی از درون به بیرون از راه جابه‌جایی‌های همرفتی است، ساختار ستاره هم‌انترپی (Isoentropic) خواهد بود، $p(\rho)$ در این صورت انتگرال‌گیری از معادله (۱۹.۸) آسان می‌شود. می‌توان ρ را به صورت تابعی از r به دست آورد، سپس از معادله (۱۸.۸) انتگرال گرفت و به $B(r)$ دست یافت.

متریک کر (Kerr)

قرارداد: در مانده این بخش کلمه ایستا را به معنای Stationary و کلمه ایستاده را به معنای Static به کار خواهیم برد.



تکانه زاویه‌ای در سامانه‌های بسته و جدا از جهان بیرون ماندگار است. مثلاً اگر ستاره‌ای در مرحله‌ای از تحول خود اندک تکانه زاویه‌ای داشته باشد، به هنگام فشارش و درون‌ریزی، گشتاور لختیش کوچک و سرعت دورانی‌اش بزرگ خواهد شد و ستاره تقارن محوری پیدا خواهد کرد. متریک فضا-زمان نیز به پیروی از ستاره باید تقارن محوری بیابد.

متریک کر (۱۹۶۳) [۱۱] یکی از ارگوسفر و افق رخداد در متریک کر.

جواب‌های ایستای معادله انیشتن در فضای تهی از ماده با تقارن محوری است. فضا-زمان خمیده حاصل از تانسور انرژی-تکانه یک سامانه چرخان را نمایندگی نمی‌کند. ولی ممکن است هندسه فضا-زمان بیرون از یک ستاره چرخان درون‌ریخته و سیاه‌چاله شده‌ای

را بیان کند. صورت ریاضی متریک کر چنین است:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= c^2 dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \\
 &- (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{rr_s}{\rho^2} (cdt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2. \quad (20.8) \\
 &= \left(1 - \frac{rr_s}{\rho^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \\
 &- \left(r^2 + a^2 + \frac{rr_s a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\varphi^2 + 2 \frac{rr_s a}{\rho^2} \sin^2 \theta c dt d\varphi. \quad (21.8)
 \end{aligned}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 r_s &= 2GM/c^2, \\
 a &= J/Mc, \quad J, \text{ تکانه زاویه‌ای} \\
 \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\
 \Delta &= (r^2 - rr_s + a^2).
 \end{aligned}$$

آسان نیست، ولی با جای‌گذاری مستقیم می‌توان نشان داد که متریک بالا جواب معادله میدان انیشتین در فضای تهی است. متریک کر ایستاست، به این معنا هیچ‌کدام از ضریب‌های متریک به زمان بستگی ندارد. ولی ایستاده نیست. متریک در عمل وارونی زمان ناوردا نمی‌ماند. زیرفضاهایی دارد که در آن رخداد ساکن نمی‌توان یافت. مرز ایستادگی که درون‌تر از آن هیچ رخدادی نمی‌تواند ایستاده بماند چنین به دست می‌آید:

$$g_{rr} \rightarrow \infty, \quad \Delta \rightarrow 0, \quad r_{hor}^{\pm} = \frac{1}{2} r_s \left(1 \pm \sqrt{1 - 4a^2/r_s^2}\right) \quad (22.8)$$

در بازه‌های $r < r_{hor}^-$ و $r > r_{hor}^+$ g_{rr} منفی است و r مکان‌گونه است. می‌توان در این دو ناحیه ساکن بود، $dr = d\theta = d\varphi = 0$. در بازه $r_{hor}^- < r < r_{hor}^+$ علامت عوض می‌کند و r زمان‌گونه می‌شود. از این بازه نمی‌توان به بیرون پیام فرستاد. در این مرحله ستاره سیاه‌چاله شده است. جا دارد مرز r_{hor}^+ را افق رخداد فضا-زمان کر بنامیم.

برخلاف هندسه شوارتسشیلد در فضا-زمان کر افق رخداد با رویه سرخیدگی بی‌نهایت یکی نیست. رویه سرخیدگی بی‌نهایت از صفر شدن $g_{\theta\theta}$ به دست می‌آید:

$$g_{\theta\theta} = 0 \rightarrow r_{ergo}^{\pm} = \frac{1}{4} r_s (1 \pm \sqrt{1 - 4a^2 \cos^2 \theta / r_s^2}). \quad (23.8)$$

دو رویه $r_{ergo}^{\pm}$ مانند دو بیضوی‌اند که در دو قطب پهن شده‌اند و به افق رخداد در $\theta = 0, \pi$ مماس شده‌اند. به آسانی می‌توان دید:

$$r_{ergo}^+ \geq r_{hor}^+ \geq r_{ergo}^- \geq r_{hor}^-.$$

پنروز (Penrose) [۱۵] نشان داده است از حجم درون r_{ergo}^+ و r_{hor}^+ می‌توان پیام به بیرون فرستاد و به حساب سیاه‌چاله انرژی چرخشی آن را بیرون آورد [۳]. به همین سبب رویه r_{ergo}^+ را Ergosphere نامیده‌اند. بیشینه انرژی قابل استخراج برابر است با:

$$\Delta Mc^2 = Mc^2 \left[1 - \frac{1}{4} \left\{ \left(1 + \sqrt{1 - 4a^2 / r_s^2} \right)^2 + 4a^2 / r_s^2 \right\}^2 \right]. \quad (24.8)$$

پایان فرآیند، گذار از سیاه‌چاله کر به سیاه‌چاله شوارتسشیلد است.

۳.۸ آزمون‌های نسبیت عام

نسبیت عام بر دو پایه، اصل هم‌ارزی و معادله میدان انیشتن، بنا شده است. درستی و کارایی هر دو باید در توجیه هر آن چه از پیش می‌دانیم و هر آن چه نظریه پیش‌بینی می‌کند آزموده شود. پیش‌تر حرکت ژئودزیک را در حد گرانش ضعیف برابر با قانون حرکت نیوتن یافته‌ایم. و با آزمایش ربکا-پوند، از سرخیدگی خط‌های طیفی اتم‌ها و مولکول‌ها در میدان گرانش آسوده‌ایم. هر دو مورد گواه درستی اصل هم‌ارزی‌اند. درباره درستی معادله میدان هم دیده‌ایم که حد ضعیف آن گرانش نیوتنی است. در این جا با در دست داشتن متریک شوارتسشیلد چند پیش‌بینی نانیوتنی را خواهیم آزمود: تقدیم حضيض تیر (عطارد)، خمش مسیر نور در میدان گرانش، و درنگ در پثواک رادار.

۱.۳.۸ تقدیم حضيض تیر

در چارچوب مکانیک نیوتنی و قانون‌های کپلر، مدار سیاره‌ها در منظومه شمسی بیضی است، صفحه مدار ثابت است، بیضی در صفحه مدار ثابت است، قطر بزرگ و خروج

از مرکز بیضی ثابت است. همه این ویژگی‌ها را می‌توان از گرانش $1/r^2$ نیوتن به دست آورد. اگر در نیروی $1/r^2$ به هر بهانه پریشیدگی پیدا شود، ثابت‌های یاد شده نیز پریشیده می‌شوند. در منظومه خورشیدی به سبب‌های گوناگون نیرو روی یک سیاره دقیقاً مرکزی و $1/r^2$ نیست: خورشید کره کامل نیست، سیاره‌ها به هم نیرو وارد می‌کنند، و غیره. این پریشیدگی‌ها کوچک هستند؛ ولی در رصدهای نجومی چند صد ساله روی هم انباشته شده‌اند؛ می‌توان آن‌ها را دید و عامل آن‌ها را شناسایی کرد. به طور مثال، در سده ۱۹ در مدار اورانوس، جدا از گرانش برجیس و کیوان، پریشیدگی افزوده‌ای دیده می‌شد. ادامز انگلیسی و لووریه فرانسوی هم‌زمان، و بی‌آگاهی از هم، پیشنهاد کردند پریشیدگی ناشی از یک سیاره (تا آن زمان) ناشناخته است. بزرگی و جای آن را در آسمان حساب کردند. کمی بعد نیوتن در همان بخش از آسمان پیدا شد (لووریه، ۱۸۴۶). پیروزی بزرگی برای نظریه گرانش نیوتنی بود.

تیر نزدیک‌ترین سیاره به خورشید است. رصدهای نجومی نشان می‌دهند برابر گرانش نیوتنی، و با به حساب آوردن همه پریشیدگی‌های نیوتنی ناشی از زمین و بهرام و ناکروی بودن خورشید، بیضی مدار تیر در هر صد سال ۴۳ ثانیه کمانی به جلو می‌چرخد. این فرآیند را تقدیم حضیض می‌نامند (نزدیک‌ترین نقطه مدار سیاره به خورشید را حضیض و دورترین نقطه به آن را اوج سیاره می‌گویند). گرانش نیوتنی توانایی توجیه آن را ندارد. در تقریب پسانیوتنی متریک شوارتزشیلد، تقدیم حضیض تیر را به دست خواهیم آورد. ولی نخست مسئله کلاسیک کپلر را به یاد بیاوریم.

ثابت بودن حضیض سیاره در مسئله کپلر

در مختصات کروی (r, θ, φ) ، معادله‌های حرکت در میدان نیروی $\mathbf{F} = -GM\mathbf{r}/r^3$ عبارت‌اند از:

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad (25.8)$$

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0, \quad (26.8)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - \frac{GM}{r^2} = 0. \quad (27.8)$$

از ضرب معادله دوم در r و معادله سوم در $\dot{r}$ و انتگرال گیری نسبت به زمان به دست می‌آید:

$$r^2 \dot{\varphi} = J, \text{ const.}, \quad (28.8)$$

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \frac{J^2}{r^2}) = -E, \text{ const.} \quad (29.8)$$

که در آن J تکانه زاویه‌ای و $-E$ انرژی واحد جرم سیاره هر دو ثابت‌اند. برای به دست آوردن معادله مدار، $r(\varphi)$ ، در معادله (۲۷.۸)، مشتق نسبت به t را با مشتق نسبت به φ جای‌گزین کنیم:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} = \frac{J}{r^2} \frac{d}{d\varphi}.$$

معادله (۲۷.۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) - \frac{1}{r^3} + \frac{GM}{J^2 r^2} = 0. \quad (30.8)$$

با تغییر متغیر $u = 1/r$ معادله ساده می‌شود:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} - u + \frac{GM}{J^2} = 0. \quad (31.8)$$

جواب معادله (۳۱.۸)، بیضی با خروج از مرکز e و نیم‌وتر L (Semi latus rectum) است:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{L}(1 + e \cos \varphi). \quad (32.8)$$

با جای‌گذاری معادله (۳۲.۸) در معادله (۳۱.۸) می‌توان e و L را بر حسب J و E یا به عکس نوشت:

$$\frac{1}{L} = \frac{GM}{J^2}, \quad (1 - e^2) = \frac{EJ^2}{GM^2}, \quad (33.8)$$

$$J^2 = LGM, \quad E = \frac{1}{2} \frac{GM}{a}, \quad a = \frac{L}{2(1 - e^2)}. \quad (34.8)$$

در مسئله کپلر زاویه φ از حضیض تا اوج و از اوج تا حضیض به اندازه 2π می‌پیماید، سیاره به جای اول خود برمی‌گردد و بیضی در صفحه مدار ثابت می‌ماند. سبب آن نیروی مرکزی $1/r^2$ است. در مسئله شوارتسشیلد خواهیم دید که نیروی مرکزی دقیقاً $1/r^2$ نیست و سیاره از حضیض تا حضیض کمی بیش از 2π می‌پیماید. بیضی مدار در صفحه مدار می‌چرخد.

تقدیم حضيض سیاره در مسئله شوارتسشیلد

آن چه در زیر می‌آید عمدتاً از واینبرگ است [۲۲].
در مختصات کروی هم‌وَسْتارهای شوارتسشیلد در معادله‌های (۸.۸) داده شده‌اند. جای‌گذاری آن‌ها در معادله ژئودزیک (۱۰.۵) می‌دهد:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \frac{B'}{B} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{B}, \quad (35.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{A'}{A} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} c^2 \frac{B'}{A} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ - \frac{r}{A} \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{A} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0, \end{aligned} \quad (36.8)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (37.8)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + 2 \cot \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = 0. \quad (38.8)$$

جواب‌های معادله‌های (۳۵.۸)، (۳۶.۸)، و (۳۸.۸) به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{B}, \quad (39.8)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad (40.8)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \mathcal{J}, \quad \text{const.} \quad (41.8)$$

جای‌گذاری آن‌ها در معادله (۳۶.۸) می‌دهد:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{1}{A} \frac{\mathcal{J}^2}{r^3} + \frac{1}{2} c^2 \frac{B'}{B} + \frac{1}{2} \frac{A'}{A} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (42.8)$$

ضرب این معادله در $2A dr/d\tau$ و انتگرال‌گیری نسبت به τ می‌دهد:

$$A \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{\mathcal{J}^2}{r^2} - \frac{c^2}{B} = -\mathcal{E}, \quad \text{const.} \quad (43.8)$$

در این معادله به یاری معادله (۴۱.۸) مشتق نسبت به τ را با مشتق نسبت به φ جای‌گزین کنیم و $r = 1/u$ بگذاریم:

$$A \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 - \frac{c^2}{B(u)\mathcal{J}^2} = -\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{J}^2}. \quad (44.8)$$

در دو نقطه حضيض و اوج، $du/d\varphi = 0$ است. مختصه u آن‌ها از معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$$u_{\pm}^2 = \frac{c^2}{\mathcal{J}^2} \left[A_{\pm} - \frac{\mathcal{E}}{c^2} \right], \quad A_{\pm} = A(u_{\pm}) = \frac{1}{B(u_{\pm})} \quad (45.8)$$

از این دو معادله به دست می‌آوریم:

$$\mathcal{E} = -\frac{A_+ u_-^2 - A_- u_+^2}{u_+^2 - u_-^2}, \quad (46.8)$$

$$\mathcal{J}^2 = \frac{A_+ - A_-}{u_+^2 - u_-^2}. \quad (47.8)$$

حال زاویه پیموده‌شده از حضيض تا حضيض را می‌توان از معادله (44.8) به دست آورد:

$$2[\varphi(u_+) - \varphi(u_-)] = 2 \int_{u_-}^{u_+} A(u)^{1/2} \left[\frac{c^2}{B(u)\mathcal{J}^2} - u^2 - \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{J}^2} \right]^{-1/2} du.$$

در حد کلاسیک، $B = A = 1$ ، جواب انتگرال 2π است و بیضی مدار ثابت می‌ماند. برای محاسبه تصحیح نسبیتی، کافی است $A(u)^{1/2}$ را تا تقریب نیوتنی و $c^2/B(u)$ را، به خاطر بزرگی c^2 ، تا تقریب پسا نیوتنی بگستریم:

$$A(u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{r} r_s u, \quad \frac{c^2}{B(u)} = c^2 (1 + r_s u + r_s^2 u^2),$$

$$\begin{aligned} 2[\varphi(u_+) - \varphi(u_-)] &= 2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{r_s}{L} \right] \int_{u_-}^{u_+} (1 + \frac{1}{r} r_s u) [(u_- - u)(u - u_+)]^{-1/2} du \\ &= 2\pi \left[1 + 3 \frac{GM}{c^2 L} \right], \quad \frac{1}{L} = \frac{(1 - e^2)}{a} \frac{1}{r} (u_+ + u_-). \end{aligned} \quad (48.8)$$

در معادله بالا، a و e به ترتیب هم‌پار نیم‌وتر، شعاع بزرگ، و خروج از مرکز مدار کپلری‌اند، و برابر با آن‌ها گرفته خواهند شد. برای سیاره تیر پارامترهای رصدی عبارت‌اند

از:

$$\begin{aligned}
 a &= 57.91 \times 10^6 \text{ km}, \quad e = 0.2056, \quad \text{period} = 0.24085 \text{ yr} \simeq 88 \text{ day}, \\
 \Delta\varphi &= 6\pi GM(1 - e^2)/c^2 a, \\
 &= 5.0212 \times 10^{-7} \text{ rad per period} = 43.02'' \text{ per century}. \quad (49.8)
 \end{aligned}$$

تقدیم حضیض تیر، بر مبنای بیش از دو سده رصد، $43''$ در یک صد سال توسط نیوکوم، 1882 و $43.11'' \pm 0.5$ در یک صد سال توسط کلیمنس، 1947 [۴] است. این دو عدد بسیار نزدیک به پیش‌بینی گرانش انیشتن، $43.02''$ در یک صد سال، است و در زمان خود به عنوان بزرگ‌ترین اعتبار برای نظریه نسبیت عام پذیرفته شد.

۲.۳.۸ خمش نور در میدان گرانش

نور جرم در حال سکون ندارد و برای آن $d\tau^2 = 0$ است. مسیر نور را باید با پارامتر دیگری به جز τ نشانه‌گذاری کرد. معادله ژئودزیک نور در فضا-زمان شوارتزشیلد همان معادله‌های حرکت ذره جرم‌دار است که در آن‌ها به جای زمان خاص τ پارامتر σ نشسته است. هم‌پار معادله‌های (۴۲.۸) - (۳۹.۸) و (۴۴.۸) عبارت‌اند از:

$$\frac{dt}{d\sigma} = \frac{1}{B}, \quad (50.8)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad (51.8)$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\sigma} = \mathcal{J}, \text{ const.} \quad (52.8)$$

$$A \left(\frac{dr}{d\sigma} \right)^2 + \frac{\mathcal{J}^2}{r^2} - \frac{c^2}{B} = -\mathcal{E}, \text{ const.}, \quad (53.8)$$

$$A(u) \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 - \frac{c^2}{B(u)\mathcal{J}^2} = -\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{J}^2}. \quad (54.8)$$

جای‌گذاری آن‌ها در متریک شوارتزشیلد، معادله (۶.۸)، برای یک باریکه نور ($d\tau^2 = 0$) می‌دهد:

$$0 = d\tau^2 = -\mathcal{E} d\sigma^2, \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = 0. \quad (55.8)$$

صفر شدن $\mathcal{E}$ در این معادله تاکید دوباره بر بی جرم بودن نور است. حال در صفحه آسمان ستاره‌ای را در نزدیکی‌های قرص خورشید در نظر بگیریم. به هنگام خورشید گرفتگی کامل، ستاره در روز دیدنی است. نزدیک‌ترین فاصله پرتو نور ستاره تا مرکز قرص خورشید را با $r_0 = 1/u_0$ نشان دهیم. در این فاصله $du/d\varphi|_{r_0} = 0$ است. از معادله‌های (۵۴.۸) و (۸) (۵۵) خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\mathcal{J}^2} = \frac{u_0^2}{c^2} B(u_0) = \frac{u_0^2}{c^2} (1 - r_s u_0), \quad r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (56.8)$$

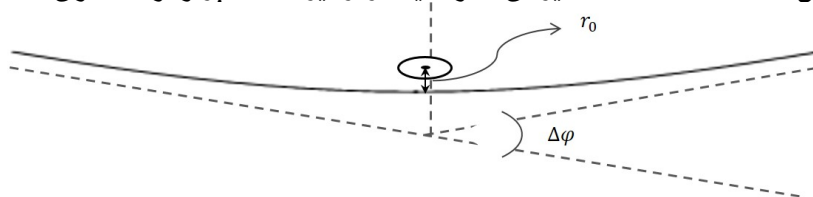
در این معادله r_s شعاع شوارتزشیلد خورشید است. جای‌گذاری دوباره این پارامترها در معادله (۵۴.۸) می‌دهد:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 B(u) - u_0^2 B(u_0) = 0.$$

یک بار دیگر تغییر متغیر بدهیم، $x = u/u_0$ ، دیفرانسیل φ را حساب کنیم، و نتیجه را تا توان اول r_s بگستریم:

$$d\varphi = \left[\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} + \frac{1}{2} r_s u_0 \frac{(1-x^3)}{(1-x^2)^{3/2}} \right] dx. \quad (57.8)$$

در شکل ۱.۸، در مختصات دایروی، خورشید مرکز نیروست. پرتو نور از سوی $r = \infty$ ، $\varphi = 0$ در



شکل ۱.۸: پرتو نور از سوی $r = \infty$ ، $\varphi = 0$ می‌تابد و به سوی $r = \infty$ ، $\varphi = \pi + \Delta\varphi$ می‌رود. در گذر از نزدیکی‌های خورشید به اندازه $\Delta\varphi$ خم می‌شود. شکل نسبت به r_0 قرینه است. خمش از $-\infty$ تا r_0 نصف $\Delta\varphi$ است.

∞ می‌تابد و به سوی $r = \infty$ ، $\varphi = \pi + \Delta\varphi$ می‌رود. در گذر از نزدیکی‌های خورشید به اندازه $\Delta\varphi$ خم می‌شود. شکل نسبت به r_0 قرینه است. خمش از $-\infty$ تا r_0 نیم $\Delta\varphi$ است. در $r = \infty$ ، $u = x = 0$ است و در $r_0 = 1/u_0$ ، $x = 1$ بنابراین خمش پرتو نور از

بی‌نهایت تا بی‌نهایت چنین است:

$$\Delta\varphi = -\pi + 2 \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} + r_{su} \int_0^1 \frac{(1-x^3)}{(1-x^2)^{3/2}} dx = 2r_{su}. \quad (58.8)$$

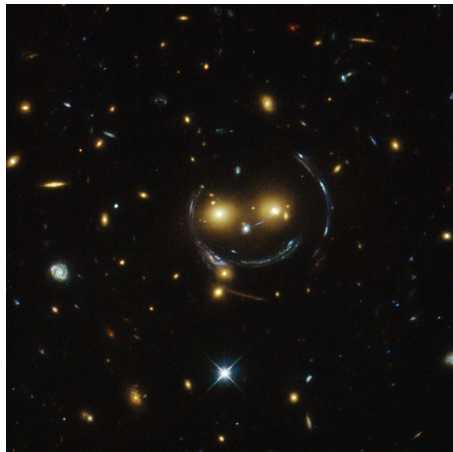
شعاع خورشید ۶۹۶ هزار کیلومتر و شعاع شوارتزشیلد آن ۲/۹۵ کیلومتر است. پرتو نوری که به فاصله r_* از مرکز قرص خورشید می‌گذرد به اندازه:

$$\Delta\varphi = 2 \frac{4GM}{c^2 R_\odot} \frac{R_\odot}{r_*} = 8.477 \times 10^{-6} \frac{R_\odot}{r_*} \text{ radian} = 1.57'' \frac{R_\odot}{r_*}$$

خم خواهد شد. به هنگام خورشید گرفتگی کامل می‌توان ستاره‌ها را در آسمان روز دید و از آن‌هایی که در دور و بر خورشید هستند عکس گرفت. شش ماه بعد دوباره همان بخش آسمان را که شب است و خورشید در آنجا نیست عکاسی کرد. سپس دو عکس را کنار هم گذاشت و جابه‌جایی ستاره‌های نزدیک به خورشید را سنجید و با آن چه نظریه انیشتن پیش‌بینی می‌کند مقایسه کرد. در خورشید گرفتگی ۱۹۱۹ این ماموریت را ادینگتن (Eddington) و همکاران او در دو جا، جزیره سوبرال در شمال شرقی ساحل برزیل و در جزیره پرینسیپیه در خلیج گینه، انجام دادند. نتیجه برای سوبرال $1.98'' \pm 0.10''$ و برای پرینسیپیه $1.61'' \pm 0.49''$ بود [۶]. با توجه به عامل‌های فراوانی که رصدها را آشفته می‌کنند، از جمله فاصله شش ماهه بین دو رصد، هر دو نتیجه رضایت‌بخش شناخته شدند و برای نظریه نسبیت عام اعتبار جهانی آوردند.

عدسی گرانشی

در اندازه‌های کیهانی، اگر یک کهکشان یا خوشه کهکشانی در میان ناظر زمینی و یک کهکشان یا خوشه کهکشانی دور دست‌تری قرار گیرد، نور کهکشان دورتر به هنگام گذر از کنار یا میان کهکشان میانی خمیده خواهد شد. اگر زمین و دو کهکشان در آسمان روی یک خط باشند و کهکشان میانی کروی باشد تصویر کهکشان دورتر به صورت حلقه در می‌آید. اگر این دو شرط برآورده نباشد، تصویر ممکن است بخش‌هایی از حلقه یا چند تصویر جدا از هم باشد. در شکل ۲.۸ حلقه انیشتن در خوشه کهکشانی SDSS-J1038+4849-20150210 به نام HST - Smiling دیده می‌شود.



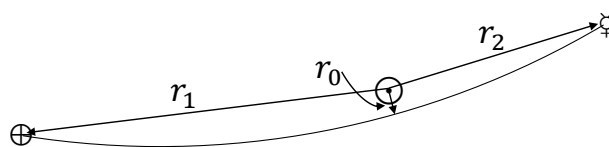
شکل ۲.۸: حلقه انیشتن: HST-Smiling-SDSS.

کهکشان میانی را عدسی گرانشی خواهیم نامید. با عدسی اپتیکی تفاوت بنیادی دارد. در عدسی اپتیکی پرتوهای نور هر اندازه از محور عدسی دورتر باشند، بیشتر خم می‌شوند و در کانون عدسی تصویر می‌سازند. در عدسی گرانشی وضع وارونه است. پرتوهای نوری نزدیک‌تر به محور عدسی گرانشی بیش‌تر خم می‌شود و در روی یک حلقه یا بخش‌هایی از حلقه جمع می‌شوند. تشکیل تصویر حلقه‌ای توسط Chwolson در ۱۹۲۴ پیش‌بینی شد، انیشتن در ۱۹۳۶ شار و شعاع حلقه را حساب کرد، و Zwicky در ۱۹۳۷ به دنبال آن گشت ولی پیدا نکرد. نخستین تصویر از عدسی گرانشی در ۱۹۷۹ توسط والش Walsh و هم‌کاران به دست آمد [۲۱]. خمیدگی گرانشی، معادله (۵۸.۸) به فرکانس و طول موج پرتو تابنده بستگی ندارد و برای تمام طیف الکترومغناطیسی یکسان است. در رصدهای نجومی چند دهه گذشته حلقه انیشتن در طول موج‌های x و رادیویی نیز گزارش شده است.

۳.۳.۸ درنگ در پژوهاک رادار

از زمین به تیر می‌توان تپ رادار فرستاد و زمان برگشت آن را اندازه گرفت. اگر زمین و تیر به دور از خورشید باشند می‌توان فضا-زمان را اقلیدسی گرفت و مسیر رفت و برگشت را خط راست دانست. ولی در مقابله اعلا (Superior conjunction) که خورشید در میان دو سیاره می‌نشیند و تپ‌های رادار به ناچار از نزدیکی‌های خورشید می‌گذرند، کوتاه‌ترین راه

خط راست اقلیدسی نیست. زمان رفت و برگشت از آن چه می‌تواند در نبود خورشید باشد بلندتر خواهد بود. شاپیرو (۱۹۶۴) [۱۹] درنگ در پژواک تپ رادار را از مرتبه چند صد میکرو ثانیه، برابر با چند ده کیلومتر، برآورد کرد و آن را آزمون چهارم برای درستی نسبیت عام اعلام کرد. برای محاسبه درنگ، از معادله‌های $(50.8) - (54.8)$ ، گام‌های زیر را



شکل ۳.۸: خورشید مرکز مختصات گرفته شده است. فاصله زمین و تیر از آن به ترتیب r_1 و r_2 است. خط نقطه‌چین مستقیم میان زمین و تیر مسیر کلاسیک تپ رادار است، r_0 نزدیک‌ترین فاصله این مسیر تا خورشید است. در مقابله اعلا که زمین و خورشید و تیر تقریباً در یک امتداد قرار می‌گیرند، مسیر رادار کمی خمیده می‌شود.

برمی‌داریم: متغیر σ را با t جای‌گزین می‌کنیم، $\mathcal{E}$ را صفر می‌گذاریم، و $\mathcal{T}^2$ را از معادله (۵۶.۸) جای‌گزین می‌کنیم، حاصل را تا مرتبه (r_s/r_0) و (r_s/r) گسترش می‌دهیم، dt را برحسب dr می‌نویسیم و از r_0 تا r انتگرال می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} t(r, r_0) &= t(r, r_0)_{\text{classic}} + \Delta t(r, r_0) \\ &= \frac{1}{c} \int_{r_0}^r \left(1 - \frac{r_s^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left[1 + \frac{r_s}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_0}{r + r_0}\right)\right] dr \\ &= \frac{1}{c} (r^2 - r_0^2)^{1/2} + \\ &\quad + \frac{r_s}{c} \left[\ln \left(\frac{r + (r^2 - r_0^2)^{1/2}}{r_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r - r_0}{r + r_0} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (59.8)$$

جمله اول در طرف راست تساوی سوم این معادله زمان کلاسیک رفت موج رادار از r_0 تا r است (توجه شود خورشید مرکز نیرو و مبدأ مختصات است). جمله متناسب با r_s درنگ نسبیتی است. در مقابله اعلا، که خورشید در میان تیر و زمین و هر سه در یک امتداد قرار می‌گیرند، تپ رادار باید کم و بیش مماس بر خورشید بگذرد و به تیر برسد و همین راه را برگردد. فاصله‌ها عبارت‌اند از:

- زمین تا خورشید $r_{\oplus} = 149.63 \times 10^6$ کیلومتر،
 - خورشید تا تیر $r_b = 57.91 \times 10^6$ کیلومتر،
 - شعاع خورشید $R_{\odot} = 6.9598 \times 10^5$ کیلومتر،
 - شعاع شوارتزشیلد خورشید $r_s = 3.95$ کیلومتر.
- زمان درنگ نسبییتی چنین خواهد بود:

$$\Delta t_{GR} = 2[\Delta t(r_{\oplus}, R_{\odot}) + \Delta t(R_{\odot}, r_b)] = 240 \times 10^{-6} \text{ sec} = 72 \text{ km}.$$

بیشترین زمان رفت و برگشت تپ رادار به تیر 11.5 دقیقه است. اندازه‌گیری درنگ چند صد میکرو ثانیه در بازه زمانی چند دقیقه آسان است. ولی دشواری‌های دیگری وجود دارد. حرکت وضعی تیر به دور خود 55 روز، شعاع آن 2240 کیلومتر، و سرعت خطی سطح آن 3 متر بر ثانیه است. گذشته از این سطح تیر ناهمواری دارد. معلوم نیست تپ برگشتی از کدام بخش از سطح تیر برگشته است. مولفه سرعت خطی آن در امتداد خط دید ناظر زمینی ± 3 متر بر ثانیه نوسان خواهد کرد و جابه‌جایی دپلری پیدا خواهد کرد. معلوم نیست شیدکره و پلاسمای تاج خورشید تپ رادار را، به هنگام گذر از کنار قرص خورشید، چگونه می‌پراکند. با همه این ناشناخته‌ها، شاپیرو و هم‌کارانش توانستند پس از تحلیل آماری مقدار زیادی داده، درنگ را با پیش‌بینی نسبیت عام برابر بیابند [۱۹].

۴.۸ انرژی-تکانه فضا-زمان خمیده

به فضا-زمان تخت مینکوسکی، با متریک $\eta_{\mu\nu}$ انرژی-تکانه نسبت داده نمی‌شود. انتظار می‌رود فضا-زمان خمیده با متریک $g_{\mu\nu}$ انرژی-تکانه داشته باشد، و این انرژی-تکانه از تفاوت دو متریک، $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ ، به وجود آید. ساختار تانسور ریچی، $R_{\mu\nu}$ ، را به یاد بیاوریم. در آن $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ و توان‌های 1 و 2 $h_{\mu\nu}$ را از هم جدا کنیم:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{(1)}(h) + R_{\mu\nu}^{(2)}(h^2), \quad (60.8)$$

محاسبه مستقیم از معادله (۱۱.۶) می‌دهد:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\mu}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 h^\lambda_\nu}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x_\lambda} \right], \quad (۶۱.۸)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(2)} = & -\frac{1}{2} h^{\lambda\kappa} \left[\frac{\partial^2 h_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 h_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} \right] \\ & + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial h^\kappa_\sigma}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial h}{\partial x^\sigma} \right] \left[\frac{\partial h^\sigma_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h^\sigma_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right] \\ & - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial h_{\sigma\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial h_{\sigma\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \right] \left[\frac{\partial h^\sigma_\mu}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial h^\sigma_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h^\sigma_\mu}{\partial x^\sigma} \right], \end{aligned} \quad (۶۲.۸)$$

که در آن $h = h^\lambda_\lambda$ رد $h_{\mu\nu}$ است. از جای‌گذاری معادله‌های (۶۰.۸)، (۶۱.۸)، و (۶۲.۸) در معادله میدان انیشتن، (۱۴.۶)، و پس و پیش کردن جمله‌ها خواهیم داشت:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} = -\Lambda \pi G (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}), \quad (۶۳.۸)$$

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{\Lambda \pi G} \left[(R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(2)}) - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} (R^{(1)} + R^{(2)}) \right]. \quad (۶۴.۸)$$

به ترتیبی که تعریف شده، $t_{\mu\nu}$ بُعد و ماهیت انرژی-تکانه دارد (با $T_{\mu\nu}$ ماده جمع می‌شود)، تنها به ساختار فضا-زمان بستگی دارد، و بالاتر از همه چار دیورژانس آن صفر است. جا دارد آن را چگالی و شار انرژی-تکانه ناشی از خمیدگی بدانیم. لازم است یادآوری شود در پذیرش این تعریف، باید از شناختی که از تعریف معمولی انرژی-تکانه داریم، فراتر رویم. پیش‌تر در تقریب نیوتنی دیده‌ایم $h_{0i} = h_{ij} = 0$ ، $h_{00} = \Phi/c^2$ است. از تنها جمله غیر صفر $t_{00} = |\nabla \Phi|^2 / \Lambda \pi G$ می‌ماند که چگالی انرژی شناخته شده میدان گرانشی نیوتنی است.

۵.۸ موج گرانشی

در آغاز کتاب در سیاه نارسایی‌های گرانش نیوتنی گفته شد که گرانش نیوتنی یک نظریه ایستاست و تغییرات زمانی در آن پیش‌بینی نشده است؛ یا به تعبیری چنین القا می‌شود

که تغییرات در میدان گرانش نیوتنی با سرعت بی‌نهایت نشر می‌شود. این تعبیر با منطق نسبیت خاص و عام که بالاترین سرعت را سرعت نور می‌داند سازگار نیست. نسبیت عام، دست‌کم از نظر تئوری، پیش‌بینی می‌کند سرعت انتشار تغییرات گرانش انیشتنی، همانند موج الکترومغناطیسی، سرعت نور است. ولی، پیش از پرداختن به بررسی ریاضی مسئله، دو نکته یادآوری می‌شود:

- ۱- از نقطه نظر منطق ریاضی، موج گرانشی تنها برای گرانش ضعیف و در تقریب خطی فرمول‌بندی شده است. برای گرانش‌های قوی و بسیار قوی که غیرخطی بودن آن‌ها چشم پوشیدنی نیست، صورت‌بندی ریاضی تمیزی وجود ندارد.
- ۲- آشکار سازی موج گرانش ضعیف هم، (گو این‌که با منطق نسبیت عام چاره‌ای جز پذیرش آن نیست) تا به امروز (ژوئن ۲۰۱۷)، تنها دو یا سه بار در پروژه لیگو، همکاری مشترک ام‌آی‌تی و کلتک، گزارش شده و برای این‌که قبول همه‌گانی پیدا کند، باید منتظر تکرار بیشتر آن بود. به زیرفصل ۳.۵.۸ و شکل ۴.۸ نگاه شود.

۱.۵.۸ بررسی ریاضی موج گرانشی

گرانش نیوتنی یک نظریه خطی است، به این معنا که میدان گرانش مجموعه‌ای از چند جرم در یک نقطه از فضا برابر با مجموع میدان‌های هر کدام از آن‌هاست. گرانش انیشتنی چنین نیست. گرانش انیشتنی در خمیدگی فضا-زمان غنوده است. در حضور چند جرم، خمیدگی کل مجموع خمیدگی‌هایی که هر کدام از آن‌ها به تنهایی می‌توانند به وجود آورند نیست. مثالی از دیدنی‌های روزانه می‌تواند آموزنده باشد. اگر روی یک پرده کش‌سان و کشیده‌شده، یک گلوله گذاشته شود، پرده خمیدگی پیدا می‌کند. گلوله‌های بیشتر خمیدگی را بیشتر می‌کنند، ولی نه متناسب با تعداد گلوله‌ها و بزرگی و کوچکی جرم آن‌ها. خطی نبودن گرانش انیشتنی را به سخن دیگر هم می‌توان گفت. سبب خمیدگی فضا-زمان، انرژی-تکانه ماده موجود در فضا-زمان است. ولی میدان گرانشی خود انرژی-تکانه دارد. بنابراین خود در به وجود آوردن خود شریک است. با همه این پیچیدگی‌ها و ناشناختگی‌ها، هنوز می‌توان پذیرفت، در فاصله‌های دور از جرم‌های گرانش‌گرانش ضعیف باشد و مجموع چند ضعیف هنوز ضعیف و به تقریب خطی بماند.

در گرانش ضعیف متریک فضا-زمان را می‌توان متریک مینکوسکی به علاوه یک

آشفته‌گی کوچک گرفت:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (۶۵.۸)$$

برابر معادله (۱۴.۵) و (۱۱.۶) هم‌وستارها و تانسور ریچی برای این متریک شبه‌مینکوسکی، تا تقریب اول $h_{\mu\nu}$ عبارت‌اند از:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} \left[\frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right], \quad (۶۶.۸)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\lambda\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{1}{2} \partial^{\lambda} \partial_{\lambda} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial h_{\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial h_{\mu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \right). \quad (۶۷.۸)$$

دوباره یادآور می‌شویم در تقریب گرانش ضعیف، بالا پایین بردن زیر و زبرنگاشت‌ها به کمک متریک مینکوسکی انجام می‌گیرد. در بخش ۱.۸ گفته شد در گزیدن مختصات آزادی هست. مختصات هارمونیک در بررسی موج گرانشی ساده کننده است، (۴.۸)،

$$\Gamma_{\mu} = \eta_{\mu\lambda} \eta^{\kappa\sigma} \Gamma_{\kappa\sigma}^{\lambda} = \frac{\partial h_{\mu}^{\kappa}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{1}{2} \frac{\partial h_{\kappa}}{\partial x^{\mu}} = 0. \quad (۶۸.۸)$$

با گزیدن این مختصات هارمونیک، دو جمله آخر در معادله (۶۷.۸) صفر می‌شوند و معادله میدان انیشتن به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \partial^{\lambda} \partial_{\lambda} h_{\mu\nu} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\mu\nu} - \nabla^2 h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu}, \\ S_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T. \end{aligned} \quad (۶۹.۸)$$

معادله (۶۹.۸) معادله موج در فضا-زمان تخت مینکوسکی است و نشان می‌دهد که آشفته‌گی‌های متریک مینکوسکی (همان گرانش ضعیف) با سرعت نور نشر می‌شوند. جواب دیرکرده این معادله عبارت است از:

$$h_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c} \int S_{\mu\nu}(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \frac{d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (۷۰.۸)$$

به یاد داشته باشیم، به خاطر ماندگاری انرژی-تکانه، چار دیورژانس انرژی-تکانه (در گرانش ضعیف دیورژانس معمولی نه هموردا) صفر است:

$$\frac{\partial T_{\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial S_{\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2} \frac{\partial S_{\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} = 0. \quad (71.8)$$

با یاری این معادله می‌توان به آسانی نشان داد جواب دیر کرده معادله (۷۰.۸) در شرط هارمونیک نیز صدق می‌کند.

۲.۵.۸ موج تخت

در فضای تهی و به دور از چشمه، جواب معادله‌های (۶۹.۸) و (۶۸.۸) می‌تواند موج تخت باشد:

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(ik_{\lambda} x^{\lambda}) + c.c., \quad (72.8)$$

که در آن $e_{\mu\nu}$ دامنه و قطبش موج، و $(c\omega, \mathbf{k})$: k_{λ} چاربردار فرکانس و بردار انتشار موج است. جای‌گذاری معادله (۷۲.۸) در معادله‌های موج همگن و شرط مختصات هارمونیک می‌دهد:

$$k_{\lambda} k^{\lambda} = c^2 \omega^2 - k^2 = 0, \quad (73.8)$$

$$k_{\nu} e_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} k_{\mu} e_{\nu}^{\nu} = 0. \quad (74.8)$$

چارتانسور قطبش $e_{\mu\nu}$ قرینه است و ۱۰ درایه دارد. ولی جواب معادله (۷۴.۸) یگانه نیست. مختصات هارمونیک (۷۴.۸) چهار شرط خطی روی آن‌ها می‌گذارد و شمار درایه‌های مستقل را به ۶ کاهش می‌دهد. هنوز درگزینش پیمانه آزادیم. اگر $e_{\mu\nu}$ در شرط هارمونیک صدق کند، و ϵ_{λ} یک چاربردار با چهار درایه دل‌خواه باشد، چارتانسور زیر نیز در آن صدق خواهد کرد:

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu} k_{\nu} + \epsilon_{\nu} k_{\mu}.$$

می‌توان چهار درایه ϵ را طوری گزید که از ۶ مولفه باقی‌مانده تانسور قطبش چهارتای دیگر نیز صفر شود. به این ترتیب شمار قطبش‌های معنادار موج گرانشی تخت به $2 = 10 - 4 - 4$ کاهش می‌یابد.

فرض کنیم موج در امتداد محور z منتشر می‌شود:

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = k_0 = k = c\omega.$$

دو قطبش مستقل از هم را می‌توان چنین گزید:

$$[e^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [e^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{12} & 0 \\ 0 & e_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (75.8)$$

قطبش‌های معادله (۷۵.۸) را قطبش خطی خواهیم نامید. از ترکیب خطی مختلط آن‌ها می‌توان قطبش‌های دایروی به دست آورد:

$$e_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{(1)} \pm ie^{(2)}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{11} & \pm ie_{12} & 0 \\ 0 & \pm ie_{12} & -e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (76.8)$$

با قطبش خطی، دایروی، و بیضوی موج الکترومغناطیسی آشنا هستیم. هم‌چنین می‌دانیم از جمع خطی بردارهای قطبش، قطبش دیگری به دست می‌آید. یا هر قطبش الکترومغناطیسی را می‌توان به قطبش خطی یا دایروی تجزیه کرد. در موج گرانشی نیز برهم‌نهی خطی حقیقی و مختلط تانسورهای قطبش رواست.

رفتار موج گرانشی در چرخش چارچوب مختصات

در معادله (۷۲.۸) محور z هم‌سو با بردار انتشار، k گزیده شده است. در گزینش محوره‌ای (x, y) در صفحه موج (صفحه عمود بر بردار انتشار) آزاد هستیم. می‌توانیم (x, y) را به اندازه θ در جهت عقربه‌های ساعت بچرخانیم و چگونگی چرخش مولفه‌های قطبش را بررسی کنیم (Passive rotation)، یا خود تانسور قطبش را به اندازه θ در خلاف جهت چرخش عقربه‌های ساعت بچرخانیم (Active rotation) و به مولفه‌های آن نگاه کنیم. در هر حال باید به یک نتیجه برسیم. برای پرهیز از پرنویسی، سطرها و ستون‌های تمام صفر ماتریس‌ها را کنار

می‌گذاریم و به ماتریس‌های 2×2 بسنده می‌کنیم:

$$e^{(1)} = e_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad e^{(2)} = e_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{\pm} = \begin{bmatrix} e_{11} & \pm i e_{12} \\ \pm i e_{12} & -e_{11} \end{bmatrix}.$$

چرخش مختصات سبب چرخش تانسورهای قطبش می‌شود. برای چرخش در صفحه (x, y) به اندازه θ - خواهیم داشت:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$e^{(1)'} = +R^T e^{(1)} R = \cos 2\theta \begin{bmatrix} e_{11} & 0 \\ 0 & -e_{11} \end{bmatrix} + \sin 2\theta \begin{bmatrix} 0 & e_{11} \\ e_{11} & 0 \end{bmatrix},$$

$$e^{(2)'} = R^T e^{(2)} R = -\sin 2\theta \begin{bmatrix} e_{12} & 0 \\ 0 & -e_{12} \end{bmatrix} + \cos 2\theta \begin{bmatrix} 0 & e_{12} \\ e_{12} & 0 \end{bmatrix}.$$

$$e'_{\pm} = R^T e_{\pm} R = \exp(i2\theta) e_{\pm}. \quad (77.8)$$

دیده می‌شود هر کدام از قطبش‌های خطی یا دایروی پس از 18° درجه چرخش به جای خود برمی‌گردد.

نام‌گذاری: می‌دانیم ذره‌های کوانتمی با اسپین $\frac{1}{2}$ پس از دو دور چرخش، و بردارها پس از یک دور، به خود برمی‌گردند. حالا می‌بینیم قطبش موج گرانشی پس از نیم دور چرخش به خود برمی‌گردد. در گفتمان نظریه میدان‌ها گفته می‌شود هلیسیتی (Helicity) میدان‌های اسپینی $1/2$ ؛ میدان‌های برداری 1 ؛ و میدان گرانشی 2 است. در گفتمان کوانتومی گفته می‌شود تکانه‌های زاویه‌ای ذره با اسپین $1/2$ ؛ $\frac{1}{2}\hbar$ ؛ فوتون $1\hbar$ ؛ و گراویتون $2\hbar$ است. به طور کلی اگر سامانه‌ای به اندازه $2\pi/n$ بچرخد و به خود برگردد گفته می‌شود هلیسیتی یا اسپین آن n است.

انرژی و تکانه موج تخت

پیش‌تر در معادله‌های (۶۴.۸)، (۶۱.۸)، و (۶۲.۸)، تانسور انرژی-تکانه را بررسی کردیم. برای موج تخت $R^{(1)} = 0$ است و جمله $h_{\mu\nu} R^{(2)}$ در طرف راست معادله (۶۴.۸) از مرتبه

کوچکی h^3 و چشم‌پوشیدنی است. معادله (۶۴.۸) ساده می‌شود. جای‌گذاری معادله (۸). (۷۲) در این معادله ساده‌شده می‌دهد:

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} &= \frac{1}{8\pi G} [R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(2)}] \\ &= \frac{1}{16\pi G} \sum_e |A_e(k)|^2 k_\mu k_\nu \left(e^{\lambda\kappa*} e_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2} |e^\lambda_\lambda|^2 \right). \end{aligned} \quad (78.8)$$

۳.۵.۸ تولید موج گرانشی

معادله موج گرانشی خطی است. بستگی زمانی سامانه گرانشی را می‌توان به طیف فوریه آن تجزیه کرد، موج ناشی از هر یک از مولفه‌ها را به دست آورد، و در پایان باهم جمع کرد. بنابراین فرض کنیم تانسورهای انرژی-تکانه و معادله پیوستگی به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega) \exp(-i\omega t), \\ S_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega) = [T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T(\mathbf{x}, \omega)] \exp(-i\omega t), \\ \frac{\partial}{\partial x_j} T^j_\nu - i\omega T^\circ_\nu = 0. \end{aligned}$$

معادله (۷۰.۸) را نیز در منطقه موج (به دور از چشمه) تقریب بزنیم:

$$|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{x}|, \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \approx r - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}', \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} \approx r^{-1},$$

که در آن $r = |\mathbf{x}|$ است. جای‌گذاری این عبارت‌ها در معادله (۷۰.۸) می‌دهد:

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{4G}{r} \exp(ik_\lambda x^\lambda) S_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) + c.c., \\ S_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) &= \int S_{\mu\nu}(\mathbf{x}', \omega) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (79.8)$$

که در آن $k_\lambda : (\omega/c, \mathbf{k})$ فرکانس و بردار انتشار موج، و $S_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)$ تبدیل فوریه $S_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega)$ از $\hat{\mathbf{x}}$ به $\hat{\mathbf{k}}$ است. معادله (۷۹.۸) موج تختی است که دامنه آن متناسب با r^{-1} کم می‌شود. تانسور انرژی-تکانه آن، به جز ضریب r^{-1} در معادله (۷۸.۸) داده شده است. مولفه t_{0i} آن

چگالی شار انرژی (توان تابیده) در امتداد محور i مختصات است. انرژی تابیده در امتداد بردار $\hat{k} = \mathbf{k}/k$ در داخل مخروط $d\Omega$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= r^2 t_{\circ\hat{k}} = \frac{kk_{\circ}}{\sqrt{\epsilon}\pi G} \left[S_{\mu\nu}^*(\mathbf{k}, \omega) S^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{1}{\epsilon} |S^{\lambda}_{\lambda}(\mathbf{k}, \omega)|^2 \right] \\ &= \frac{G\omega^2}{\pi c^3} \left[T_{\mu\nu}^*(\mathbf{k}, \omega) T^{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{1}{\epsilon} |T^{\lambda}_{\lambda}(\mathbf{k}, \omega)|^2 \right], \end{aligned} \quad (۸۰.۸)$$

$$T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega) = \int T_{\mu\nu}(\mathbf{x}', \omega) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (۸۱.۸)$$

که در آن $k = k_{\circ} = \omega/c$ گرفته شده و $T_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \omega)$ تبدیل فوریه $T_{\mu\nu}(\mathbf{x}, \omega)$ است. در این معادله می‌توان $T^{\circ\circ}$ و $T^{\circ i}$ را با یاری تبدیل فوریه معادله پیوستگی با T^{ij} جای‌گزین کرد:

$$\begin{aligned} k_{\nu} T^{\mu\nu} &= k_{\circ} T^{\mu\circ} + k_i T^{\mu i} = 0, \\ T^{\circ j} &= -\hat{k}_i T^{ij}, \quad T^{\circ\circ} = \hat{k}_i \hat{k}_j T^{ij}. \end{aligned}$$

جای‌گزینی این معادله‌ها در معادله (۸۰.۸) می‌دهد:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^2}{\pi c^3} \Lambda_{ij,lm}(\hat{k}) T^{ij*}(\mathbf{k}, \omega) T^{lm}(\mathbf{k}, \omega), \quad (۸۲.۸)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij,lm}(\hat{k}) &= \delta_{il}\delta_{jm} - \epsilon \hat{k}_j \hat{k}_m \delta_{il} + \frac{1}{\epsilon} \hat{k}_i \hat{k}_j \hat{k}_l \hat{k}_m \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon} \delta_{ij}\delta_{lm} + \frac{1}{\epsilon} \delta_{ij}\hat{k}_l \hat{k}_m + \frac{1}{\epsilon} \delta_{lm}\hat{k}_i \hat{k}_j. \end{aligned} \quad (۸۳.۸)$$

یادآوری می‌شود $\hat{k} = \hat{x}$ بردار واحد در هر امتداد دل‌خواه است.

تا به این‌جا تقریبی جز فرض گرانش ضعیف به کار برده نشده است. ولی در بسیاری موارد سرعت‌ها در سامانه‌های گرانش‌کننده، و دوره‌های زمانی بلند هستند. اگر تابشی انجام گیرد در طول موج‌های بلند و فرکانس‌های پایین است. در چنین حالتی می‌توان فرض کرد $k \cdot x \ll 1$ و معادله (۸۱.۸) را ساده کرد:

$$T^{ij}(\mathbf{k}, \omega) \approx \int T^{ij}(\mathbf{x}, \omega) d^3x = D^{ij}(\omega). \quad (۸۴.۸)$$

برای محاسبه D^{ij} از معادله پیوستگی یاری می‌جویم:

$$\frac{\partial^2 T^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial T^{lm}}{\partial x^l \partial x^m} - \omega^2 T^{\circ\circ} = 0.$$

این معادله را در $x^i x^j$ ضرب کنیم و روی حجم سامانه گراننده انتگرال بگیریم:

$$D^{ij}(\omega) = \int T^{ij}(\mathbf{x}, \omega) d^3x = \omega^2 \int x^i x^j T^{\circ\circ}(\mathbf{x}, \omega) d^3x. \quad (۸۵.۸)$$

انتگرال پایانی در این معادله، چارقطبی توزیع انرژی (جرم) سامانه گراننده در فرکانس ω و تانسور اینرسی سامانه است. جایگذاری این عبارت‌ها در معادله (۸۲.۸) می‌دهد:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G\omega^2}{\pi c^5} \Lambda_{ij,lm} D^{ij}(\omega) D^{ij*}(\omega). \quad (۸۶.۸)$$

برای به دست آوردن توان کل تابش گرانشی لازم است روی زاویه‌های فضایی انتگرال گرفته شود. مولفه‌های بردار $\hat{k}$ در مختصات کروی قطبی چنین‌اند:

$$\hat{k} : (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

خواهیم داشت:

$$\int \hat{k}_i \hat{k}_j d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij},$$

$$\int \hat{k}_i \hat{k}_j \hat{k}_l \hat{k}_m d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}),$$

$$\int \Lambda_{ij,lm} d\Omega = \frac{2\pi}{15} (11 \delta_{il} \delta_{jm} - 4 \delta_{ij} \delta_{lm} + \delta_{im} \delta_{jl}),$$

$$P(\omega) = \int \frac{dP}{d\Omega} = \frac{2G\omega^2}{5c^5} \left[D_{ij}^* D^{ij} - \frac{1}{3} |D^i_i|^2 \right]. \quad (۸۷.۸)$$

ممان چارقطبی نخستین جمله‌ای است که می‌تواند موج گرانشی بتابد. ممان صفرم، $\int x^i T^{\circ\circ} d^3x$ ، جرم کل سامانه و ثابت است. ممان اول، $\int x^i T^{\circ\circ} d^3x$ ، برابر با جرم کل ضرب در بردار مکان گرانیگاه سامانه است، و آن هم در تقریب گرانش ضعیف ثابت است و موج گرانشی نمی‌دهد.

مقایسه موج گرانشی با موج الکترومغناطیسی

در طبیعت بار الکتریکی به دو صورت مثبت و منفی آفریده شده است. می‌توان برای سامانه‌های الکترومغناطیسی دو قطبی الکتریکی یا مغناطیسی یا هر دو تعریف کرد و تابش الکترومغناطیسی دو قطبی داشت. ولی جرم مادی تنها به یک صورت وجود دارد و آن هم مثبت گرفته شده است. بنابراین دو قطبی انرژی یا جرمی وجود ندارد و به تبع تابش گرانشی ناشی از دو قطبی هم نخواهد بود.

تابش گرانشی یک جرم چرخنده

فرض کنیم جرمی با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω می‌چرخد. چارچوب مختصات ناظر را x و چارچوب مختصات چسبیده به جسم را x' بنامیم. محورهای x_3 و x'_3 نیز موازی با هم باشند. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}x_1 &= x'_1 \cos \Omega t - x'_2 \sin \Omega t, \\x_2 &= x'_1 \sin \Omega t + x'_2 \cos \Omega t, \\x_3 &= x'_3.\end{aligned}\quad (۸۸.۸)$$

برای سادگی بیشتر محورهای x' را در امتداد محورهای اصلی اینرسی سامانه گراننده بگزینیم. تانسور اینرسی در مختصات x' قطری خواهد بود:

$$I_{ij} = \int \rho(x') x'_i x'_j d^3x', \quad \text{قطری}, \quad I_{11}, I_{22} \gg I_{33},$$

که در آن $\rho(x')$ چگالی جرمی سامانه چرخنده است. برای D_{ij} در چارچوب x از معادله (۸۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}D_{11}(t) &= \frac{1}{4} \omega^2 [(I_{11} + I_{22}) + (I_{11} - I_{22}) \cos 2\Omega t], \\D_{12}(t) &= \frac{1}{4} \omega^2 (I_{11} - I_{22}) \sin 2\Omega t, \\D_{22}(t) &= \frac{1}{4} \omega^2 [(I_{11} + I_{22}) - (I_{11} - I_{22}) \cos 2\Omega t], \\D_{23} &= \omega^2 I_{33}.\end{aligned}$$

تبدیل فوریه مولفه‌های D_{ij} عبارت‌اند از:

$$D_{11}(2\Omega) = -D_{22}(2\Omega) = iD_{12}(2\Omega) = \frac{1}{4}\omega^2(I_{11} - I_{22}) = \frac{1}{4}\omega^2 Ie.$$

که در آن $I = (I_{11} + I_{22})$ و $e = (I_{11} - I_{22})/(I_{11} + I_{22})$ خروج از مرکز استوایی بیضی اینرسی است. جای‌گذاری این عبارت‌ها در معادله (۸۷.۸) می‌دهد:

$$P = \frac{32}{5c^5} G \Omega^6 I^2 e^2. \quad (89.8)$$

مثال: یک جفت ستاره هر کدام به جرم M و به فاصله r از هم‌دیگر به مانند یک تک‌ستاره با جرم کاهش‌یافته $M/2$ که نیروی GM^2/r^2 بر آن اثر می‌کند، ظاهر می‌شود. برای چنین سامانه‌ای خواهیم داشت:

$$\Omega^2 = \frac{2GM_\odot}{r^3}, \quad I = I_{11} = Mr^2, \quad I_{22} = 0, \quad e = 1,$$

است. جای‌گذاری این عبارت‌ها در معادله (۸۹.۸) می‌دهد:

$$\begin{aligned} P &= \frac{64c^5}{5G} \left(\frac{2GM}{c^2 r} \right)^6 = 4.6 \times 10^{46} \left(\frac{2GM}{c^2 r} \right)^6 \text{ c.g.s.} \\ &= 1.5 \times 10^{12} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{1}{r(a.u.)} \right) \text{ k watt.} \end{aligned}$$

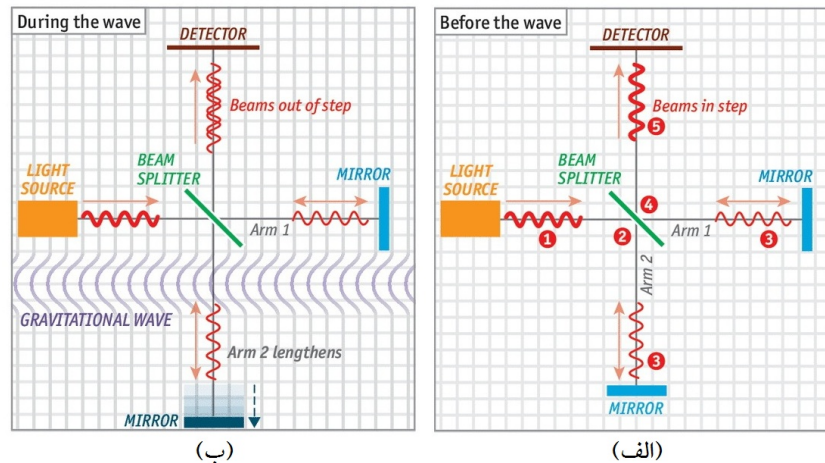
جمله درون پرانتز در تساوی اول نسبت شعاع شوارتسشیلد به فاصله ستاره‌هاست و بی‌بعد است. ضریب عددی در تساوی دوم برای جرم خورشید، $M_\odot = 2 \times 10^{32} \text{ gr}$ ، و فاصله یک واحد نجومی، $1 a.u. = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$ ، حساب شده است. برای یک خوشه کهکشانی یا خوشه‌ای از کهکشان‌ها که کم و بیش ویریالی شده باشد، می‌توان فرمول زیر را برای تخمین بزرگی تابش گرانشی به کار برد،

$$M\bar{v}^2 = M(\bar{r}\bar{\Omega})^2 = GM/\bar{r},$$

که در آن M جرم خوشه و $\bar{r}$ شعاع میانگین خوشه است.

آشکار شدن موج گرانشی

بنا به آنچه گفته شد جفت‌ستاره‌ها یا جفت‌کهکشان‌ها به هنگام چرخش دور هم‌دیگر موج گرانشی نشر می‌کنند و در اثر از دست دادن انرژی به هم نزدیک می‌شوند. اگر این جفت دو



شکل ۴.۸: شمای تداخل سنج لیگو: (الف) نور لیزر به دو باریکه می‌شکند. باریکه‌ها یکی در امتداد x و دیگری در امتداد y فرستاده می‌شوند، به آشکارساز برمی‌گردند و فرانت می‌سازند. (ب) اگر از بازوی x یا y تداخل سنج موج گرانشی بگذرد، طول بازو تغییر می‌کند و الگوی فرانت‌ها عوض می‌شود.

سیاه‌چاله نزدیک به هم باشند ممکن است با هم برخورد کنند و یکی شوند. در این صورت موج گرانشی نشر شده به اندازه کافی قوی خواهد بود که از فاصله‌های نجومی دور آشکار شود. به نظر می‌رسد چنین رخدادی در پاییز ۲۰۱۵ رخ داده و موج گرانشی آشکار شده است.

لیگو (Laser Interferometer Gravitational Observatory - LIGO) توسط ام‌آی‌تی و کلتک ساخته شده و اداره می‌شود. دو ایزار اصلی آن عبارت‌اند از یک تداخل سنج لیزری در هانفورد در ایالت لوئیزیانا و تداخل سنج دوقلوی دیگر در لیوینگستون در ایالت واشنگتن آمریکا. دو تداخل سنج به فاصله ۳۰۰۲ کیلومتر از هم دیگر قرار دارند. می‌دانیم هر تداخل سنج دو بازوی عمود بر هم دارد. نور ورودی به یاری یک باریکه‌شکن به دو بازوی عمود به هم فرستاده شده، دوباره برگردانده شده و در آشکارساز فرانت‌های تداخلی تشکیل می‌دهند. در تداخل سنج‌های لیگو طول بازوها ۴ کیلومتر است. باریکه‌های نور چندین بار آن را می‌روند و برمی‌گردند. انتظار می‌رود اگر موج گرانشی از تداخل سنج بگذرد، طول یک یا هر دو بازوی تداخل سنج کم و زیاد شود، ترتیب فرانت‌ها به هم بخورد، و موج گرانشی آشکار شود. تداخل سنج‌های دوقلو در ۱۴ سپتامبر ۲۰۱۵ در ۹:۱۵ ساعت گرینویچ چنین تغییری را

آشکار کردند. کوشش یک صد ساله جویندگان موج گرانشی به بار نشست و برگی دیگر بر اعتبارنامه گرانش انیشتن افزوده شد [۱].

دانشمندان تیم لیگو تخمین می زنند که جفت سیاه چاله در فاصله ۱/۳ میلیارد سال نوری بوده و جرمی برابر ۲۹ و ۳۶ جرم خورشید داشته اند. در فرآیند برخورد انرژی ای برابر ۳ جرم خورشید در کسری از ثانیه به موج گرانشی تبدیل شده است. آشکارساز لیوینگستون موج را ۷ میلی ثانیه زودتر از آشکارساز هانفورد دریافت کرد و نتیجه گرفته شد که جفت سیاه چاله در نیم کره جنوبی آسمان بوده است.

فصل ۹

کیهان - آنچه از رصدهای نجومی می‌دانیم

اگر کیهان را به معنای هر آنچه هست بدانیم، مشکل بتوان تعریف جامع و مانعی برای آن پیدا کرد. زیرا هیچ کس اشراف لازم و کافی به آنچه هست و نیست ندارد. انسان امروز به کمک اسباب و ابزار ابداعی‌اش آسمان را از زمین و بیرون از آن رصد می‌کند و در یک صد سال گذشته آگاهی‌های گسترده‌ای به دست آورده است. ولی هنوز نمی‌داند و ادعا نمی‌کند آنچه را که شناخته است همه کیهان، بخش قابل توجهی از کیهان، یا اندکی از جهان بزرگی است که به آسانی یا دشواری یا هیچ‌وقت به آن دست نخواهد یافت.

از اسطوره‌های آفرینش اقوام که بگذریم، از زمان بطلمیوس (حدود ۹۰ - ۱۶۸ میلادی) تا کپرنیک (۱۴۷۳ - ۱۵۴۳)، زمین مرکز عالم دانسته می‌شد. پنج سیاره شناخته شده آن زمان‌ها، تیر، ناهید، بهرام، برجیس، و کیوان هر کدام فلکی داشتند. فلک‌ها دور زمین می‌گشتند، و سیاره‌ها در فلک خود حرکت‌های پیش‌بینی شده داشتند. نظریه زمین‌مرکزی توصیف عالم از دید ناظر زمینی، نظریه درستی است. احوال آسمان را، شامل آمدن و رفتن فصل‌ها، طلوع و غروب خورشید و ماه و ستاره‌ها، گرفتگی ماه و خورشید را، به درستی و با دقت بسیار خوب پیش‌بینی می‌کند. ولی می‌شود به جای زمین روی خورشید نشست و تصویر ساده‌تری از آسمان دید.

در کیهان خورشیدمرکزی همه ستاره‌ها کم و بیش نسبت به خورشید ثابت‌اند. سیاره‌ها و زمین دور خورشید می‌گردند و ماه دور زمین می‌چرخد. در نجوم اسلامی از اسطرلاب زورقی ابوسعید سجزی (درگذشت ۴۱۴ هجری قمری)، معاصر عضدالدوله و ابوریحان بیرونی، که برپایه نظریه خورشیدمرکزی ساخته شده بوده، سخن رفته است، و ابوریحان آن را ستوده است. ولی به نظر می‌رسد منجمین زمان آن را تنها یک شگرد صنعتی دانسته‌اند، نه واقعیت از دید ناظر مستقر در چارچوب مختصات لخت خارج از زمین.



کپرنیک: ۱۴۷۳-۱۵۴۳.

نظریه کپرنیک نقطه عطفی در تاریخ نجوم است. خورشید در مرکز عالم قرار می‌گیرد، زمین مقام خود را از دست می‌دهد و در کنار سیارات دیگر می‌نشیند. کپلر (۱۵۷۱-۱۶۳۰) بر مبنای رصدهای خود و دیگران سه قانون حرکت سیاره‌ها دور خورشید را مدون می‌کند و نیوتن (۱۶۴۳-۱۷۲۷) آن‌ها را به صورت قضیه‌های ریاضی از نظریه گرانشی خود به دست می‌آورد. در کاربرد قانون گرانش نیوتن، برای بیان حرکت سیاره‌ها دور خورشید، فرض بزرگ و تا آن زمان ناگفته و ناآزموده‌ای وجود دارد: خورشید، ماه و سیاره‌ها جرم دارند و این جرم همان است که زمین هم از آن تشکیل شده‌است. پیشینیان هیچ‌وقت سخنی درباره چپستی روشن‌ان آسمانی که آزمودنی بوده باشد نگفته‌اند.

تلسکوپ و اسپکترومتر ساخته می‌شوند، بیناب خورشید و ستارگان بررسی می‌شود و با بیناب عنصرهای زمینی سنجیده می‌شود. اعلام می‌شود هر آنچه در آسمان است از جنس عنصرهای زمینی است (ویلیام و مارگارت هاگینس، ۱۸۶۰). به این ترتیب ستارگان در ردیف خورشید قرار می‌گیرند و ستاره‌شناسی به معنای پرداختن به ستاره‌ها با یاری فیزیکی که تا سده نوزده تنها در روی زمین آزموده شده بود زاده می‌شود. در آنچه که در زیر می‌آید، نخست از خورشید و ستاره‌ها از نقطه نظر داده‌های فیزیکی، رده‌بندی بینابی، پیدایش و مرگ آن‌ها به کوتاهی یاد خواهیم کرد. سپس به آرایش خوشه‌های

ستاره‌ای، کهکشان راه شیری، کهکشان‌های بیرونی، و خوشه‌ها و ابر خوشه‌های کهکشان‌ها خواهیم پرداخت. قانون هابل و انبساط کیهان را آن چنان که از رصدها دریافته‌ایم، بررسی خواهیم کرد.

برای داشتن تصویر روشنی از گستردگی آن چه در آسمان می‌بینیم ناگزیر از دانستن دوری‌های میان ستاره‌ای و میان کهکشان‌ها هستیم. راه‌های گوناگون دوری‌یابی در آسمان را، از منظومه خورشیدی گرفته تا دورترین کهکشان‌ها، خواهیم گفت. این فاصله‌ها بسیار بزرگ هستند. ستاره‌شناسان آن‌ها را، در اندازه‌های منظومه خورشیدی با واحد نجومی، و در اندازه‌های کهکشانی با پارسک (pc: Parallax second) اندازه می‌گیرند. تعریف و اندازه آن‌ها چنین است:

- یک واحد نجومی برابر است با فاصله میانگین زمین و خورشید:

$$1 \text{ au} = 149,598,000 \text{ km}$$

- یک پارسک فاصله‌ای است که یک واحد نجومی با زاویه یک ثانیه قوسی دیده شود:

$$\begin{aligned} 1 \text{ pc} &= \frac{1 \text{ au}}{1''(\text{radian})} = \frac{149,598,000 \text{ km}}{(\pi/180 \times 60 \times 60)} \\ &= 3.09 \times 10^{13} \text{ km} = 3.26 \text{ light yr.} \end{aligned}$$

۱.۹ ستارگان

خورشید یک ستاره معمولی است. مشخصه‌های آن عبارت‌اند از:

- جرم: $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}$ کیلوگرم،
- شعاع: $R_{\odot} = 6.96 \times 10^8$ متر،
- درخشندگی: $L_{\odot} = 3.90 \times 10^{26}$ ژول بر ثانیه،
- دمای فتوسفر: ۵۸۰۰ کلوین،
- رده بینایی: G_2 ،

فصل ۹. کیهان - آنچه از رصدهای نجومی می‌دانیم ۱۴۰

• فراوانی عنصرهای شیمیایی (نسبت جرمی): هیدروژن ۷۱٪، هلیوم ۲۷٪، و عنصرهای سنگین ۱/۹٪،

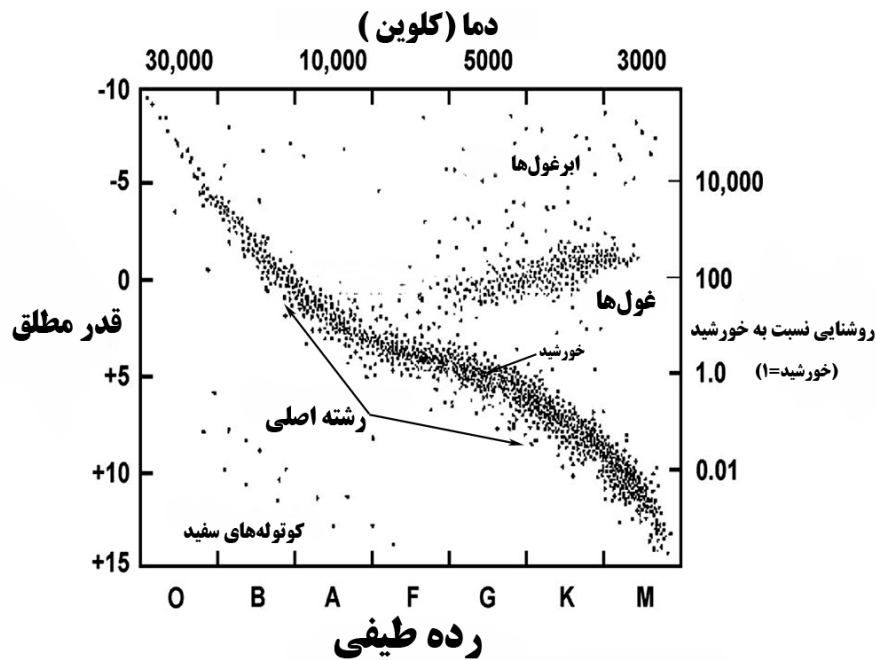
• سن: $10^9 \times 5$ سال، عمر احتمالی 10^{10} سال.

ستاره‌های دیگر کم و بیش مانند خورشیداند. جرم آن‌ها ممکن است چند ده برابر بزرگ‌تر یا چند برابر کوچک‌تر باشد. ممکن است چندین ده یا صد یا هزار برابر کم‌سوتر یا درخشان‌تر باشند. ممکن است جوان‌تر یا پیرتر باشند. ممکن است کوتاه‌عمر یا دیرزی باشند.

۱.۱.۹ دیاگرام هرتسپرانگ - راسل

ستاره هرچه پرچم‌تر باشد، درون و بیرون آن داغ‌تر، سوخت و ساز آن تندتر، روشنایی آن درخشان‌تر، و عمرش کوتاه‌تر خواهد بود. بیش‌ترین ماده تشکیل دهنده ستاره‌ها هیدروژن است و ستاره‌ها بیشتر عمر خود را در فاز هیدروژن‌سوزی می‌گذرانند. بیناب ستاره‌ها به دمای فتوسفر آن‌ها بستگی دارد. در اتمسفر ستاره‌های بسیار داغ مولکول تشکیل نمی‌شود. بسیاری از عناصر، از جمله هیدروژن و تا اندازه‌ای هلیوم یونیده‌اند. خط‌های نشری و جذبی آن‌ها در بیناب ستاره دیده نمی‌شود. از سوی دیگر در ستاره‌های خنک‌تر ممکن است مولکول‌های دواتمی و سه‌اتمی هم یافت شوند. در این صورت خط‌های نشری و جذبی اتم‌ها و نوارهای نشری و جذبی مولکول‌ها در بیناب ستاره آشکار می‌شود. از این‌رو ستاره‌ها را بسته به این که در بیناب آن‌ها خط‌ها و نوارهای کدام اتم‌ها و مولکول‌ها دیده می‌شوند به رده‌های بینابی از داغ و گرم به خنک و سرد تقسیم می‌کنند.

اگر ستاره‌ها را برحسب قدر مطلق از کم‌سو به پرسو روی محور قائم، و دمای فتوسفر یا رده بینابی آن‌ها را، از گرم به سرد روی محور افقی رسم کنیم، بیشتر آن‌ها بر روی یک رشته اصلی، که از گوشه داغ و روشن به گوشه سرد و کم‌سو کشیده شده است، جا می‌گیرند. این‌ها ستاره‌های هیدروژن‌سوز هستند و مادامی که سوخت هیدروژنی آن‌ها در لایه‌های درونی ستاره پایان نیافته است از رشته اصلی بیرون نمی‌روند. شماری از ستاره‌ها در بالای رشته اصلی جا دارند. قدر مطلق آن‌ها روشن و رده بینابی‌شان سرد است. بزرگ‌اند و غول و ابرغول نامیده می‌شوند. غول‌ها و ابرغول‌ها فاز هیدروژن‌سوزی را پشت سر گذاشته و از رشته اصلی بیرون رفته‌اند. پایان آن‌ها ممکن است درون‌ریزی لایه‌های درونی باشد. سپس منفجر شده و نواختر و ابرنواختر شوند. شمار اندکی از ستاره‌ها نیز در گوشه داغ و کم‌سوی دیاگرام جا



شکل ۱۰۹: دیاگرام هرتسپرانگ - راسل.

می‌گیرند. آن‌ها هم هیدروژن سوزی را پشت سر گذاشته‌اند. چون جرم کم داشته‌اند، کوچک ولی داغ مانده و کوتوله سفید شده‌اند (سر نوشت هر ستاره‌ای که در پایان فاز هیدروژن سوزی جرمی کمتر از $1/4$ جرم خورشید (حد چاندرا سکار) داشته باشد، کوتوله سفید شدن است.

بستگی جرم و روشنایی

گفته شد ستاره‌های پر جرم‌تر روشن‌تر هستند. برای ستاره‌های رشته اصلی بین جرم و درخشندگی ستاره بستگی زیر وجود دارد:

$$\frac{L_{\star}}{L_{\odot}} = \left(\frac{M_{\star}}{M_{\odot}} \right)^a, \quad 2.5 \leq a \leq 4.$$

این رابطه آمپیریک نخستین بار از رصد ستاره‌های دوتایی و تخمین جرم و روشنایی دو همدم به دست آمده است، و مدل‌های ستاره‌ای هم آن را تایید می‌کنند. بازه $2.5 - 4$ برای پارامتر a به جرم ستاره و فراوانی شیمیایی عنصرهای سنگین موجود در آن بستگی دارد.

جمعیت ستاره‌ها

به باور کیهان‌شناسان فراوانی عنصرها در کیهان نخستین، چند صد ثانیه پس از مه‌بانگ، بیشتر هیدروژن ($75\% - 73\%$)، سپس هلیوم ($25\% - 23\%$)، و سپس عناصر سبک دیگر ($2\% - 1\%$) بوده است. عنصرهای سنگین‌تر پس از تشکیل ستاره‌ها و پشت سر گذاشتن فاز هیدروژن‌سوزی و هلیوم‌سوزی در درون ستاره‌ها ساخته شده‌اند. ستاره‌شناسان ستاره‌ها را در دو جمعیت I و II دسته‌بندی می‌کنند. جمعیت II ستارگان نسل اول و پیرند. عنصرهای سنگین در آن‌ها کم است. ستارگان جمعیت I جوان‌ترند. به هنگام زایش از گاز و غبار میان کهکشانی، مقداری از خاکستر ستاره‌های جمعیت پیر و از میان رفته را به خود گرفته‌اند و عنصرهای سنگین بیشتری دارند. میزان عنصرهای سنگین در چه‌گونگی تحول ستاره نقش مهم دارد.

منظومه خورشیدی

فاصله هشت سیاره از خورشید بر حسب واحد نجومی مطابق جدول ۱.۹ است. فراتر از نپتون کمربند کویپر (Kuiper)، مجموعه‌ای از سیارک‌های ریز و درشت از 30° تا 50° واحد نجومی گسترده شده است. پلوتو نیز که زمانی سیاره شمرده می‌شد در این کمربند است. نیم‌قطر بزرگ مدار آن 40° واحد نجومی است. آن‌سوتر از کمربند کویپر هنوز توده‌های بزرگ و کوچک سرگردانی که پای‌بند گرانش خورشیداند در گستره وسیعی تا یک سال نوری و بیشتر پراکنده هستند و به نام ابرهای اورت (Oort) شناخته می‌شوند. سه همسایه نزدیک خورشید که با چشم برهنه هم دیده می‌شوند عبارت‌اند از:

آلفا قنطورس در فاصله $1/3$ پارسک،

ستاره بارنارد در فاصله $1/8$ پارسک،

شاه‌هنگ (شعرا یمانی، Sirius) در فاصله $2/6$ پارسک.

۲.۹ آرایش اجرام کیهانی - رده‌بندی کهکشان‌ها

از دهه ۱۹۲۰ به این سو که معلوم شد به جز راه شیری، کهکشان‌های دیگری بیرون از راه شیری وجود دارند، رده‌بندی آن‌ها از نظر شکل، ساختار و مشخصه‌های دیگر آغاز شد.

جدول ۱.۹

تیر	ناهید	زمین	بهرام	برجیس	کیوان	اورانوس	نپتون
۰/۴	۰/۷۵	۱/۰۰	۱/۵	۵	۱۰	۲۰	۳۰

نخستین و شناخته شده‌ترین رده‌بندی که تا به امروز از آن یاد می‌شود از آن هابل است (۱۹۲۶). وی کهکشان‌ها را به چهار رده بیضی‌گون، مارپیچی، مارپیچی میله‌دار و بی‌نظم تقسیم می‌کند.

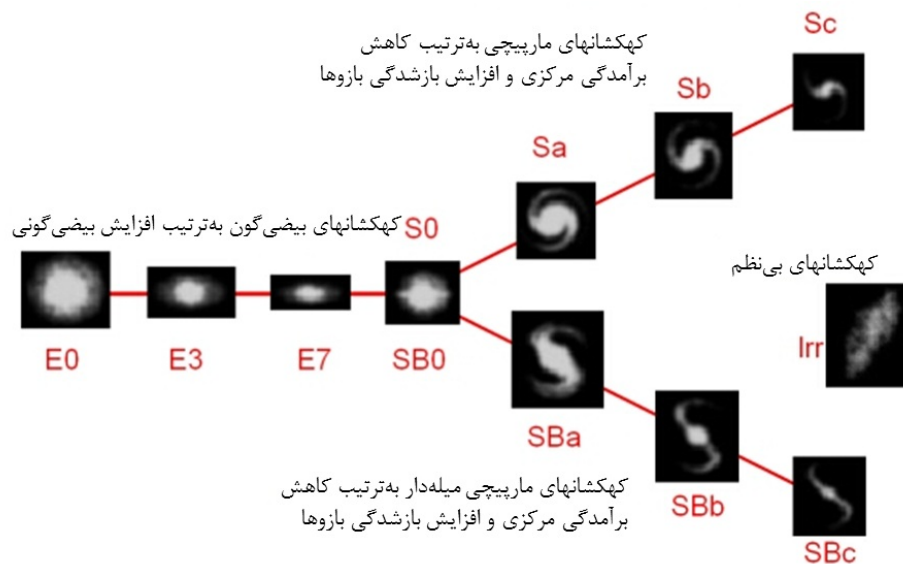
برابر شکل ۲.۹، بیضی‌گون‌ها بسته به درجه بیضی‌گونی از E^0 تا $E7$ رده‌بندی می‌شوند. پس از $E7$ کهکشان‌های S^0 و SB^0 جا دارند که کم و بیش کروی ساده یا کروی مارپیچی‌اند. پراکندگی ستاره‌ها در بیضی‌گون‌ها و S^0 کم و بیش هموار است، ساختار کپه مانند، بازو مانند و خوشه مانند ندارند، از ابرهای گاز و غبار ستاره‌زا نیز تهی‌اند، و ستاره‌های شان پیر و جمعیت II هستند.

کهکشان‌های مارپیچی معمولاً دو بازوی بزرگ و بیش‌تر دارند که دور برآمدگی مرکزی کهکشان پیچیده‌اند. بسته به درجه پیچیدگی بازوها با نمادهای Sa ، Sb ، و Sc نموده می‌شوند. در مارپیچی‌های میله‌دار، بازوها از دو سر یک میله آغاز می‌شوند و دور کهکشان می‌پیچند. در بعضی از کهکشان‌ها در وسط میله یک برآمدگی مرکزی نیز جا گرفته است. مارپیچی‌های میله‌دار را با نمادهای SBa ، SBb ، و SBC نشان می‌دهند، که B نشان میله و a ، b ، c نشان درجه پیچیدگی بازوها هستند.

در کهکشان‌های بی‌نظم ساختار دیده می‌شود ولی نظم در آن‌ها نیست. در همه کهکشان‌های مارپیچی، مارپیچی میله‌دار، و بی‌نظم ستاره‌ها و ابرهای گاز و غبار در بازوها و ساختارها جا می‌گیرند. ستاره‌زایی دارند و ستاره‌هایشان جوان و جمعیت I هستند.

۱.۲.۹ کهکشان راه شیری

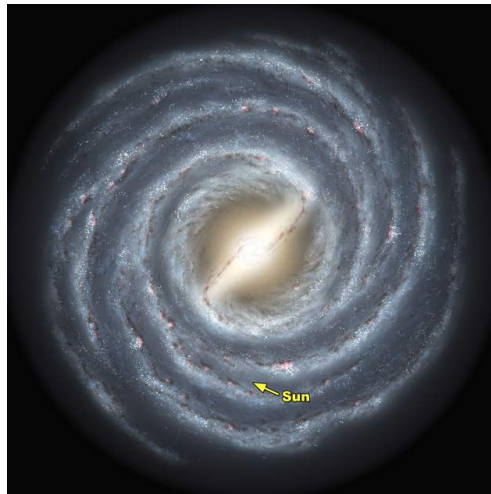
کم و بیش از $10^{11} \times 2$ ستاره و مقدار زیادی گاز و غبار میان‌ستاره‌ای تشکیل شده است. یک کهکشان مارپیچی میله‌ای است. صفحه کهکشان از چهار بازوی بزرگ و دو بازوی کوچک درست شده است. خورشید در



شکل ۲.۹: رده بندی کهکشان‌ها - هابل ۱۹۲۶.

بازوی کوچک اُریون (Orion) به فاصله ۸ کیلوپارسک از مرکز کهکشان و ۶ پارسک بالای صفحه کهکشان جا دارد. قطر کهکشان راه شیری کم و بیش ۳۰ کیلو پارسک و ضخامت آن ۳ کیلوپارسک است. کهکشان راه شیری مانند هر کهکشان مارپیچی دیگر به دور خود می‌چرخد. چرخش آن دیفرانسیلی است. دوره چرخش در جایی که خورشید است ۲۳۰ میلیون سال است.

در وسط کهکشان راه‌شیری برآمدگی کروی بزرگی جا دارد. از انبوهی ستاره تشکیل شده است. باور بر این است که سیاه‌چاله بزرگی با جرم چندین میلیون برابر خورشید در مرکز برآمدگی وجود دارد. راه شیری، افزون بر بازوها و برآمدگی مرکزی، با هاله‌ای کروی با گستردگی چندین برابر قطر خود کهکشان پوشانده شده است. ستاره‌های هاله پیر و جمعیت II هستند. به صورت پراکنده توده‌هایی از گاز و غبار نخستین نیز در هاله دیده می‌شود. ستاره‌های جمعیت I جوان هستند و گاز و غبار در بازوها و در برآمدگی مرکزی جا دارند. باور بر این است که کهکشان نخستین توده گازی کروی بزرگی بوده است. پس از



شکل ۳۰۹: تصویر بازسازی شده از راه شیری.

تشکیل ستاره‌های نخستین از گاز نخستین تهی از عنصرهای سنگین، گاز باقی‌مانده در زیر گرانش خود فشرده شده و صفحه و برآمدگی مرکزی کهکشان را تشکیل داده است. این گاز مقداری از خاکستر ستاره‌های پیر پیشین را که عنصرهای سنگین ساخته بودند به ستاره‌های نسل بعدی بازوها و برآمدگی مرکزی داده است.

پخشیدگی ستاره‌ها در بازوها و هاله کهکشان همگن نیست. خوشه‌های ستاره‌ای فراوانی با چند ده تا چند ده میلیون ستاره در آن دیده می‌شوند. برخی از این خوشه‌ها شکل کروی به خود گرفته‌اند و به همین نام شناخته می‌شوند. خوشه‌های ستاره‌ای کروی بیشتر در هاله کهکشان جا دارند و جمعیت II هستند. خوشه‌های کوچک‌تر بیشتر در صفحه کهکشان، در بازوها و در برآمدگی مرکزی راه شیری‌اند. جوان و جمعیت I هستند، شکل منظمی ندارند، و به نام خوشه‌های کهکشانی (به این معنا که در صفحه کهکشان راه شیری‌اند) نامیده می‌شوند.

در ۱۹۹۴ رصد در طول‌موج‌های فروسرخ (۲۰ نانومتر) نشان داد در پشت ابرهای گاز و غبار در صورت فلکی قوس (Sagittarius) و در آن سوی برآمدگی مرکزی راه شیری

(نسبت به زمین) یک کهکشان کوتوله بیضی‌گون در درون راه شیری پنهان شده است [۹]. گستردگی آن ۱۰ هزار سال نوری برآورد شده است. دور راه شیری در مداری عمود بر صفحه کهکشان و به شعاع ۵۰ هزار سال نوری می‌چرخد. ستاره‌هایش جمعیت II اند و گاز و غباری در آن دیده نمی‌شود. کهکشان راه شیری را چند دور زده، و هر بار تعدادی از ستاره‌های خود را در پشت سر جا گذاشته است. این کهکشان کوتوله بیضی‌گون SagDEG نام گرفته است. چنین به نظر می‌رسد در گذشته‌های دور توسط راه شیری بلعیده شده و کم کم در راه شیری تحلیل می‌رود.

در ۲۰۰۳ در صورت آسمانی کلب اکبر کهکشان کوتوله دیگری آشکار شد [۱۳]. این کوتوله بی‌نظم به فاصله ۴۲ هزار سال نوری از مرکز راه شیری است. شمار زیادی غول سرخ در آن دیده می‌شود. نام (Canis Majoris Dwarf (CMaD به خود گرفته است. گفته می‌شود CMaD نیز کهکشانی بیرون از راه شیری بوده و در گذشته‌های دور توسط راه شیری بلعیده شده است.

۲.۲.۹ همسایگان راه شیری

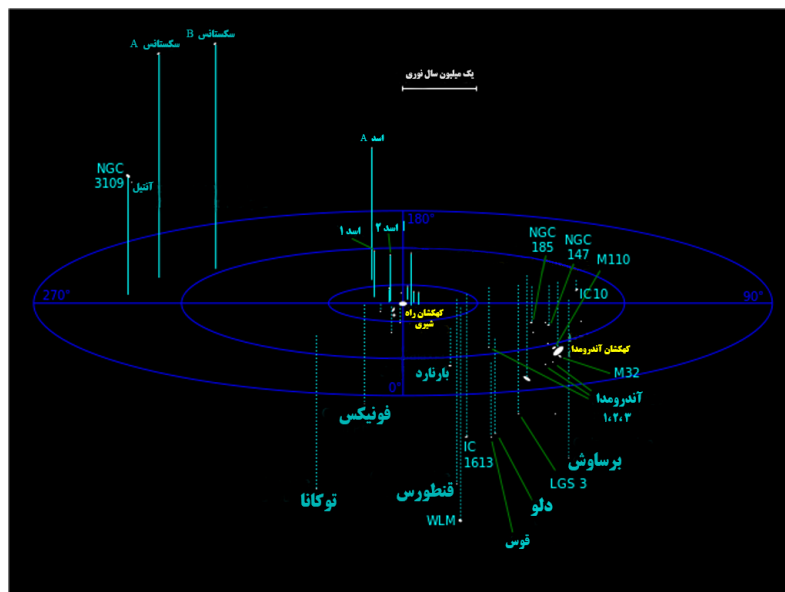
پیش‌تر گفته شد در درون راه شیری دو کهکشان کوتوله، یکی بیضی‌گون و دیگری بی‌نظم، وجود دارد که در گذشته‌های دور توسط راه شیری بلعیده شده‌اند. به جز این‌ها دو مجموعه ستاره‌ای بزرگ به نام ابرهای ماژلان بزرگ و کوچک پای‌بند گرانش راه شیری‌اند. ابرهای ماژلان را می‌توان کهکشان‌های بی‌نظم دانست. ماژلان‌های بزرگ و کوچک به ترتیب در فاصله‌های ۴۸ و ۵۸ کیلوپارسک از ما قرار دارند. قدر ظاهری آن‌ها ۰/۸۶ و ۲/۸۶ است. به جز این‌ها، در حال حاضر می‌توان از ۲۰ - ۳۰ مجموعه ستاره‌ای کوتوله نام برد که در میدان گرانش راه شیری‌اند و می‌توان انتظار داشت در سال‌های نه چندان دور، با تحلیل داده‌های تلسکوپ‌های فضایی و مگاتلسکوپ‌ها، تعداد بیشتری به اقمار راه شیری افزوده شود.

نزدیک‌ترین همسایه هم‌تراز راه شیری و کمی بزرگ‌تر از راه شیری کهکشان مارپیچی امرأة‌المسلسله (آندرومدا، بانوی پای در زنجیر) است. در فاصله ۷۸۰ کیلوپارسک از زمین قرار دارد. قدر ظاهری و مطلق آن به ترتیب ۳/۴۴ و -۲۱/۵ است. با چشم برهنه به صورت لکه‌ای در آسمان دیده می‌شود و در سده چهارم هجری قمری در صورالکواکب عبدالرحمن

صوفی رازی گزارش شده است. آندرومدا مانند راه شیری اقمار بزرگ و کوچک فراوان دارد.

گروه کهکشان‌های محلی

به جز راه شیری و آندرومدا، در گستره‌ای به بزرگی ۳/۱ مگاپارسک، در حال حاضر ۵۴ کهکشان دیگر که بیشتر آن‌ها کوتوله‌های بی‌نظم و بیضی‌گون‌اند، دیده می‌شوند. این مجموعه را گروه کهکشان‌های محلی می‌نامند. اعضای گروه محلی در میدان گرانش هم‌دیگر هستند و «ویریالی» شده‌اند (به تعادل دینامیکی رسیده‌اند و قضیه ویریال در آن‌ها صدق می‌کند): دو برابر انرژی جنبشی + انرژی پتانسیل = ۰.



شکل ۴۰۹: گروه کهکشان‌های محلی. اعضای گروه در میدان گرانش هم‌دیگر هستند و کم و بیش «ویریالی» شده‌اند.

۳.۲.۹ خوشه‌ها و ابرخوشه‌های کهکشان‌ها

تذکر: مراد از خوشه کهکشان‌ها مجموعه‌ای از کهکشان‌های نزدیک به هم است. با خوشه‌های کهکشانی یکی گرفته نشود که پیش‌تر تعریف شد و منظور از آن‌ها مجموعه‌ای از ستاره‌های نزدیک به هم در صفحه کهکشان راه شیری است.

در کیهان بزرگ به نظر می‌رسد جمع شدن کهکشان‌ها در خوشه‌ها، سپس جمع شدن خوشه‌ها در ابرخوشه‌ها و هنوز جمع شدن ابرخوشه‌ها در ساختارهای بزرگ‌تر، مانند دیواره‌ها، قاعده است. در صورت آسمانی سنبله (Virgo) ویرگو، نزدیک به پنجاه خوشه کهکشان‌ها در گستره‌ای به بزرگی چندین مگاپارسک گسترده شده‌اند، و ابرخوشه محلی یا ابر خوشه سنبله را تشکیل می‌دهند. بزرگ‌ترین و پرشمارترین عضو آن خوشه ویرگو با ۲۰۰۰ کهکشان در فاصله ۲۰ مگاپارسکی از ماست. کم‌شمارترین عضو آن خوشه فورناکس (Fornax) در صورت آسمانی فورناکس است. ابرخوشه‌های دیگر به ترتیب دوری از ما عبارت‌اند از:

ابر خوشه گیسو Coma شامل دو خوشه کوما و خوشه اسد (Leo)؛

ابر خوشه شجاع (مار باریک) (Hydra) که شامل خوشه‌های هایدرا و آنتیل (Antila)؛

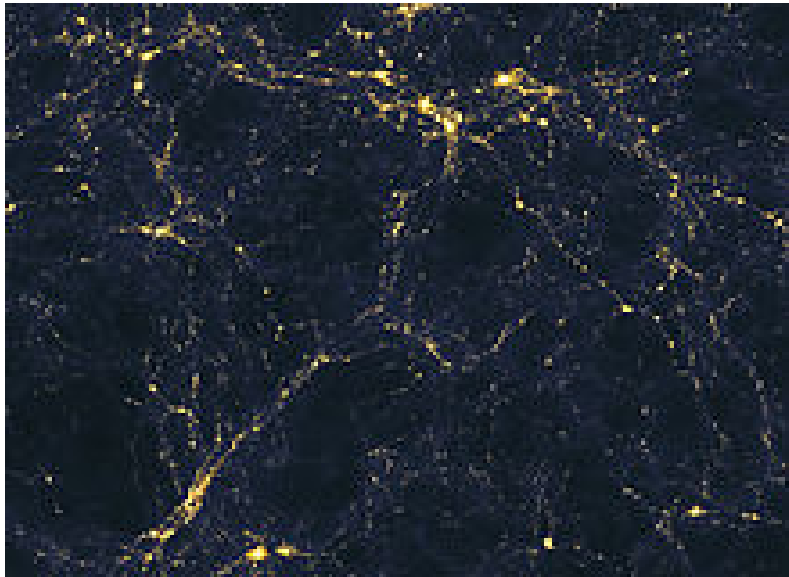
ابر خوشه قنطورس (Centaurus)، آبل (۳۵۲۶)؛

ابر خوشه برساووش-حوت (Perseus-Pices). این ابرخوشه دیواری از خوشه‌ها به طول ۹۰ مگاپارسک است. بزرگ‌ترین عضو این دیواره، خوشه برساووش (آبل ۴۲۶) است که در انتهای دیواره در فاصله ۱۵۰ مگاپارسک از ما جا گرفته است.

۴.۲.۹ تهی‌جاها، رشته‌ها، گره‌ها و دیواره‌ها - ساختار اسفنجی کیهان

در کیهان بزرگ، خوشه‌ها و ابرخوشه‌ها پخش همگن ندارند. گستره‌های بزرگی از کیهان ممکن است تهی از کهکشان‌ها و خوشه‌ها باشد. تهی‌جای ثور (Taurus) با اندازه ۳۰ مگاپارسک کم و بیش کروی است. دیواره آن را کهکشان‌ها و خوشه‌ها تشکیل می‌دهند، و ابرخوشه برساووش بخشی از این دیواره است. تهی‌جاها اندازه‌هایی میان ۱۰ - ۱۰۰ مگاپارسک دارند. چگالی ماده در آن‌ها چندین برابر کم‌تر از چگالی میانگین کیهان است. با همه تأکیدی که در بالا بر جمع شدن ستاره‌ها در کهکشان‌ها و کهکشان‌ها در خوشه‌ها و ابرخوشه‌ها گذاشته شد، ساختار کیهان در مقیاس صدها میلیارد پارسک همگن به نظر می‌رسد. به اسفنجی می‌ماند که کهکشان‌ها و خوشه‌ها دیواره‌های حباب‌های آن را تشکیل

می‌دهند. در عین حال اسفنج در مقیاس بزرگ‌تر از اندازه حباب‌ها همگن است.



شکل ۵.۹: ساختار اسفنجی کیهان. اسفنج در بزرگ مقیاس همگن است.

۳.۹ ماده تاریک - قاعده تالی-فیشر

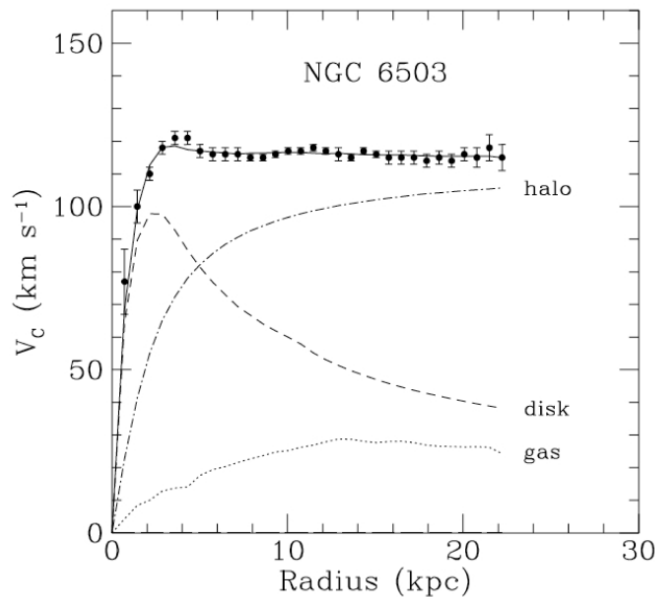
در فاصله‌های به قدر کافی دور از مرکز هر کهکشان انتظار می‌رود کهکشان به صورت یک توده کروی دیده شود و پتانسیل گرانشی آن به تقریب نیوتنی باشد، $-GM/r$. بنابراین اگر توده گاز یا ستاره‌ای در دور دست‌های کهکشان باشد، انتظار می‌رود سرعت چرخش آن دور کهکشان از رابطه زیر پیروی کند:

$$v^2(r) \rightarrow GM/r.$$

رصدهای نجومی چنین چیزی را نشان نمی‌دهند. منحنی سرعت ستاره‌ها و ابرهای هیدروژن در فاصله‌های دور از مرکز کهکشان‌های مارپیچی به نظر می‌رسد،

$$1. \quad v^2(r) \text{ مجانب افقی دارد،}$$

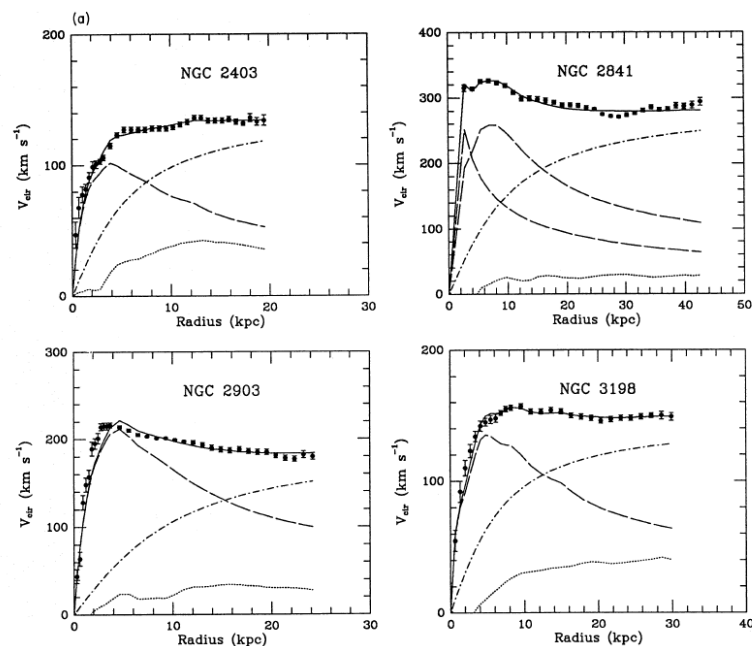
۲. اندازه مجانب متناسب با $\sqrt{GM}$ است: $v^2 \rightarrow v_\infty^2 \propto \sqrt{GM}$.



شکل ۶.۹: سرعت دوران ستاره‌ها و ابرهای هیدروژن دور کهکشان مارپیچی NGC 6503. اندازه‌گیری‌ها همراه با خطای رصدی آن‌ها با دایره برای ستاره‌ها، و مربع برای ابرهای هیدروژن نموده شده‌اند. منحنی خط‌پر نمودار کم‌ترین انحراف مربعی است که از نقطه‌های رصدی گذرانده شده است. منحنی خط‌چین و نقطه‌چین به ترتیب سهم ستاره‌های صفحه کهکشان و ابرهای گاز و غبار موجود در کهکشان در تامین سرعت دورانند. منحنی خط-نقطه‌چین سهم گم شده عامل ناشناخته‌ایست که باید به مجموع دو منحنی خط‌چین و نقطه‌چین افزوده شود تا منحنی سیاه رصدی به دست آید. برگرفته از [۱۸].

این دو یافته به نام قاعده تالی-فیشر شناخته می‌شوند. از قاعده تالی-فیشر نتیجه می‌شود گرانش نیوتنی ماده باریونی کهکشان (ماده موجود در ستاره‌ها و ابرهای گاز و غبار) ضعیف‌تر از آن است که دینامیک کهکشان‌ها را توجیه کند. به گرانش قوی‌تری نیاز است. دو رهیافت پیشنهاد شده است:

۱. چیزی به نام ماده تاریک، هم‌زاد با ماده باریونی، در درون و بیرون کهکشان‌ها وجود دارد و گرانش مورد نیاز را تامین می‌کند. با این تعریف اندرکنش ماده تاریک با ماده باریونی گرانشی است. ماده تاریک تا به امروز دیده نشده است. باید نتیجه



شکل ۳.۹: منحنی سرعت دوران ستاره‌ها و ابرهای هیدروژن در چند کهکشان مارپیچی. برگرفته از [۱۸].

گرفت ماده تاریک اندرکنش الکترومغناطیسی با خود و ماده باریونی ندارد. در غیر این صورت، با تکنیک‌های رصدی دقیقی که امروزه معمول است، قاعدتا باید دیده می‌شد.

۲. قانون‌های گرانش نیوتنی و انیشتنی در مقیاس کهکشان‌ها دقیق نیست و به یک گرانش جای‌گزین نیاز است.

داستان هرچه باشد، باید قاعده‌ای بر گرانش گم‌شده فرضی یا ماده دیده نشده تاریک فرضی حاکم باشد، و بتوان گرانش افزون بر نیوتنی یا انیشتنی را به طور قاعده‌مند به دست آورد. ولی اگر چنین قاعده‌ای در دست باشد همان را می‌توان ماده تاریک یا دست‌کاری در قانون‌های گرانش نامید، و هر دو نظر را یکی ولی به دو زبان متفاوت دانست.

۴.۹ دوری و دوری سنجی در اندازه های کیهانی

دوری میانگین زمین از خورشید $149\ 598\ 000$ کیلومتر است. ستاره شناسان آن را یک واحد نجومی گفته اند و برای سنجیدن دوری ها در منظومه خورشیدی و ماندهای آن به کار می برند. ولی دوری ها در اندازه های راه شیری، و بیرون از راه شیری را چه گونه می سنجند؟ بسته به بزرگی دوری مورد نظر، چند تکنیک دوری سنجی در زیر بررسی می شود.

۱.۴.۹ اختلاف منظر

مثال: اگر دو ناظر در روی زمین به فاصله چند هزار کیلومتر از هم دیگر، از بخشی از آسمان شب که ناهید در آن است، عکس بگیرند و عکس های خود را روی هم بگذارند، ناهید در میان ستارگان جابه جا دیده خواهد شد. این جابه جایی را اختلاف منظر (Parallax) ناهید که از دو جای مختلف رصد شده است می گویند. می توان آن را با زاویه α برحسب رادیان سنجید و با داشتن دوری D دو راصد، دوری d ناهید از زمین را چنین نوشت:

$$d = \frac{D}{\sin \alpha} \approx \frac{D}{\alpha(\text{radian})} \quad (1.9)$$

تلسکوپ های امروزی می توانند اختلاف منظرها را با دقت صدم ثانیه و بهتر اندازه بگیرند (ماهواره گایا (Gaia) هم اکنون قدرت تفکیک چند میلیونوم ثانیه دارد). قطر زمین نیز کم و بیش ۱۳ هزار کیلومتر است. می توان اختلاف منظرهای ماه، ناهید و بهرام را با تلسکوپ هایی که چند هزار کیلومتر از هم دورند رصد کرد و دوری آن ها را با دقت های چندصد متر اندازه گرفت. سپس فاصله های سیاره های دورتر را با مثلث بندی در منظومه خورشیدی به دست آورد.

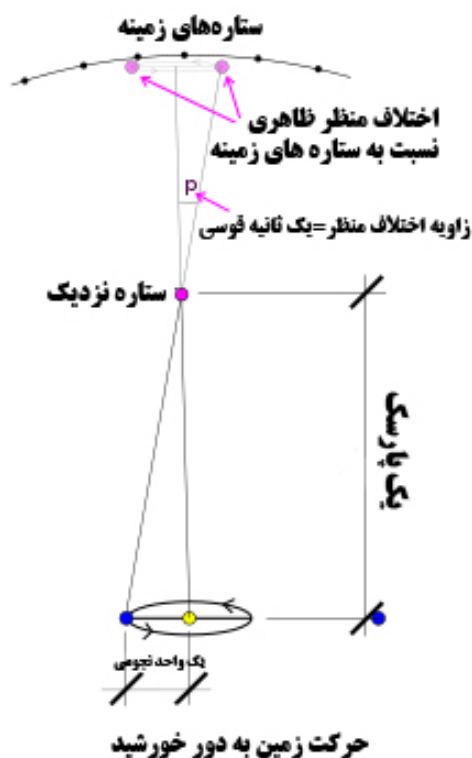
البته امروزه با داشتن تکنولوژی های رادار و لیزر دوری یابی در منظومه خورشیدی بسیار آسان تر و دقیق تر انجام می گیرد. می توان موج رادار به تیر و بهرام و حتی به قمرهای کیوان و برجیس فرستاد، زمان رفت و برگشت آن را اندازه گرفت و دوری را با دقت کیلومتر و بهتر به دست آورد. می توان باریکه لیزر به ماه تاباند و برگرداند و دوری از نقطه برگشت را با دقت چند ده سانتی متر اندازه گرفت.

در دوری های میان ستاره ای، رادار و لیزر کارایی ندارند. ولی تکنیک اختلاف منظر با گزیدن دوری زمین تا خورشید به عنوان پایه کارگشاست. زمین هر شش ماه نیمی از مدار

خود دور خورشید را می‌پیماید و دو واحد نجومی جابه‌جا می‌شود. اگر ستاره خیلی دور نباشد، رصد آن به فاصله‌های زمانی شش ماهه نسبت به ستاره‌های دورتر اختلاف منظر نشان خواهد داد. اگر اختلاف منظر ستاره در آسمان به فاصله زمانی شش ماهه را به ثانیه کمانی بسنجیم و آن را با 2α نشان دهیم فاصله ستاره تا ما به شرح زیر خواهد بود:

$$d(\text{parsec}) = \frac{1 \text{ au}}{\alpha''}.$$

تلسکوپ‌های امروزی زاویه‌ها را با تفکیک صدم ثانیه و بهتر اندازه می‌گیرند. بنابراین



شکل ۸.۹: به فاصله هر شش ماه زمین نیم دور دور خورشید می‌گردد و دو واحد نجومی در آسمان جابه‌جا می‌شود. به سبب این جابه‌جایی ستارگان، بسته به دوری و نزدیکی‌شان از خورشید اختلاف منظر پیدا می‌کنند.

با اندازه‌گیری اختلاف منظر ستاره‌ها می‌توان فاصله‌های چندصد پارسک و بیشتر را اندازه گرفت و بخش بزرگی از کهکشان را در همسایگی خورشید بررسی کرد. ولی اندازه‌های راه

شیری از مرتبه صد هزار پارسک است. به تکنیک دیگری برای دوری‌یابی نیاز است.

۲.۴.۹ قدر ظاهری و قدر مطلق - مدول فاصله

ستاره‌شناسان قدرهای ظاهری و مطلق روشنان آسمانی را با استفاده از لگاریتم میزان درخشندگی که از آن‌ها دریافت می‌کنند، می‌سنجند. این درخشندگی با درخشندگی ذاتی (Luminosity, L) روشن آسمانی و نیز با وارون توان دوم دوری آن، d^2 ، از رصدکننده متناسب است. قدر ظاهری m چنین تعریف می‌شود:

$$m = -2.5 \log_{10} \frac{L}{d^2 (\text{pc})}, \quad 2.5 \approx 100^{1/5}.$$

ضریب ۲/۵، قرارداد است و تقریباً برابر با ریشه پنجم ۱۰۰ است. اگر روشن آسمانی در فاصله ۱۰ پارسک فرض شود عددی را که از فرمول بالا به دست می‌آید را قدر مطلق می‌گویند.

$$M = -2.5 \log_{10} \frac{L}{10^2 (\text{pc})}$$

برابر این تعریف‌ها از دو روشن آسمانی که یک قدر باهم تفاوت دارند، روشن پرسوتر $\sqrt[5]{100} \approx 2.512$ برابر روشن‌تر از روشن کم‌سوتر خواهد بود.

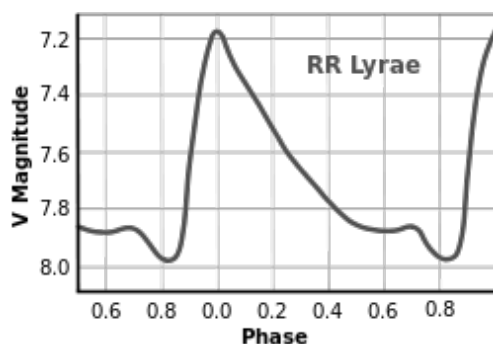
تفاوت $m - M$ را مدول فاصله می‌گویند. با داشتن آن می‌توان فاصله روشنان آسمانی را تا رصدکننده به دست آورد:

$$m - M = 5 \log_{10} d - 5, \quad d(\text{pc}) = 10^{(m-M+5)/5}.$$

با یاری این فرمول می‌توان فاصله‌های دور و نزدیک کهکشانی و میان‌کهکشانی را اندازه گرفت. به طور مثال اگر قدر مطلق کهکشانی ۲۱- باشد و تلسکوپ ده متری کِک (Keck) قدر ظاهری آن را ۲۴+ اندازه بگیرد. فاصله آن تا ما چنین خواهد بود:

$$d = 10^{(24+21+5)/5} = 10^{10} \text{pc} = 10 \text{Gpc}.$$

ولی قدر کدام روشن آسمانی را می‌دانیم که بتوانیم با رصد قدر ظاهری آن، دوری‌اش را حساب کنیم؟



شکل ۹.۹: منحنی تغییر درخشندگی آر آر لیری.

۳.۴.۹ متغیرهای قیفاووسی و آر آر لیری

ستاره‌های قیفاووسی (Cepheids) دارای قدر مطلق روشن هستند، ۱- تا ۶- قدر. درخشندگی آن‌ها به طور منظم تغییر می‌کند، نیم الی یک قدر. دوره تناوب تغییرات آن‌ها از چند روز تا چند ماه است. هر اندازه دوره تناوب تغییرات بلندتر باشد قدر مطلق ستاره نیز پرسوتر است. رابطه دقیقی بین درخشندگی ذاتی ستاره و دوره تغییرات برقرار است.

قیفاووسی‌ها چندین برابر پرجرم‌تر و چند ده برابر درخشان‌تر از خورشیدند. غول و ابر غول‌اند. از دوردست‌ها دیده می‌شوند و قدرظاهری و دوره تغییرات آن‌ها رصد شدنی است. با داشتن دوره تغییرات روشنایی ستاره، قدر مطلق آن را می‌توان از رابطه درخشندگی و دوره تغییرات به دست آورد و به مدول فاصله دست یافت. با یاری قیفاووسی‌ها می‌توان فاصله‌های چند میلیون پارسک را اندازه گرفت. کشف رابطه درخشندگی و دوره تغییرات قیفاووسی‌ها در دهه ۱۹۱۰ و کالیبره شدن آن در دهه ۱۹۲۰ داستان دلکشی در تاریخ اخترفیزیک است. آخرین کالیبراسیون را ناسا در ۲۰۰۸ انجام داده است.

ستاره‌های آر آر لیری (RR Lyrae) نیز مانند قیفاووسی‌ها تغییر روشنایی منظم دارند. جز این که دوره تغییرات آن‌ها از دو سه ساعت تا روز است. قدر مطلق‌شان نیز از قیفاووسی‌ها کم‌سوتر و در دور و بر صفر است. با یاری قیفاووسی‌ها و آر آر لیری‌ها می‌توان به فاصله‌های چند میلیون و چندصد میلیون پارسک دست یافت.

۴.۴.۹ نواختران و ابرنواختران

برای دستیابی به فاصله‌های میلیارد و چند میلیارد پارسک به روشنایی هنوز پرسوتتری نیاز است. گروهی از ستارگان بسته به جرم و ترکیب شیمیایی که دارند در پایان عمر خود منفجر می‌شوند و در یک بازه زمانی چند روزه به اندازه چند میلیون ستاره (نواختران) تا چند صد میلیون ستاره (ابرنواختران) می‌درخشند. برآورد شده در کهکشان‌هایی مانند راه شیری و آندرومدا در هر ده سال چند نواختر و در هر صدسال یک ابر نواختر ظاهر می‌شود. قدر مطلق نواختران و ابرنواختران را می‌توان از آمارهای رصدی یک صد ساله موجود تخمین زد. با یاری این آمار کالیبره‌شده و رصد قدر یک نواختر یا ابرنواختر تازه پیداشده می‌توان به فاصله‌های چند مگاپارسک دست یافت.

۵.۴.۹ انبساط کیهانی

جابه‌جایی دپلر (Doppler): برابر قانون‌های الکترومغناطیس اگر چشمه نور و آشکارساز آن از هم و به هم دور و نزدیک شوند طول‌موج λ یا بسامد ν نوری که در آشکارساز دریافت می‌شود با طول‌موج λ_0 یا بسامد ν_0 نوری که از چشمه نشر شده است برابر نخواهد بود. تفاوت آن‌ها در سرعت‌های کم، متناسب با سرعت نسبی چشمه و آشکارساز است:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu} \approx \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{v}{c},$$

که در آن v سرعت نسبی چشمه و آشکارساز و c سرعت نور است. z اگر مثبت باشد رنگ نور سرخ‌تر دیده خواهد شد و نشان دور شدن چشمه و آشکارساز از هم‌دیگر است. اگر منفی باشد نور چشمه آبی‌تر و نشان نزدیک شدن چشمه و آشکارساز به هم‌دیگر است. z اندازه‌گیری شده کهکشان‌های دور معمولاً مثبت است. به همین جهت آن را پارامتر سرخیدگی نامیده‌اند. اخترماران با روش‌های بیناب‌نگاری می‌توانند z را با دقت‌های بسیار خوب اندازه بگیرند و سرعت دور و نزدیک شدن چشمه و آشکارساز را، بدون دانستن فاصله آن‌ها به دست آورند. اندازه‌گیری سرخیدگی و بنفشیدگی موج‌های الکترومغناطیسی یکی از پرکاربردترین تکنیک‌ها در پژوهش‌های اخترفیزیکی، از جمله در بررسی انبساط کیهانی است.

قانون هابل

تا سال ۱۹۱۷ سیلفر (Silpher) جابه‌جایی دپلری شماری از کهکشان‌های دور دست را اندازه‌گیری کرده و نتیجه گرفته بود که بسیاری از آن‌ها از هم‌دیگر دور می‌شوند. در ۱۹۲۷ نیز لومتر (Le Maitre) نشان داده بود که گرانش انیشتن می‌تواند مدل کیهان‌شناختی در حال انبساط داشته باشد. دو سال بعد در ۱۹۲۹ هابل سرعت دور شدن کهکشان‌های دور دست را با دوری آن‌ها برابر هم گذاشت و نتیجه گرفت که سرعت دور شدن آن‌ها از ما و در نتیجه از هم‌دیگر متناسب با دوری آن‌ها از ما و از هم‌دیگر است. بستگی سرعت دور شدن و دوری به نام قانون هابل شناخته شده و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$zc = v = H_0 d \quad (2.9)$$

که در آن H_0 ثابت هابل در عصر حاضر نامیده می‌شود ولی ممکن است با زمان کیهانی تغییر کند. اندازه آن از تاریخ پذیرش قانون هابل تا به امروز موضوع بحث‌های جدی بوده است. آخرین و شاید معتبرترین مقدار H_0 که توسط پروژه SDSS (Sloan Digital Sky Survey) اعلام شده چنین است:

$$H_0 = 67.6^{+0.9}_{-0.8} \text{ km/sec/mpc} = 2.2 \times 10^{-20} \text{ sec}^{-1}$$

وارون H_0 بعد زمان دارد. می‌توان آن را مرتبه بزرگی عمر کیهان از مه‌بانگ تا عصر حاضر دانست:

$$\frac{1}{H_0} = 4.5 \times 10^{17} \text{ sec} \approx 1.4 \times 10^{10} \text{ yr.}$$

باور غالب در میان کیهان‌شناسان سده ۲۰ این بود که انبساط عالم ناشی از مه‌بانگ (انفجار بزرگ کیهان اولیه) است. کیهان‌شناسان انتظار داشتند، در نبود هیچ نشانه دیگر، با گذشت زمان انبساط کیهان کند شود. ولی پیدایش ابرنواختر SN97 ۱۹۹۷ این باور را به هم ریخته و به نظر می‌رسد شتاب کیهان تندشونده است. داستان چنین است:

پیش‌تر گفته شد در اندازه‌گیری فاصله‌های دور، از مرتبه چند صد مگاپارسک، می‌توان از ابر نواخترها، که از روشن‌ترین روشن آسمان هستند، یاری گرفت. ولی بسته به این که انبساط کیهان شتاب کند یا تند داشته باشد قدر ظاهری ابرنواختر، به ترتیب، پرسوتر یا کم‌سوتر از آن خواهد بود که در کیهان منبسط شونده بی‌شتاب می‌تواند باشد. ابر نواختر SN۹۷ کم‌سوتر از انتظار بود. کیهان‌شناسان نتیجه گرفتند انبساط کیهان شتابنده است.

نتیجه گرفته شد نیروی گرانش انیشتنی ماده دیده‌شدنی برای توجیه دینامیک کیهان با انبساط شتابنده کافی نیست. عامل دیگری باید در کار باشد. این عامل، به صرافت طبع پژوهش‌گران، به تفاوت انرژی تاریک، مدل Λ CDM، و ... نامیده شده است. در فصل بعد دوباره به این مطلب برخواهیم گشت.

۵.۹ تابش پس‌زمینه کیهانی

در سال ۱۹۶۵ آرنو پنزیاس و روبرت ویلسون در بررسی آسمان در طول موج‌های میکرو (در حدود ۳ میلی‌متر) برحسب تصادف تابش یک‌نواختی از همه سوی آسمان دریافت کردند که با هیچ چشمه موج شناخته شده‌ای ارتباط نداشت. اندازه‌گیری‌ها در طول موج‌های دیگر نشان داد تابش بیناب گرمایی دارد. انگار از جسم سیاهی با دمای چند کلوین نشر می‌شود. پیش‌تر نظریه‌پردازان چنین تابشی را پیش‌بینی کرده بودند و از دهه ۱۹۴۰ پژوهش‌گرانی مانند گامف، آلفر، هرمان، دروشگوئیچ، و نویکف از آن سخن گفته بودند. یافته پنزیاس و ویلسون مهر تایید بر وجود تابش پس‌زمینه کیهانی بود و به شک و تردیدهای احتمالی پایان داد. امروزه تابش پس‌زمینه درکنار انبساط کیهانی، یکی از پایه‌های اصلی کیهان‌شناسی و مدل‌های کیهان‌شناختی است. در ۵۰ - ۶۰ سال گذشته تابش پس‌زمینه به شرح زیر توصیف می‌شود:

- تابش پس‌زمینه کیهانی گرمایی است و دمای $2/72$ کلوین دارد.
- ناهمسان‌گردی یک در صد هزار در تابش پس‌زمینه، برابر با اختلال گرمایی ۱۸ میکروکلوین، قابل اندازه‌گیری است.

فصل ۱۰

کیهان‌شناسی - مدل استاندارد

در فصل ۹ گفته شد تابش پس‌زمینه کیهانی با تقریب بسیار خوبی همسان‌گرد (ایزوتروپ) است. پخش‌شدگی ماده نیز در ستاره‌ها و کهکشان‌ها که از زمین رصد می‌شوند کم و بیش همسان‌گرد به نظر می‌رسد. همسان‌گرد در پخش‌شدگی ماده به این معناست، اگر آسمان را از درون یک مخروط با زاویه کوچک $\Delta\theta$ رصد کنیم و کهکشان‌های دور و نزدیک درون مخروط را بشماریم، این شمار مستقل از امتداد مخروط است.

از سوی دیگر ناظر زمینی نسبت به ناظرهای فرضی دیگری که در هر جای کیهان باشند امتیازی ندارد. بنابراین منطقی است بپذیریم کیهان از هر جا که رصد شود همسان‌گرد دیده خواهد شد. ولی لازمه همسان‌گردی از همه جا همگنی است. بنابراین باید بپذیریم که کیهان بزرگ‌مقیاس از نقطه‌نظر تابش پس‌زمینه و پخش‌شدگی ماده همگن و همسان‌گرد است. البته می‌دانیم که ماده دیده‌شدنی در ستاره‌ها، کهکشان‌ها، خوشه‌های کهکشان‌ها، و حتی در سامانه‌های بزرگ‌تری مانند خوشه‌های کهکشان‌ها و دیواره‌های تهی‌جاها پخش شده است. بنابراین همگنی را باید در اندازه‌های بزرگ چندصد و چندهزار مگاپارسک بپذیریم.

۱.۱۰ اصل کیهان‌شناختی

اصل کیهان‌شناختی ارتقا نتیجه‌گیری بالا، که از رصد آسمان به دست می‌آید، به جایگاه یک اصل است: کیهان بزرگ‌مقیاس از نقطه نظر پخش‌شدگی انرژی و تکانه تابش و ماده،

در همه زمان‌های کیهانی همگن و همسان‌گرد است. واژه زمان کیهانی را به زودی تعریف خواهیم کرد.

مدل کیهان‌شناختی‌ای که بر پایه اصل کیهان‌شناختی ساخته شود، داشته‌های آن گونه‌ای شاره کامل باشد، و از معادله میدان انیشتن پیروی کند، مدل استاندارد نامیده می‌شود. مدل استاندارد الزاما کیهانی که از رصدها می‌شناسیم نیست. ولی می‌تواند روی هم‌رفته تقریب خوبی از آن باشد. مدل استاندارد بعضی شواهد رصدی، مانند تابش پس‌زمینه کیهانی با بیناب جسم سیاه با دمای 2.7 کلون، یا فراوانی شیمیایی 27 درصدی هلیوم در کیهان آغازین را پیش‌بینی می‌کند. از سوی دیگر یافته‌های دیگری مانند انبساط شتابنده کیهان یا تشکیل ساختارها (تشکیل کهکشان‌ها و دیواره‌های تهی‌جاها) با مدل استاندارد هم‌خوانی ندارند. روی هم‌رفته با توجه به اطلاعات رصدی اندکی که از کیهان بزرگ در دست است، نمی‌توان میزان درستی یا نادرستی مدل استاندارد را داوری کرد. شاید بتوان گفت مدل استاندارد نقطه آغاز مناسبی برای بررسی کیهان است و باید منتظر شواهد رصدی بیشتری بود تا راه و چاه را نشان دهند.

۲.۱۰ متریک فریدمان-رابرتسون-واکر

کیهان شناخته شده در حال انبساط است. کیهان استاندارد فرضی را هم در حال انبساط خواهیم دانست. پارامترهای فیزیکی آن، بنا به اصل کیهان‌شناختی، باید نسبت به مکان ثابت به مانند و نسبت به زمان تغییر کنند. متریک فضا-زمان را به صورت زیر بنویسیم:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 d\sigma^2, \quad (1.10)$$

$$d\sigma^2 = B(r)^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.10)$$

که در آن $a(t)$ ضریب انبساط کیهانی و $d\sigma^2$ متریک فضای سه‌بعدی همگن و همسان‌گرد و مستقل از زمان است. همسانگردی $d\sigma^2$ آشکار است. تحت دوران چارچوب مختصات فضای سه‌بعدی از (θ, ϕ) به (θ', ϕ') متریک $d\sigma^2$ ناوردا می‌ماند. برای داشتن همگنی $B(r)$ را بیازماییم. می‌گوییم خمش نرده‌ای ریچی، $R = g_{ij} R^{ij}$ ، تحت چرخش و جابه‌جایی چارچوب مختصات ناورداست. از سوی دیگر در کیهان همگن باید ثابت و مستقل از r

باشد. محاسبه مستقیم برای متریک $d\sigma^2$ می‌دهد:

$$R = \frac{r}{\dot{r}} \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{B} \right) - 1 \right] = -\epsilon k, \Rightarrow B(r) = \frac{1}{1 - kr^2}.$$

که در آن مقدار ثابت R را برای سادگی محاسبه های آینده ϵk - گزیده ایم. متریک معادله (۱.۱۰) سرانجام به صورت زیر در می آید:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right),$$

$$k = -1, 0, +1. \quad (3.10)$$

معادله (۳.۱۰) به نام متریک فریدمان-رابرتسون-واکر شناخته می شود و بن مایه بیشتر مدل های کیهان شناختی از جمله مدل استاندارد است. در معادله (۳.۱۰) می توان $a(t)$ را با بعد مکان، و r و k را بی بعد برگزید. هم چنین می توان مقیاس r را طوری برگزید که $k = -1, 0, +1$ باشد.

۱.۲.۱۰ هندسه فضای سه بعدی فریدمان-رابرتسون-واکر

در نوشتن این بخش از کتاب هابسن استفاده شده است [۸].

- حالت $k = 0$ فضای آشنای سه بعدی تخت اقلیدسی است. جزء خط آن را با تغییر متغیر $r = \chi$ به صورت زیر می نویسیم:

$$a^2 d\sigma^2 = a^2 [d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (4.10)$$

$$0 \leq \chi < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

می توان در این فضا مختصات دکارتی برپا کرد و نوشت:

$$x = a\chi \sin \theta \cos \phi,$$

$$y = a\chi \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = a\chi \cos \theta,$$

$$a^2 d\sigma^2 = a^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), .$$

حجم فضای سه بعدی حجم کره به شعاع a است.

- حالت $k = 1$ فضای سه‌بعدی با خمش مثبت است. جزء خط آن با تغییر متغیر $r = \sin \chi$ چنین می‌شود:

$$a^2 d\sigma^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)].$$

$$0 \leq \chi < \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (5.10)$$

این فضای خمیده را می‌توان در یک فضای چهاربعدی تخت جا داد:

$$\begin{aligned} x &= a \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \\ y &= a \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \\ z &= a \sin \chi \cos \theta, \\ w &= a \cos \chi, \\ w^2 + x^2 + y^2 + z^2 &= a^2. \end{aligned}$$

اندازه کیهان سطح کره چهار بعدی است:

$$\int_0^\pi a d\chi \int_0^\pi a \sin \chi d\theta \int_0^{2\pi} a \sin \chi \sin \theta d\phi = 2\pi^2 a^3(t). \quad (6.10)$$

این حجم محدود است و می‌توان $a(t)$ را شعاع کیهان در زمان کیهانی t نامید.

- حالت $k = -1$ فضای سه‌بعدی با خمش منفی است. با تغییر متغیر $r = \sinh \chi$ می‌توان نوشت:

$$a^2 d\sigma^2 = a^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

$$0 \leq \chi < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (7.10)$$

فضای سه‌بعدی با یک خمش منفی را می‌توان در یک فضای چهاربعدی مینکوسکی مانند جا داد، و آن را سطح سه‌بعدی یک هذلولوی (Hyperboloid) چهاربعدی دانست. برای به دست آوردن رابطه‌های لازم کافی است در فرمول‌های حالت $k = 1$ به جای خطوط

مثلثاتی، تابع‌های هذلولی χ را نوشت:

$$\begin{aligned}x &= a \sinh \chi \sin \theta \cos \phi, \\y &= a \sinh \chi \sin \theta \sin \phi, \\z &= a \sinh \chi \cos \theta, \\w &= a \cosh \chi, \\w^2 - (x^2 + y^2 + z^2) &= a^2.\end{aligned}$$

حجم این فضا بی‌نهایت است.

هر سه حالت را می‌توان در یک‌جا جمع کرد و متریک FRW را به صورت زیر نوشت:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + S^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]. \quad (۸.۱۰)$$

که در آن:

$$\begin{aligned}S(\chi) &= \sin \chi && \text{برای } k = +۱, && 0 \leq \chi \leq \pi, \\S(\chi) &= \chi && \text{برای } k = 0, && 0 \leq \chi \leq ۱, \\S(\chi) &= \sinh \chi && \text{برای } k = -۱, && 0 \leq \chi < +\infty.\end{aligned}$$

ناظرهای بنیادی و زمان کیهانی

به کیهان فرضی همگن و همسان‌گرد و در حال انبساط برگردیم. ناظرهایی را در نظر بگیریم که مختصات ثابت (r, θ, ϕ) دارند. برای آن‌ها $dr = d\theta = d\phi = 0$ و $dt = d\tau$ است. چارسرعت آن‌ها برابر است با:

$$U^\mu = dx^\mu/dt = (c, 0, 0, 0).$$

خط جهانی (World line) همه این ناظرها در صفحه (t, r) موازی با هم و موازی با محور t ها است. چنین ناظرهایی را ناظرهای بنیادی (Fundamental observers) خواهیم نامید. ناظرهای بنیادی نسبت به هم حرکت مختصاتی ندارند. زمان $t = \tau$ را که برای همه ناظرهای بنیادی یک‌سان است «زمان کیهانی» (Cosmological time) خواهیم گفت. ناظرهای بنیادی را در بسیاری از نوشته‌های کیهان‌شناسی Comoving observers هم می‌نامند.

۲.۲.۱۰ چند ویژگی سینماتیک کیهان FRW

سرخیدگی کیهانی

کیهان همگن و همسان‌گرد در حال انبساط است. ناظرهای لخت بنیادی در عین داشتن مختصات ثابت (r, θ, ϕ) در این انبساط کیهانی شرکت می‌کنند. فاصله هر دو ناظر بنیادی، و علی‌الاصول هر جزء طول $a(t)d\sigma$ با گذشت زمان کیهانی بزرگ می‌شود. حال باریکه نوری را در نظر بگیریم که در زمان کیهانی t با طول‌موج λ گسیل شده و در زمان t_0 با طول‌موج λ_0 به ناظر زمینی می‌رسد. λ و λ_0 هر دو طول هستند. نسبت آن‌ها:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a(t_0)}{a(t)} > 1$$

خواهد بود و نور به سرخی می‌گراید. سرخیدگی کیهانی چنین تعریف شده‌است:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1. \quad (9.10)$$

رصدکننده زمینی می‌تواند با اندازه‌گیری سرخیدگی خط‌های بینابی روشن‌ان آسمانی، z را اندازه بگیرد. روشی را که برای به دست آوردن معادله (۹.۱۰) به کار بردیم یک توجیه شهودی است. حق این بود که معادله ژئودزیک باریکه نور را در فضای FRW بنویسیم، چارتکانه آن را به دست آوریم و سپس با استناد به این که مولفه صفر تکانه انرژی است و انرژی نور متناسب با فرکانس آن است به معادله (۹.۱۰) برسیم.

پارامتر هابل و پارامتر شتاب کیهانی

زمان کیهانی ناظر زمینی را t_0 بنامیم. ضریب انبساط $a(t)$ در زمان گذشته $t < t_0$ را حول t_0 بسط دهیم:

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_0) - \dot{a}(t_0)(t_0 - t) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t_0 - t)^2 - \dots, \\ &= a(t_0)[1 - H(t_0)(t_0 - t) - \frac{1}{2}q(t_0)H^2(t_0)(t_0 - t)^2 - \dots]. \end{aligned} \quad (10.10)$$

که در آن:

$$H(t) = +\dot{a}(t)/a(t), \quad \text{پارامتر هابل}, \quad (11.10)$$

$$q(t) = -a(t)\ddot{a}(t)/\dot{a}^2(t), \quad \text{پارامتر شتاب}. \quad (12.10)$$

علامت منفی در تعریف q ریشه تاریخی دارد. کیهان‌شناسان سده ۲۰ می‌پنداشتند انبساط کیهان پس از مه‌بانگ باید کندشونده باشد و پارامتر شتاب را با علامت منفی تعریف کردند. ولی پس از رصد ابرنواختر $SN97$ در ۱۹۹۷ معلوم شد که چنین نیست و انبساط شتابنده است. با جای‌گذاری معادله (۱۰.۱۰) در معادله (۹.۱۰) و بسط آن به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} 1+z &= [1 - H_0(t-t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t-t_0)^2 + \dots]^{-1} \\ &= 1 + H_0(t-t_0) + \frac{1}{2}(1+q_0)H_0^2(t-t_0)^2. \end{aligned}$$

اگر $t_0 - t \ll t_0$ باشد، می‌توان معادله را وارونه کرد و زمان گذشته را چنین نوشت:

$$(t_0 - t) = \frac{z}{H_0} [1 - (1 + \frac{1}{2}q_0)z + \dots]. \quad (13.10)$$

با داشتن معادله (۱۳.۱۰) و رصد z یک روشن آسمانی، می‌توان زمانی را نور روشن آسمانی در راه بوده است حساب کرد.

پارامتر χ در جزء خط معادله (۵.۱۰) می‌تواند معیار فاصله یک روشن آسمانی از راصد زمینی باشد. برای علامت نورانی‌ای که در امتداد χ به ناظر زمینی می‌رسد و برایش $d\theta = d\phi = 0$ خواهیم داشت:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 d\chi^2 = 0$$

و خواهیم نوشت:

$$\begin{aligned} \chi &= \int_{\chi(t)}^{\chi(t_0)} d\chi = \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} \\ &= \frac{c}{a_0} \int_t^{t_0} [1 + (t_0 - t)H_0 + (t_0 - t)^2 H_0^2 (1 + \frac{1}{2}q_0)] dt \\ &= \frac{c}{a_0} [-(t_0 - t) + \frac{1}{2}(t_0 - t)^2 H_0 + \dots] \\ &= \frac{c}{a_0 H_0} [z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \dots]. \quad (14.10) \end{aligned}$$

در معادله‌های (۱۳.۱۰) و (۱۴.۱۰)، $(t_0 - t)$ زمان رسیدن نور از روشن آسمانی به راصد زمینی، و $\int dx$ فاصله روشن آسمانی از راصد زمینی است. برای دانستن آن‌ها، اندازه‌گیری z و q_0 با روش طیف‌سنجی کافی است و نیازی به دانستن تاریخ تحول $a(t)$ نیست. معادله (۱۴.۱۰) صورت دقیق‌تری از قانون انبساط هابل است. اگر سرخیدگی کیهانی را سرخیدگی دپلری تعبیر کنیم و بگوییم نور از چشمه‌ای که از ما دور می‌شود گسیل شده است، می‌توانیم در سرعت‌های کم، بنویسیم $z = v/c$. از سوی دیگر فاصله چشمه گسیل‌کننده از ما، $d = a_0 \chi$ است. با جای‌گذاری این دو مقدار در معادله (۱۴.۱۰) به دست می‌آوریم:

$$v = H_0 d \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(1 + q_0)z}.$$

این معادله بدون کسر طرف راست قانون شناخته شده هابل است. نقش کسر تصحیح قانون هابل به خاطر شتاب کیهانی است.

چند فرمول سودمند: از معادله (۹.۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} 1 + z &= \frac{a_0}{a}, \quad dz = -\frac{a_0 \dot{a}}{a^2} dt, \\ t_0 - t &= \int_t^{t_0} dt = \int_0^z \frac{dz}{(1+z)H(z)}, \\ \chi &= \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, \\ H &= \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} \frac{da}{dz} \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{(1+z)} \left(\frac{dt}{dz} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

این معادله‌ها تا به این‌جا بدون تقریب‌اند. با جای‌گذاری $(dt/dz)^{-1}$ از معادله (۱۳.۱۰) و گسترش آن تا مرتبه اول z به دست می‌آید:

$$H(z) = H_0 [1 + (1 + q_0)z + \dots] \quad (15.10)$$

۳.۲.۱۰ دوری‌سنجی در کیهان فریدمان-رابرتسون-واکر

بنا به معادله (۸.۱۰) دوری مختصاتی از مبدأ مختصات چنین است:

$$d_{coord} = a(t)\chi = \frac{a_0}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')}. \quad (16.10)$$

ولی رصدکننده زمینی این دوری را رصد نمی‌کند. او دو راه در پیش دارد:

۳.۱۰. دینامیک کیهان فریدمان-رابرتسون-واکر ۱۶۷

۱. اگر روشنائی ذاتی روشن آسمانی را می‌داند و شار نور دریافتی را می‌تواند نورسنجی کند، دوری مبتنی بر روشنائی، d_L را از رابطه:

$$Flux = Luminosity / 4\pi d_L^2$$

حساب می‌کند. می‌توان نشان داد:

$$d_L = a_0 S(\chi)(1+z). \quad (17.10)$$

۲. اگر قطر فیزیکی D روشن آسمانی را می‌تواند تخمین بزند (مثلاً یک کهکشان مارپیچی در اندازه آندرومدا) و قطر زاویه‌ای، $\Delta\theta$ ، آن را اندازه بگیرد، دوری مبتنی بر قطر ظاهری، d_A ، را از رابطه:

$$\Delta\theta = D/d_A$$

حساب می‌کند. می‌توان نشان داد:

$$d_A = a_0 S(\chi)/(1+z). \quad (18.10)$$

در هر حال در حد z های کوچک d_L و d_A هر دو به سوی هم و به سوی d_{coord} میل می‌کنند.

۳.۱۰ دینامیک کیهان فریدمان-رابرتسون-واکر

ساختار فضا-زمان را انرژی-تکانه کیهان معین می‌کند و متقابلاً تحول انرژی-تکانه را فضا-زمان رقم می‌زند. این دو از طریق معادله انیشتین به هم مربوط‌اند. داشته‌های رصدکردنی کیهان عبارت‌اند از تابش پس‌زمینه کیهانی و ماده باریونی که در ستاره‌ها و در فضا‌های میان ستاره‌ای و میان‌کهکشانی پخش شده است. ولی تخت بودن منحنی سرعت در کهکشان‌های مارپیچی (یافته تالی-فیشِر، زیربخش ۳.۹) و درست درنیامدن قضیه ویریال در کهکشان‌های بیضی‌گون نشان از کافی نبودن گرانش داشته‌های باریونی و تابشی دارد. اخترفیزیک‌دانان چاره را در این دیده‌اند که چیزی به نام ماده تاریک (به صورت شاره کامل) هم فرض کنند. از سوی دیگر، انبساط شتابنده کیهان، که در دهه پایانی سده ۲۰ از یک در صد هزار ناهمسان‌گردی در تابش پس‌زمینه کیهانی و کم‌سویی ابرنواخترهای Ia نتیجه‌گیری شد، ایجاب کرده است از ناشناخته دیگری به نام انرژی تاریک در مقیاس

کیهانی، سخن به میان آورند. با توجه به این گفته‌ها، فرض خواهیم کرد کیهان دارای انرژی تابشی، ماده باریونی، ماده تاریک، انرژی تاریک، و احیاناً دارای نوترینو و داشته‌های رصد نشده و ناشدنی دیگری است که تا به حال به آن‌ها آگاهی نداریم. فرض خواهیم کرد این داشته‌ها با هم اندرکنش ندارند و هر یک از آن‌ها تانسور انرژی-تکانه خود را دارند و انرژی-تکانه کل برابر مجموع آن‌هاست. بنابراین معادله میدان انیشتن را به صورت زیر خواهیم نوشت:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \sum_i T_{i,\mu\nu}, \quad (19.10)$$

که در آن هر یک از $T_{i,\mu\nu}$ ها یک شاره کامل است:

$$T_{i,\mu\nu} = -p_i g_{\mu\nu} + (p_i/c^2 + \rho_i)U_{i,\mu}U_{i,\nu}, \quad T_{i,\mu\nu}{}^{;\nu} = 0. \quad (20.10)$$

در معادله (۲۰.۱۰)، p_i و ρ_i به ترتیب چگالی و فشار هر آن چیزی است که فرض کردیم کیهان را پر می‌کند. انتظار می‌رود در کیهان همگن و همسان‌گرد فرضی، p_i و ρ_i مستقل از مختصات (r, θ, ϕ) باشند و تنها با زمان تغییر کنند. به عبارت دیگر انتظار می‌رود شاره‌های کیهانی تنها در انبساط کیهانی شرکت کنند، سرعت مختصاتی نسبت به هم نداشته باشند، و چارسرعت شاره $(U_i^\mu = c, 0, 0, 0)$ باشد. معادله پیوستگی شاره‌ها هم، مستقل از هم‌دیگر، در معادله (۲۰.۱۰) دیده می‌شود (یادآور می‌شویم فرض کردیم شاره‌های کیهانی با هم اندرکنش ندارند).

مولفه‌های غیر صفر تانسور ریچی برای متریک معادله (۳.۱۰) چنین‌اند

$$\begin{aligned} R_{tt} &= 3\ddot{a}/c^2 a, \\ R_{rr} &= -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2 k)/(1 - kr^2)c^2, \\ R_{\theta\theta} &= -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2 k)r^2/c^2 = R_{\phi\phi}/\sin^2\theta, \\ R &= +6(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + c^2 k)/c^2 a^2. \end{aligned}$$

با جای‌گذاری مولفه‌های تانسور ریچی و تانسورهای انرژی-تکانه در معادله میدان انیشتن به ظاهر چهار معادله به دست می‌آید. ولی به سبب همسان‌گردی فضای سه‌بعدی و داشته‌های

آن، سه مولفه مکانی میدان با هم برابرند. بنابراین از معادله (۱۹.۱۰) تنها می‌توان دو معادله مستقل، مثلاً مولفه‌های tt و rr ، به دست آورد:

$$tt: \quad 3\ddot{a}/c^2 a = -4\pi G \sum_i (3p_i + \rho_i c^2)/c^4 + \Lambda,$$

$$rr: \quad [a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2 k]/c^2 a^2 = +4\pi G \sum_i (-p_i + \rho_i c^2)/c^4.$$

از جمع و تفریق این دو، دو معادله ساده‌تر زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 = \frac{4\pi}{3}G \sum_i (\rho_i + 3p_i/c^2) \quad (21.10)$$

$$\frac{\dot{a}^2 + c^2 k}{a^2} - \frac{1}{3}\Lambda c^2 = \frac{8\pi}{3}G \sum_i \rho_i. \quad (22.10)$$

از پیوستگی انرژی-تکانه نیز، به خاطر صفر بودن سرعت مختصاتی، تنها مولفه زمانی معنادار است و می‌دهد:

$$\dot{\rho}_i + \left(\rho_i + \frac{p_i}{c^2}\right) \frac{3\dot{a}}{a} = 0. \quad (23.10)$$

ولی چنانچه می‌دانیم پیوستگی مستقل از معادله‌های میدان نیست. می‌توان از معادله (۱۰.۲۲) نسبت به زمان مشتق گرفت و به جای $\ddot{a}$ از معادله (۲۱.۱۰) جای‌گذاری کرد و به معادله (۲۳.۱۰) رسید.

شاره کیهانی ناگزیر از داشتن معادله حالت است که چگالی و فشار شاره را با هم مربوط سازد. کیهان‌شناسان آن را به صورت زیر پذیرفته‌اند:

$$p_i = c^2 \rho_i w_i. \quad (24.10)$$

ثابت‌های w_i را پارامترهای معادله حالت یا به کوتاهی پارامترهای حالت خواهیم نامید. برای آشنایی با معادله حالت، در جدول ۱.۱۰ چند مثال داده شده است.

با جای‌گذاری معادله حالت در معادله (۲۳.۱۰) و نوشتن $\dot{\rho}_i = d\rho_i/da$ به دست می‌آوریم:

$$\frac{\rho_i}{\rho_{i,0}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w_i)}. \quad (25.10)$$

جدول ۱۰.۱: چند مثال از پارامتر حالت.

$w_{dust} = 0$	برای غبار که فشار ندارد
$w_{rad} = \frac{1}{3}$	برای تابش و هر شاره نسبیتی، مانند فوتون‌ها
$0 < w_{gas} < \frac{1}{3}$	برای گاز بسته به درجات آزادی اتم‌ها و مولکول‌ها
$w_{\Lambda} = -1$	ثابت کیهان‌شناختی

جدول ۲۰.۱: چگالی‌های بی‌بعد.

$\Omega_r(t) = \rho_r / \rho_c$	برای تابش
$\Omega_b(t) = \rho_b / \rho_c$	برای ماده باریونی
$\Omega_d(t) = \rho_d / \rho_c$	برای ماده تاریک
$\Omega_m(t) = \Omega_b(t) + \Omega_d(t)$	مجموع باریونی و تاریک
$\Omega_{\Lambda}(t) = \rho_{\Lambda} / \rho_c, \quad \rho_{\Lambda} = \Lambda c^2 / 8\pi G$	برای ثابت کیهان‌شناختی
$\Omega_k(t) = \rho_k / \rho_c = -c^2 k / a^2 H^2$	برای پارامتر خم

که در آن $\rho_{i,0}$ و a_0 ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند و می‌توانند به ترتیب چگالی و اندازه کیهان در زمان حال باشند.

۱۰.۳.۱ چگالی‌های بی‌بعد

عبارت زیر بعد چگالی انرژی دارد و چگالی بحرانی نامیده می‌شود (نام‌گذاری را توضیح خواهیم داد):

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}. \quad (26.10)$$

معمول کیهان‌شناسان است که معادله (۲۲.۱۰) را به چگالی بحرانی بخش کنند و با پارامترهای بی‌بعد سر و کار داشته باشند. برای این منظور نخست فرض کنیم $a(t_0) = 1$ باشد، و $a(t)$ را از این پس پارامتر انبساط کیهانی بهنجار شده بیانگریم. برای هر کدام از چگالی‌ها که پیش‌تر شمردیم، چگالی‌های بی‌بعد را به صورت جدول ۲۰.۱ تعریف کنیم.

جدول ۳.۱۰: پارامترهای رصد شده کیهان، برگرفته از گروه هم‌کاری پلانک، ۲۰۱۵.

$67.74 \pm 0.46 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	H_0	ثابت هابل
$(13.799 \pm 0.021) \times 10^9 \text{ yrs}$	t_0	سن کیهان
$(8.62 \pm 0.12) \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$	$\rho_{crit,0}$	چگالی بحرانی (بابعد)
		چگالی‌های بی بعد:
0.480 ± 0.0010	$\Omega_{b,0}$	چگالی باریونی
0.2589 ± 0.0057	$\Omega_{d,0}$	چگالی ماده تاریک
0.3089 ± 0.0067	$\Omega_{m,0}$	چگالی باریونی+ماده تاریک
0.00005 ± 0.00001	$\Omega_{r,0}$	چگالی تابش پس‌زمینه
0.6911 ± 0.0062	$\Omega_{\Lambda,0}$	چگالی انرژی تاریک
$0.9996 \approx 1$	$\Omega_{tot,0}$	چگالی کل
≈ 0	$\Omega_{k,0}$	چگالی خمش فضا

برحسب این چگالی‌های بی‌بعد، معادله (۲۲.۱۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$\Omega_r + \Omega_b + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k = 1. \quad (27.10)$$

بعضی از چگالی‌های بی‌بعد بالا را می‌توان از رصدهای نجومی به دست آورد:

• $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_d$ را از شمارش ستاره‌ها و کهکشان‌ها، از تختی منحنی سرعت کهکشان‌ها و پیروی نکردن دینامیک کهکشان‌های بیضی‌گون از قضیه ویرال.

• $\Omega_{r,0}$ را از بیناب تابش پس‌زمینه کیهانی.

• $\Omega_{\Lambda,0}$ را از انبساط شتابنده کیهان، با رصد کهکشان‌های بسیار دور با z بالا، ابرنواخترها، و میکرولنزینگ.

قابل قبول‌ترین مقادیر رصدی پارامترهای کیهان را گروه هم‌کاری پلانک در سال ۲۰۱۵ داده است [۲]. جدول ۳.۱۰ کوتاه شده‌ای از داده‌های این گروه است.

تعریف: مدل‌های کیهان‌شناختی که بر پایه متریک FRW ساخته می‌شوند و در کنار ماده باریونی و انرژی تابشی قابل رصد، ماده تاریک سرد (نانبیتی) و انرژی تاریک

نسبیتی (در قالب ثابت کیهان‌شناختی) هم فرض می‌کنند، مدل‌های Λ Cold (Dark Matter نامیده می‌شوند).

دو معادله سودمند که در زیر به آن‌ها نیاز خواهیم داشت:
از معادله‌های (۲۲.۱۰) و (۲۵.۱۰) می‌توان پارامتر هابل را بر حسب پارامتر سرخیدگی نوشت:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 &= H_0^2 (\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} a^{-2}) \quad (28.10) \\ &= H_0^2 [\Omega_{m,0} (1+z)^3 + \Omega_{r,0} (1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} (1+z)^2]. \end{aligned}$$

که در آن $\Omega_{k,0} = 1 - (\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0})$ است.
برای به دست آوردن شتاب انبساط کیهانی، معادله (۲۱.۱۰) را در عبارت $(a/\dot{a})^2 = H^{-2}$ ضرب می‌کنیم و با توجه به معادله (۲۴.۱۰) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} q &= -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} = -\frac{1}{2\rho_c} \sum_i \rho_i (1 + 3w_i) \quad i = m, r, \Lambda \quad (29.10) \\ &= -\frac{1}{2} (\Omega_m + 2\Omega_r + 2\Omega_\Lambda) = -[(\Omega_{m,0} (1+z)^3 + 2\Omega_{r,0} (1+z)^4 + 2\Omega_{\Lambda,0})]. \end{aligned}$$

برابر داده‌های جدول ۲.۹، در حال حاضر باید $q_0 = -0.5036$ باشد.

مسئله تختی مدل‌های Λ CDM

بنابر آن‌چه در جدول ۳.۱۰ آمده،

$$\begin{aligned} \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} &= 1 \pm 0.01, \quad \Omega_{k,0} = \pm 0.01, \\ \rho_{m,0} + \rho_{r,0} + \rho_{\Lambda,0} &= \rho_{crit,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} (1 \pm 0.01). \end{aligned}$$

مجموع چگالی‌های بی‌بعد تابش، ماده باریونی، ماده تاریک، و انرژی تاریک با دقت ± 0.01 برابر با ۱، و مجموع چگالی‌های با بعد برابر با چگالی بحرانی در حال حاضر است. اندازه پارامتر خم، $\Omega_k = \pm 0.01$ در بازه خطاهای رصدی قرار دارد و باید نتیجه گرفت

که کیهان امروزی عملاً تخت است. ولی کیهان زمان‌های گذشته، به ویژه کیهان آغازین، با چه دقتی تخت بوده است؟ در جست‌وجوی پاسخ نخست، از تعریف $\Omega_k(z)$ ، بنویسیم:

$$\Omega_k(z) = -\frac{c^2 k}{H^2(z) a^2(z)} = \frac{H_0^2}{H^2(z)} (1+z)^2.$$

سپس به جای $H^2(z)$ از معادله (۲۸.۱۰) جای‌گذاری کنیم و به دست آوریم:

$$\Omega_k(z) = \frac{\Omega_{k,0}}{\Omega_k(z) [\Omega_{m,0}(1+z) + \Omega_{r,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}(1+z)^{-2} + \Omega_{k,0}]}.$$

در زمان‌های نزدیک به مه‌بانگ انتظار می‌رود سرخیدگی z بسیار بزرگ باشد و جمله درون قلاب در مخرج کسر بالا به بی‌نهایت میل کند (کیهان شناسان، به تفاوت، مقدار آن را از مرتبه $10^6 - 10^4$ تخمین می‌زنند). اگر قرار است در عصر حاضر $\Omega_{k,0}$ مقداری در حول و حوش چند دهم و چند صدم داشته باشد، $\Omega_k(z)$ در آغاز کیهان باید مقداری بسیار کوچک داشته باشد. با کدام ساز و کار این تنظیم ظریف آغازین (Fine tuning) انجام گرفته است و کیهان امروزی تخت مانده است؟

پرسش Fine tuning را نخستین بار دیکی در ۱۹۶۹ مطرح کرده است. مدل‌های استاندارد Λ CDM جوابی برای آن ندارند. چاره‌های زیادی، از جمله مدل‌های تورمی، اندیشیده شده‌اند. ولی تا به امروز پاسخ بسنده‌ای که پذیرش همگانی داشته باشد پیدا نشده است. شاید هم پرسش بی‌مورد است. شاید عاملی که هنوز ناشناخته مانده ایجاب می‌کند فضای سه‌بعدی کیهانی از آغاز تخت ($k=1$) بوده باشد و پرسش دیکی بی‌مورد است.

۲.۳.۱۰ چند حالت حدی

از معادله (۲۸.۱۰) داریم:

$$\dot{a} = \pm H_0 (\Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{r,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0} a^2 + \Omega_{k,0})^{1/2}. \quad (30.10)$$

در این معادله $\Omega_{m,0}$ و $\Omega_{r,0}$ مثبت‌اند. $\Omega_{\Lambda,0}$ و $\Omega_{k,0}$ می‌توانند مثبت، صفر، یا منفی باشند. این‌که $a(t)$ چگونه با زمان تغییر کرده و کیهان چه آغاز و انجामी داشته و خواهد داشت، بستگی به اندازه و علامت این چهار پارامتر دارد. می‌توان انتظار داشت در کیهان آغازین،

$a \rightarrow 0$ ، تنها تابش سیطره داشته باشد، در زمان‌های بعد که a بزرگ می‌شود، به ترتیب، جمله‌های مربوط به ماده، خمش، و ثابت کیهان‌شناختی سیطره بیابند. به طور مثال در دو عصر سیطره تابش و ماده در زمان‌های آغازین کیهان جواب تقریبی معادله (۳۰.۱۰) را می‌توان چنین گمان برد:

$$a(t) \approx \pm (2H_0 t)^{1/2}, \quad \text{عصر سیطره تابش} \quad (31.10)$$

$$a(t) \approx \pm (\frac{2}{3}H_0 t)^{2/3}, \quad \text{عصر سیطره ماده} \quad (32.10)$$

گذشته از این بحث کیفی، در بعضی حالت‌های ویژه می‌توان برای معادله (۳۰.۱۰) جواب‌های تحلیلی به دست آورد. در زیر به چند تا از این جواب‌ها که اهمیت تاریخی دارند، می‌پردازیم.

۳.۳.۱۰ مدل‌های فریدمان

ثابت کیهان‌شناختی در مدل‌های فریدمان صفر گرفته می‌شود ($\Omega_\Lambda = 0$). معادله (۳۰.۱۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$\dot{a} = \pm H_0 (\Omega_{m,0} a^{-1} + \Omega_{r,0} a^{-2} + \Omega_{k,0})^{1/2}, \quad \Omega_{k,0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0}. \quad (33.10)$$

چند جواب ویژه آن چنین‌اند:

۱.

$$k = 0, \quad \Omega_{r,0} = 0, \quad \Omega_{m,0} = 1 : a(t) = \left(\frac{3}{2} H_0 t \right)^{2/3}. \quad (34.10)$$

کیهان حالت ۱ تخت، باز و نامتناهی است.

۲.

$$k = 1, \quad \Omega_{r,0} = 0, \quad \Omega_{m,0} > 1 :$$

$$a(\chi) = \frac{\Omega_{m,0}}{2(\Omega_{m,0} - 1)} (1 - \cos \chi),$$

$$t(\chi) = \frac{\Omega_{m,0}}{2H_0(\Omega_{m,0} - 1)} (\chi - \sin \chi). \quad (35.10)$$

کیهان حالت ۲ خمشی مثبت دارد، متناوب و متناهی است. منحنی $a(t)$ بر حسب زمان سیکلوئید است. زمان تناوب به ازای $\chi = \pi$ برابر است با:

$$T = \pi \Omega_{m,0} / [2H_0(\Omega_{m,0} - 1)].$$

.۳

$$k = -1, \quad \Omega_{r,0} = 0, \quad \Omega_{m,0} < 1 :$$

$$a(\chi) = \frac{\Omega_{m,0}}{2(1 - \Omega_{m,0})} (\cosh \chi - 1),$$

$$t(\chi) = \frac{\Omega_{m,0}}{2H_0(1 - \Omega_{m,0})} (\sinh \chi - \chi). \quad (36.10)$$

کیهان حالت ۳ خمشی منفی دارد و نامتناهی است. هر سه حالت آغاز مهیابگ دارند. برای هر سه حالت می‌توان $\rho_m(t) = \rho_{m,0} a^{-3}$ ، $H(t) = \dot{a}/a$ و Ω_m را به آسانی به دست آورد.

.۴

$$k = 0, \quad \Omega_{r,0} = 1, \quad \Omega_{m,0} = 0 : \quad a(t) = (2H_0 t)^{1/2}. \quad (37.10)$$

.۵

$$k = \pm 1, \quad \Omega_{r,0} \neq 1, \quad \Omega_{m,0} = 0 :$$

$$a(t) = (2H_0 \Omega_{r,0}^{1/2} t)^{1/2} \left(1 + \frac{(1 - \Omega_{r,0})}{2\Omega_{r,0}^{1/2}} H_0 t \right)^{1/2}. \quad (38.10)$$

مدل دوسیت-انیشتن

مدل دوسیت-انیشتن (DeSitter-Einstein)، تخت، بدون تابش و بدون ماده است. جواب معادله (۳۰.۱۰) با توجه به فرض

$$\Omega_\Lambda = 1, \quad \Omega_m = \Omega_r = \Omega_k = 0,$$

چنین است:

$$a(t) = a_0 \exp[\pm H_0(t - t_0)]. \quad H_0 = (\Lambda/3)^{1/2}. \quad (39.10)$$

مدل دوسیه-انیشتن کیهان رصدپذیری را که می‌شناسیم نماینده‌گی نمی‌کند ولی می‌تواند حالت مجانبی برخی از مدل‌های Λ CDM در حد $t \rightarrow \infty$ و $a(t) \rightarrow \infty$ باشد. مدل دوسیه-انیشتن آغاز مهبانگ ندارد.

مدل‌های لومتر

این مدل‌ها بخشی از مدل‌های فریدمان در حضور ثابت کیهان‌شناختی اند. برای حالت‌های گوناگون آن خواننده می‌تواند به [۸] نگاه کند.

۴.۳.۱۰ افق ذره

پذیرفته‌ایم که سرعت نور بالاترین است و نمی‌توان بین رخدادهایی که فاصله زمانی-مکانی آن‌ها مکان‌گونه است $dx^2 < c^2 dt^2$ پیام فرستاد و پیام دریافت کرد. چنین رخدادها نمی‌توانند رابطه علی داشته باشند و از هم‌دیگر اثر بپذیرند. بیشتر مدل‌های کیهان‌شناختی FRW با مهبانگ آغاز می‌شوند. در لحظه $t = 0$ از $a(0) = 0$ آغاز به انبساط می‌کنند. می‌توان پرسید یک ناظر بنیادی در زمان t خود دورترین فاصله‌ای را که می‌تواند رصد کند چه قدر است. اگر با فضا-زمان تخت مینکوسکی سر و کار داشتیم جواب روشن بود، $d = ct$. در کیهان FRW به سبب انبساط، به بیش از این مقدار می‌رسیم. فرض کنیم کهکشانی (ذره‌ای) در فاصله مختصاتی $\chi = \int_0^t dr / (1 - kr^2)^{1/2}$ از ناظری که در مبدأ مختصات است (هر ناظر می‌تواند خود را در مبدأ مختصات بداند)، در زمان t_1 یک پیام نوری بفرستد و ناظر نشسته در مبدأ آن را در زمان t دریافت کند. برابر معادله (۱۴.۱۰) دوری کهکشان از ناظر چنین است:

$$d(t, t_1) = a(t) \int_{t_1}^t c dt' / a(t').$$

دورترین فاصله‌ای را که ناظر می‌تواند رصد کند آغاز کیهان در $t_1 = 0$ است:

$$d_p(t) = a(t)c \int_0^t dt' / a(t'). \quad (40.10)$$

$d_p(t)$ را افق ذره (Particle horizon) برای ناظر نشسته در مبدأ می‌نامند. هر ذره‌ای (کهکشانی) که در درون کره‌ای به شعاع d_p باشد می‌تواند به ناظر مورد نظر پیام بفرستد و

احیانا او را متأثر کند. بی شک در مدل های FRW بخش هایی از کیهان هستند که بیرون از افق $d_p(t)$ قرار می گیرند و نمی توان با آنها اندرکنش داشت.

دشواری افق:

با تعبیری که از افق ذره در کیهان های منبسط شونده شد، مدل استاندارد به ”دشواری“ برمی خورد: برای ناظر زمینی در عصر حاضر، $t_0 = 13/5 \times 10^9 \text{ yr}$ ، افق ذره $d_p(t_0) = 10^{28} \text{ cm}$ است. رصدهای نجومی نشان می دهند، اقلا تابش پس زمینه کیهانی با دقت بسیار خوبی همگن و همسان گرد است. از سوی دیگر همین تابش با گذشت زمان لایه به لایه در افق ناظر پیدا شده است. در زمان های گذشته بخش هایی از آن در افق ناظر نبوده اند و رابطه علی با دور و بر او نداشته اند. دلیلی وجود ندارد تابش پس زمینه ای که امروز می شناسیم چنین همگن و همسان گرد باشد.

دشواری افق در کنار دشواری تختی کیهان، یکی دیگر از ناکارآمدی های مدل استاندارد FRW است. در جست و جوی پاسخ پیش نهادهای زیادی شده است. شناخته شده ترین آنها مدل های تورمی اند. در خوش بینانه ترین حالت باید گفت، مدل های جایگزین مشکل را از جایی به جای دیگر می برند و بعضا، در نبود شواهد رصدی قابل توجه، دشواری های بیشتر می آفرینند.

چند مثال: برای سه حالت حدی معادله های (31.10) ، (32.10) و (39.10) که پیش تر بحث شد، افق ذره به ترتیب، چنین به دست می آیند:

$$\begin{aligned} d_p(t_0) &= 2ct_0, & \text{عصر سیطره تابش} \\ d_p(t_0) &= 3ct_0, & \text{عصر سیطره ماده} \\ d_p(t_0) &= \frac{c}{H_0} \exp(-H_0 t_0), & \text{کیهان دوسیته} \end{aligned}$$

۵.۳.۱۰ افق رخداد

پرسش دیگری می توان کرد. اگر پیام دهنده زمینی، در مختصات $(t_0, r = 0)$ ، یک پیام به بیرون بفرستد، این پیام، صرف نظر از دشواری های فناوری، تا کجاها می تواند برسد؟ به سخن دیگر، ناظر زمینی در زمان های آینده $t > t_0$ تا چه فاصله ای می تواند روی

کیهان اثرگذار باشد؟ در هر حال فاصله زمانی-مکانی پیام‌دهنده و پیام‌گیرنده باید زمان‌گونه بماند. پاسخ چنین است:

$$d_e(t) = a(t) \int_{t_0}^t c dt' / a(t'). \quad (41.10)$$

این معادله همان است که برای افق ذره نوشتیم. تنها جای t و t_0 عوض شده است. برای مدل‌هایی که آغاز مهبانگ دارند و برای همیشه منبسط می‌شوند، t می‌تواند بی‌نهایت باشد و انتگرال نامتناهی شود. در این صورت افق رخداد (Event horizon) در بی‌نهایت خواهد بود. ولی برای مدل‌های بسته و متناوب که زمان بیشینه یا دوره تناوب دارند انتگرال و به تبع آن، افق رخداد کران‌دار می‌ماند. کیهان بسته فریدمان، معادله (۳۵.۱۰)، مثالی از این گونه است.

Bibliography

- [1] B. P. Abbott, R. Abbott, T. Abbott, M. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. Adhikari, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116(6):061102, 2016.
- [2] P. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. Banday, R. Barreiro, J. Bartlett, N. Bartolo, et al. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A13, 2016.
- [3] J. M. Bardeen, W. H. Press, and S. A. Teukolsky. Rotating black holes: locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *The Astrophysical Journal*, 178:347–370, 1972.
- [4] G. M. Clemence. The relativity effect in planetary motions. *Reviews of Modern Physics*, 19(4):361, 1947.
- [5] P. A. Dirac. Quantised singularities in the electromagnetic field. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 133, pages 60–72. The Royal Society, 1931.
- [6] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. A determination of the deflection of light by the sun’s gravitational field, from observations made at the total eclipse of may 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Soci-*

- ety of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 220(571-581):291–333, 1920.
- [7] D. H. Frisch and J. H. Smith. Measurement of the relativistic time dilation using μ -mesons. *American Journal of Physics*, 31(5):342–355, 1963.
- [8] E. G. Hobson, M.R. and A. N. Lanseby. *General relativity, an introduction for physicists*. Cambridge Univ Press, 2006.
- [9] R. Ibata, G. Gilmore, and M. Irwin. A dwarf satellite galaxy in sagittarius. *Nature*, 370(6486):194, 1994.
- [10] J. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998.
- [11] R. P. Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical Review Letters*, 11(5):237, 1963.
- [12] M. D. Kruskal. Maximal extension of schwarzschild metric. *Physical Review*, 119(5):1743, 1960.
- [13] N. F. Martin, R. A. Ibata, M. Bellazzini, M. Irwin, G. Lewis, and W. Dehnen. A dwarf galaxy remnant in canis major: the fossil of an in-plane accretion on to the milky way. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 348(1):12–23, 2004.
- [14] K. A. Milton. Theoretical and experimental status of magnetic monopoles. *Reports on Progress in Physics*, 69(6):1637, 2006.
- [15] R. Penrose and R. Floyd. Extraction of rotational energy from a black hole. *Nature*, 229(6):177–179, 1971.
- [16] R. Pound and G. Rebka Jr. Variation with temperature of the energy of recoil-free gamma rays from solids. *Physical Review Letters*, 4(6):274, 1960.

- [17] B. Rossi and D. B. Hall. Variation of the rate of decay of mesotrons with momentum. *Physical Review*, 59(3):223, 1941.
- [18] R. Sanders and M. Verheijen. Rotation curves of ursa major galaxies in the context of modified newtonian dynamics. *The Astrophysical Journal*, 503(1):97, 1998.
- [19] I. I. Shapiro. Fourth test of general relativity. *Physical Review Letters*, 13(26):789, 1964.
- [20] Y. Sobouti. Lorentz covariance ‘almost’implies electromagnetism and more. *European Journal of Physics*, 36(6):065036, 2015.
- [21] D. Walsh, R. F. Carswell, and R. J. Weymann. 0957+ 561 a, b- twin quasistellar objects or gravitational lens. *Nature*, 279(5712):381–384, 1979.
- [22] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley & Sons, 2004.

نمایه

- آزمون‌های نسبیت عام، ۱۲۵
 آمپر، ۱، ۱۰
 ابوریحان بیرونی، ۱۵۴
 ابوسعید سجزی، ۱۵۴
 اتر، ۲
 اتساع زمان، ۲۹
 اسطربلاب زورقی، ۱۵۴
 اصل هم‌ارزی، ۷۵، ۷۷، ۷۸
 اصل پایداری، ۱۰۷
 انرژی و تکتنه، ۱۰۹
 حد کلاسیک، ۱۱۱
 شمار ذره‌ها، ۱۰۸
 انقباض طول، ۲۸
 انیشتین، ۳، ۴، ۴۹
 تانسور، ۱۰۴
 تقدیم حسیض تیر، ۱۳۱
 حلقه، ۱۳۴، ۱۳۵
 خمش نور، ۱۳۳
 معادله میدان، ۱۲۳، ۱۲۵، ۱۸۸، ۱۹۰
 موج گرانشی، ۱۳۹
 میدان، ۱۳۸
 نسبیت عام، ۷۴
 گرانش، ۷۴، ۱۰۴، ۱۵۱، ۱۶۹
 گرانش غیر خطی، ۱۳۹
 اُتوش، ۷۳
 بسل، ۷۳
 بیه و ساوار، ۱۰
- تبدیل‌های لورنتس، ۲۱، ۲۲، ۲۶، ۴۲
 مولدهای، ۳۹
 ناوردایی فاصله-زمانی، ۲۷
 چرخش‌های مجاری، ۲۶
 چرخش‌های مجازی، ۴۱
 تبدیل‌های پوانکاره و لورنتس، ۳۳
 تقدیم حسیض تیر، ۱۲۶
 ثابت کیهان شناختی، ۱۱۵
 جرم چاندرااسکار، ۱۵۷
 حرکت تقدیمی توماس، ۴۳
 خمش نور در میدان گرانش، ۱۳۱
 خورشید
 اندازه‌ها، ۱۵۶
 منظومه، ۱۵۹
 درنگ در پژواک رادار، ۱۳۵
 دوری سنجی، ۱۷۰
 اختلاف منظر، ۱۷۰
 قانون هابل، ۱۷۵
 قیفاووسی و آزار لایری، ۱۷۳
 مدول فاصله، ۱۷۱
 نواخت و ابرنواخت، ۱۷۴
 دیاگرام هرتسپرانگ - راسل، ۱۵۶
 دیکی، ۷۳
 زمان کیهانی، ۱۸۴
 ستارگان
 اندازه‌ها، ۱۵۶
 بستگی جرم و روشنایی، ۱۵۷

- جمعیت، ۱۵۹
 قیفاووسی و آرآر لایری، ۱۷۳
 نواختر و ابرنواختر، ۱۵۷
 کوتوله سفید، ۱۵۷
 سرخیدگی کیهانی، ۱۸۴
 سرعت نور ثابت جهانی، ۲۲
 شماره کامل، ۱۰۹
 معادله حرکت، ۱۱۱
 شوارتسشیلد، ۱۱۹
 تقدیم حضيض در متریک، ۱۲۸
 تکینه‌گی متریک، ۱۲۰
 سیاه‌چاله، ۱۲۰
 شعاع، ۱۲۰
 متریک، ۱۱۹
 عدسی گرانشی، ۱۳۴
 عضدالدوله، ۱۵۴
 عملگرهای دیفرانسیلی، ۳۸
 فاراده، ۱، ۱۰
 قانون القا، ۱۰
 فضا-زمان مینکوسکی، ۳۱، ۴۲
 فیتزجرالد، ۲۲
 فیزو، ۳
 قاعده تالی فیشر، ۱۶۶
 قانون جمع سرعت‌ها، ۳، ۵۳، ۷۲
 تبدیل‌های لورنتس، ۳۰
 قانون جمع سرعتها
 تبدیل لورنتس، ۴۶
 تبدیل گالیل، ۳۰
 قانون هابل، ۱۷۵
 قدر ظاهری و مطلق، ۱۷۱
 قضیه برکهوف، ۱۲۱
 لنز، ۱۰
 لورنتس، ۱۰، ۲۲
 تبدیل‌های، ۴، ۲۲، ۲۶، ۴۴، ۴۹، ۷۲
 لورنتس ناوردا، ۴۷
 نیروی لورنتس، ۱۰، ۱۱، ۱۶
 پیمانه لورنتس، ۱۴، ۲۰
 گروه، ۳۴
 ماده تاریک، ۱۶۶
 مایکلسون، ۳
 مایکلسون - مورلی، ۳
 متریک
 شوارتسشیلد، ۱۱۹
 فریمان-رابرتسون-واکر، ۱۸۰
 کر، ۱۲۳
 متریک کر
 ارگوسفر، ۱۲۵
 مختصات لخت، ۲، ۴-۶، ۲۲، ۷۱، ۱۵۴
 برابری ناظرین لخت، ۲۱، ۲۹، ۴۹، ۷۴
 لخت موضعی، ۷۳، ۷۴، ۷۷، ۷۸، ۸۲، ۹۶
 ۱۰۸، ۱۱۰، ۱۲۱
 ناظر بنیادی، ۱۸۴
 معادله میدان انیشتن، ۱۱۴
 موج گرانشی، ۱۳۹
 آشکار سازی، ۱۵۰
 انرژی و تکانه، ۱۴۴
 تابش چارقطبی، ۱۴۸
 تولید موج، ۱۴۵
 در چرخش مختصات، ۱۴۳
 قطبش، ۱۴۳
 مکسول، ۱
 تانسور تنش، ۱۷، ۵۲
 تانسور میدان، ۵۱، ۵۶
 جریان جابجایی، ۱۰
 جریان جابجایی، ۱۰
 معادله‌های، ۲، ۴، ۹، ۱۰، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۱،
 ۵۲، ۶۷
 مینکوسکی، ۵۶، ۷۳، ۹۵

- متریک، ۳۲، ۸۴، ۱۲۰
 ناظر بنیادی، ۱۸۴
 نسبیت خاص، ۲
 نسبیت عام، ۲
 نیوتن
 ثابت گرانش، ۱۱۴
 قانون حرکت، ۱، ۳، ۴، ۶، ۱۶، ۴۹، ۵۳-۵۶، ۷۲، ۷۶، ۸۳، ۸۵
 قانون گرانش، ۱، ۵۵، ۷۱-۷۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۵۴، ۱۶۷، ۱۶۹
 پرینسیپیا، ۱
 پسانیوتن، ۱۲۷
 هرتز، ۲
 هم‌و ستار، ۸۲، ۸۳، ۹۰
 واحد نجومی، ۱۵۵
 پارسک، ۱۵۵
 پوانکاره، ۲۲
 ژئودزیک، ۸۲
 کمیت‌های هم‌وردا و پادورا، ۳۱، ۳۷
 کهکشان‌ها، ۱۵۵
 آندرومدا، بانوی پای در زنجیر، ۱۶۴
 خوشه‌ها و ابرخوشه‌ها، ۱۶۴
 راه شیری، ۱۶۱
 رده‌بندی، ۱۶۰
 همسایگان راه شیری، ۱۶۳
 گروه محلی، ۱۶۴
 کولن، ۱، ۱۰
 کپرنیک، ۱۵۴
 کیپلر، ۱۵۴
 کیهان
 افق ذره، ۱۹۹
 افق رخداد، ۲۰۱
 تابش پس‌زمینه، ۱۷۷
- خوشه‌ها، دیواره‌ها، تهی‌جاها، ۱۶۶
 دشواری افق، ۲۰۰
 دینامیک کیهان فریدمان-رابرتسون-واکر، ۱۸۸
 ساختار اسفنجی، ۱۶۶
 عصر سیطره تابش، ۱۹۶
 عصر سیطره ماده، ۱۹۶
 مدل Λ CDM، ۱۹۳
 مدل دوسیته-انیشتن، ۱۹۸
 مدل‌های فریدمان، ۱۹۷
 مدل‌های لومتر، ۱۹۹
 مسئله تختی، ۱۹۳
 پارامترهای رصد شده، ۱۹۴
 پارامترهای هابل و شتاب کیهانی، ۱۸۵
 چگالی بحرانی، ۱۹۲
 چگالی‌های بی‌بعد، ۱۹۲
 کیهان‌شناسی
 اصل کیهان‌شناختی، ۱۸۰
 مدل استاندارد، ۱۷۹، ۱۸۰
 گالیل، ۷۳
 تبدیل‌های، ۳-۷، ۷۲
 گروه، ۳۴، ۳۵
 آبل، ۳۷
 لورنتس، ۳۴
 لی، ۳۶
 پوانکاره، ۳۴
 گروه لورنتس
 ساختار جبری، ۴۲