

نوسانات آزاد اجرام زمین گونه

یوسف ثبوتی

مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایه، گاوهرنگ زنجان

و

بخش فیزیک - دانشگاه شیراز

دریافت نسخه نهایی: ۷ شهریور ۱۳۷۴

تاریخ دریافت: ۳ خرداد ۱۳۷۴

چکیده

در این بررسی مقدماتی، نوسانات آزاد یک جرم کروی خودگراننده متشکل از هسته مرکزی سیال و پوسته جامد بررسی شده است. نوسانات آزاد زمین واقعی، تا آنجا که فرض تقارن کروی و همسانگردی قابل قبول باشد، نباید از نوسانات مدل مورد بحث به دور باشد. هدف اصلی از این بررسی در این مرحله، آشنایی با پیچیدگیهای ریاضی مسئله است تا کسب داده‌های عددی قابل انطباق به زمین واقعی.

۱- مقدمه

پرداخته‌اند (پکریز و دیگران ۱۹۶۱)، زیوانسکی و گیلبرت (۱۹۷۱)، لوه (۱۹۷۳)، داهلن (۱۹۹۲) و امروزه نوسانات آزاد زمین کم‌وبیش موضوع کتب درسی شده است (متاهن و جیت ۱۹۸۱ و تیزایر ۱۹۸۹). با همه این احوال به نظر می‌رسد زمین‌فیزیکدانانی که به نوسانات زمین پرداخته‌اند و اخترفیزیکدانانی که مطالعه وجوه ارتعاشی ستارگان را پیشه ساخته‌اند به یک زبان حرف زده‌اند و مفاهیم فیزیکی مورد نظر خود را در قالب ساختار ریاضی مشترک بیان نکرده‌اند. در این مقاله سعی شده است گوشه‌ای از این خلأ پر شود. در صفحات آینده طبقه‌بندی وجوه ارتعاشی اجرام زمین‌گونه به موازات آنچه برای ستارگان معمول است و به شرحی که در بالا اشاره شد بررسی خواهد شد.

۲- معادلات حرکت

برای اجرام خودگراننده کروی معادلات تعادل عبارت‌اند از

$$\nabla p + \rho \nabla U = 0 \quad (1 - \text{الف})$$

$$\nabla^2 U = 4\pi G \rho \quad (1 - \text{ب})$$

که در آن $U(r)$ ، $p(r)$ ، $\rho(r)$ به ترتیب چگالی، فشار، و پتانسیل جاذبه هستند. همچنین فرض می‌شود که در حالت تعادل

در سال ۱۹۴۱ کولینگ نوسانات اجرام سماوی سیال را به دو دسته طبقه‌بندی کرد. امواج آکوستیک یا P که در آن، همانند امواج صوتی متعارف، تغییرات فشار نقش اول را بازی می‌کند و دسته دیگر امواج g که در آن، مانند حرکات همرفتی، تغییرات چگالی بر اثر دمانقش عمده را به عهده دارد. این طبقه‌بندی به اعتبار وجود دو نوع نیرو در سیالات است (ثبوتی، ۱۹۸۱). نخست نیروهای ناشی از تغییرات فشار که می‌کوشند حالت سیال را به وضع تعادل برگردانند و نوسانات صوتی را به وجود آورند، دوم نیروهای غوطه‌وری که از تغییرات چگالی با دما، بدون تغییر محسوس در فشار به وجود می‌آیند و می‌کوشند عنصر تغییر چگالی یافته را به حرکت همرفتی وادارند. نیروی اول هم در قسمت سیال و هم در قسمت جامد زمین و نیروی دوم در هسته سیال آن وجود دارد. علاوه بر اینها، در پوسته جامد زمین نیروهای کشسان برشی نیز وجود دارند و نوسانات مخصوص به خود تولید می‌کنند. انتظار می‌رود که طیف وجوه نوسانی زمین شامل سه گروه صوتی، همرفتی، و برشی باشد. مبانی ریاضی این طبقه‌بندی در صفحات آینده این نوشتار روشن خواهد شد.

نوسانات آزاد زمین برای نخستین بار در زلزله کامچاتکا سال ۱۹۵۲، توسط بینوف مشاهده شد (گارلند ۱۹۷۹ و ژاکوب ۱۹۹۳). تناوب ثبت شده ۵۷ دقیقه بود. از آن تاریخ به بعد پژوهشگران متعددی به بررسی نظری و رصدی مسئله

۳- فضای هیلبرت

باتوجه به هرمیتی بودن عملگر ω ، بردارهای ویژه معادله (۲) متعلق به یک فضای هیلبرت خواهند بود و تشکیل مجموعه کامل متعامد به هم خواهند داد. نخست به بررسی ساختار این فضا می پردازیم.

فرض می کنیم H یک فضای برداری خطی و ضرب نرده ای در آن به صورت زیر باشد

$$(\xi, \rho\eta) = \int \rho \xi^* \cdot \eta d^3x = \text{محدود} \quad \xi, \eta \in H \quad (۵)$$

اگر $(\xi, \rho\eta)$ صفر باشد دوبردار ξ و η متعامد به هم خواهند بود و به همین مفهوم می توان H را به سه زیرفضای متعامد تقسیم کرد. بنابه صورتی از قضیه هلمهولتز که از تبدیل پیمانه ای خاص روی قضیه متعارف هلمهولتز به دست می آید می توان نوشت

$$\rho\xi = -\rho \nabla \phi_p + \nabla \times A, \quad \nabla \cdot A = 0 \quad (۶)$$

که در آن $\phi_p(r)$ یک پتانسیل نرده ای و $A(r)$ پتانسیل برداری است (ثبوتی ۱۹۸۱). بردار اخیر را می توان به دو صورت مستقل از هم انتخاب کرد. فرض کنیم \hat{r} بردار واحد در امتداد r ، و $\phi_g(r)$ و $\phi_t(r)$ دو تابع نرده ای اختیاری باشند. دو بردار $A_t = \nabla \times \nabla \times (\hat{r}\phi_t)$ و $A_g = \nabla \times (\hat{r}\phi_g)$ بدون دیورژانس هستند. حال به اعتبار این گفته ها می توان نوشت

$$\xi = \xi_p + \xi_g + \xi_t; \quad \xi_p, \xi_g, \xi_t \in H \quad (۷)$$

که در آن

$$\xi_p = -\nabla \phi_p \quad (الف-۷)$$

$$\rho\xi_g = \nabla \times A_g = \nabla \times \nabla \times (\hat{r}\phi_g), \quad (ب-۷)$$

$$\rho\xi_t = \nabla \times A_t = \nabla \times \nabla \times \nabla \times (\hat{r}\phi_t). \quad (ج-۷)$$

تجزیه ξ به سه بردار ξ_p و ξ_g و ξ_t یک تجزیه متعامد است و می توان نشان داد

$$(\xi_\alpha, \rho\xi_\beta) = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = g, p, t. \quad (۸)$$

درستی معادله (۸) برای (g, p) یا (t, p) که در آن ξ_p مشتق از پتانسیل نرده ای است و بردارهای $\rho\xi_g$ یا $\rho\xi_t$ مشتق از پتانسیل برداری هستند روشن است. تحقیق درستی آن برای (t, g) نیازمند مقداری محاسبه است. قراردادن بسط هارمونیک بردارهای ξ_g و ξ_t از معادلات (۱۰) در معادله (۸) و

$p = p(\rho)$ و بنابراین $\Delta p = \frac{dp}{d\rho} \Delta \rho$ است. فرض کنیم دستگاه از حالت تعادل خود انحراف پیدا کند و جزء جرمی که در محل r است به اندازه $\xi(r, t)$ جابه جا شود. سرعت و شتاب آن $\dot{\xi}$ و $\ddot{\xi}$ خواهد بود و به همین اعتبار تغییرات $\delta\rho$ و δp و δU را در نقطه r به وجود خواهد آورد. معادلات حرکت برای ξ به شرح زیر خواهد بود که از خطی کردن معادلات حرکت سیال - جامد نتیجه می شود

$$-\rho \ddot{\xi}_i = \omega_{ij} \dot{\xi}_j = \frac{\partial \delta p}{\partial x^i} + \delta \rho \frac{\partial U}{\partial x^i} + \rho \frac{\partial \delta U}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\mu \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \xi \delta_{ij} \right) \right] \quad (۲)$$

که در آن $\mu(r)$ ضریب سختی مولفه جامد است. از معادله پیوستگی نتیجه می شود

$$\delta \rho = -\nabla \cdot (\rho \xi) \quad (۳-الف)$$

با فرض اینکه هم حرکت جزء جرم جابه جا شده و هم تغییرات لاگرانژی فشار (یعنی تغییرات در فشار جزء جابه جا شده و نه در نقطه ثابت r) بی دررو است نتیجه می شود

$$\delta p = -\gamma p \nabla \cdot \xi - \nabla p \cdot \xi = -\gamma p \nabla \cdot \xi + \frac{dp}{d\rho} (\delta \rho + \rho \nabla \cdot \xi), \quad (۳-ب)$$

تغییرات در پتانسیل گرانشی به نوبه خود از معادله پواسون به دست می آید:

$$\nabla^2 \delta U = 4\pi G \delta \rho \quad \text{یا} \quad \delta U = -G \int \delta \rho(r') |r - r'|^{-1} d^3x' \quad (۳-ج)$$

با توجه به معادلات (۳)، معادله (۲)، یک معادله خطی برداری برای ξ است و می توان نشان داد که عملگر ω در آن هرمیتی است. بنابراین می توان بستگیهای زمانی کمیات مختلف را به صورت $e^{-i\omega t}$ نوشت و معادله (۲) را به صورت زیر درآورد

$$\omega^2 = \frac{W}{S}, \quad \omega^2 \text{ حقیقی} \quad (۴-الف)$$

که در آن

$$W = \int \xi^* \cdot \omega \xi d^3x \quad (۴-ب)$$

$$S = \int \rho \xi^* \cdot \xi d^3x \quad (۴-ج)$$

که در آن $\Theta(r)$ متغیر پلی تروپی مدل و n اندیس پلی تروپی است. متغیر پلی تروپی، که از معادله لین - امدن پیروی می کند، با روابط $\rho \propto r^{1+\frac{1}{n}}$ و $\rho \propto n$ تعریف می شود و در شرایط مرزی $1 = \Theta(\text{مرکز})$ و $0 = \Theta(\text{سطح})$ صدق می کند (چاندراسکهار ۱۹۳۹). دلیل گنجاندن متغیر پلی تروپی در معادلات (۹) تامین شرایط مرزی برای مؤلفه های مختلف ξ_a است. برای جزئیات بیشتر به ثوتی (۱۹۷۷، ۱۹۸۱، ۱۹۸۶) مراجعه شود.

به ازای هر یک از توابع $Y_{lm}(\theta, \varphi); \alpha = p, g, t$ می توان از معادلات (۷) بردار تغییر مکان نظیر ξ_a^{li} را حساب کرد:

$$\xi_p^{\text{li}} = \left[-\partial_r \phi_p^{\text{li}} Y_{lm}, -\frac{1}{r} \phi_p^{\text{li}} \partial_\theta Y_{lm}, -\frac{im}{r \sin \theta} \phi_p^{\text{li}} Y_{lm} \right] \quad (10 - \text{الف})$$

$$\xi_g^{\text{li}} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} \phi_g^{\text{li}} Y_{lm}, \frac{1}{r} \partial_r \phi_g^{\text{li}} \partial_\theta Y_{lm}, \frac{im}{r \sin \theta} \partial_r \phi_g^{\text{li}} Y_{lm} \right] \quad (10 - \text{ب})$$

$$\xi_t^{\text{li}} = \left[0, \frac{im}{r \sin \theta} \phi_t^{\text{li}} Y_{lm}, -\frac{1}{r} \phi_t^{\text{li}} \partial_\theta Y_{lm} \right] \quad (10 - \text{ج})$$

مجموعه بردارهای هارمونیک کروی معادلات (۱۰)، $(\xi_a^{\text{li}}, a = p, g, t)$ متعامد و کامل است و زیر فضای H_a را می پوشاند.

۶ - روشهای عددی

فرض کنیم $\varepsilon_i = \omega^2 i$ مقدار ویژه ای برای معادله (۲)، و $\xi_i(r)$ بردار ویژه متناظر آن باشد. زیرنگاشت i در اینجا شامل همه مشخصات مقادیر ویژه، اعم از l, m, t, g, p است. همچنین فرض کنیم $\{\xi_k = \xi_a^{\text{li}}\}$ مجموعه پایه ای برای فضای H باشد. بردار ξ_i را بر حسب ξ_k بسط می دهیم

$$\xi_i = \xi_k Z_{ki} \quad (11)$$

که در آن Z_{ki} ضرایب بسط و مقادیر ثابتی اند. بسط خطی بردارهای ویژه ξ_i بر حسب بردارهای پایه ξ_k و منظور کردن ضرایب بسط Z_{ki} به مثابه پارامترهای وردشی در حساب تغییرات، به روش ریلی - ریتز موسوم است. معادله (۲) را از طرف چپ در Z_{ki}^* ضرب می کنیم و روی حجم دستگاه انتگرال می گیریم

$$(\xi_j, \omega \xi_k) Z_{ki} = (\xi_j, \rho \xi_k) Z_{ik} \varepsilon_i \quad (12 - \text{الف})$$

انتگرال گیری روی زوایای θ و φ با توجه به اینکه $\rho(r)$ تقارن نیازمند مقداری محاسبه است. قرارداد بسط هارمونیک بردارهای ξ_i و ξ_k از معادلات (۱۰) در معادله (۸) و انتگرال گیری روی زوایای θ و φ با توجه به اینکه $\rho(r)$ تقارن کروی دارد متعامد بودن ξ_i و ξ_k را نیز نشان خواهد داد. بنابراین فضای H به سه زیر فضای $\{ \xi_p \}$ ، $\{ \xi_g \}$ و $\{ \xi_t \}$ ، H_p ، H_g و H_t متعامد تجزیه می شود. علی الاصول هر بردار ویژه معادله (۲) که یک وجه نوسانی مدل مورد نظر است دارای هر سه مؤلفه p و g و t است. ولی خصوصیات معادله طوری است که وجوه نوسانی نیز به سه دسته متمایز از هم تقسیم می شوند و در هر دسته یکی از مؤلفه های p یا g یا t مؤلفه مسلط است و دیگر مؤلفه ها کوچک اند. در زیر معادلات (۱۴) دوباره به این موضوع اشاره شده است.

۴ - تقارن O(3)

با فرض کروی بودن مدل خودگراننده در حالت تعادل و اینکه کمیت های ρ و p و U و μ در این حالت تنها به اندازه بردار r بستگی دارند می توان نشان داد که عملگر w دارای تقارن $O(3)$ است و با عملگرهای J_z و J^2 تکانه زاویه ای، $(J_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k)$ دارای مجموعه توابع ویژه مشترک اند. حکم اخیر به معنای زیر است: توابع ویژه J_z و J^2 هارمونیکهای کروی، $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ هستند. به ازای هر (l, m) سه بردار هارمونیک کروی از نوع بردارهای معادلات (۱۰) می توان به وجود آورد. بردارهای ویژه تانسور w ترکیبهای خطی مناسبی از بردارهای معادلات اخیر به ازای همان (l, m) خواهند بود و بر بردارهای ناشی از هر (l', m') دیگر متعامد خواهند بود.

۵ - حساب تغییرات

به اعتبار هرمیتی بودن عملگر w مقادیر و توابع ویژه آن را می توان با حساب تغییرات به دست آورد. در روش تغییرات ریلی - ریتز که در این بررسی به کار رفته است به شرح زیر عمل می شود.

الف) برای هر یک از توابع نرده ای ϕ_p و ϕ_g و ϕ_t ، پس از بسط هارمونیک کروی و جدا کردن بستگیهای زاویه ای آن، سه مجموعه کامل از چند جمله ایهای r انتخاب می شود. مجموعه های مورد استفاده در این بررسی برای ساختارهای پلی تروپی عبارت اند از

$$\phi_p^{\text{li}} = r^l + 2i, i = 0, 1, \dots \quad (9 - \text{الف})$$

$$\phi_g^{\text{li}} = \Theta^n + 1 r^{l+2i+1}, i = 0, 1, \dots \quad (9 - \text{ب})$$

$$\phi_t^{\text{li}} = \Theta^n + 2 r^{l+2i+2}, i = 0, 1, \dots \quad (9 - \text{ج})$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{pp} & Z_{pg} \\ Z_{gp} & Z_{gg} \\ & & Z_{tt} \end{bmatrix} \quad (۱۳-ج)$$

ماتریس E نیز بنا به تعریف قطری است و دارای بلوک بندی زیر است

$$E = \begin{bmatrix} E_p & & \\ & E_g & \\ & & E_t \end{bmatrix} \quad (۱۳-د)$$

پس از پیدا کردن Z و قرارداد آن در معادله (۱۰) و تفکیک بلوک بندی آن، سه دسته جواب به شرح زیر تشخیص داده می شود

$$\xi_p = \xi_p Z_{pp} + \xi_g Z_{gp} \quad (۱۴-الف)$$

$$\xi_g = \xi_p Z_{pg} + \xi_g Z_{gg} \quad (۱۴-ب)$$

$$\xi_t = \xi_t Z_{tt} \quad (۱۴-ج)$$

در معادله (۱۴-الف) محاسبات نشان می دهند که جمله اول سمت راست جمله غالب است، یعنی

$$(\xi_p Z_{pp}, \rho \xi_p Z_{pp}) > (\xi_g Z_{gp}, \rho \xi_g Z_{gp})$$

به همین اعتبار ξ_g ها وجوه نوسانی p نامیده می شوند. در معادله (۱۴-ب) جمله دوم سمت راست، جمله مسلط است. بنابراین ξ_g وجوه نوسانی g خوانده می شوند. اینکه در معادلات (۱۴) یکی از مولفه های p یا g یا t بزرگتر از مولفه های دیگر ظاهر می شود ناشی از انتخاب مناسبی است که برای بردارهای پایه $\{\xi\}$ انجام شده است. این انتخاب نیز با توجه به سه نیروی موجود در معادله (۲) حرکت، یعنی نیروی ناشی از δp ، نیروی ناشی از $\delta \rho$ و δU ، و نیروی برشی متناسب با μ ، صورت پذیرفته است. بردارهای $\{\xi_p\}$ بر نقش $\delta \rho$ و به تبع آن δp تاکید می گذارند و اختلالات آکوستیکی را سبب می شوند. بردارهای $\{\xi_g\}$ ، برعکس، حرکات "نوع" همرفتی را بر می انگیزند که در معادله (۲) به خاطر نبودن فرایندهای برگشت ناپذیر، از نوع چسبندگی و غیره، یا به نوسانات g منجر می شوند و یا به حرکاتی که با زمان نمو نمایی دارند می انجامند. حالت اخیر وقتی است که شرط شوارتزشیلد برای حرکات همرفتی برآورده شده باشد:

$$\left(\frac{\delta p}{\delta \rho}\right)_{ad} - \frac{\delta p}{\delta \rho} > 0$$

که در آن عناصر ماتریسهای مختلف به سهولت از معادله (۱۲-الف) خوانده می شود. ماتریس Z به طور همزمان S و W را قطری می کند

$$Z^+ S Z = I \quad (\text{ماتریس واحد}) \quad (۱۲-ج)$$

$$Z^+ W Z = E \quad (۱۲-د)$$

منظور از حل معادله (۱۲-الف) قطری کردن همزمان W و S به شرح فوق و یافتن ماتریس E و Z است. این عمل در تقریبهای مختلف، به شرح زیر، امکان پذیر است: در معادله (۱۲-ب) ماتریسها $\infty \times \infty$ هستند. تحدید آنها به ماتریسهای $n \times n$ با n های فزاینده این امکان را فراهم می کند که معادله در تقریبهای متوالی حل شود. جوابهای E و Z برای یک n بخصوص دقیقتر و بنا به "اصل می نیمم" که از طبیعت هر میتی ماتریسهای W و S ناشی می شود کوچکتر از جوابهای نظیر برای $m < n$ خواهد بود.

۶-۱ طبقه بندی وجوه نوسانی

تقسیم بردارهای پایه به سه دسته $\{\xi_p\}$ و $\{\xi_g\}$ و $\{\xi_t\}$ تقسیم هر یک از ماتریسهای معادله (۱۲-ب) و در نتیجه خود معادله (۱۲-ب) به بلوکهای pp و pg و غیره را به دنبال دارد. نظر به متعامد بودن ξ_g ها که در معادله (۸) آمده است ماتریس S بلوکهای غیر قطری ندارد:

$$S = \begin{bmatrix} S_{pp} & & \\ & S_{gg} & \\ & & S_{tt} \end{bmatrix} \quad (۱۳-الف)$$

محاسبات مفصل و نسبتاً طولانی ماتریس W را به شرح زیر می دهد

$$W = \begin{bmatrix} W_{pp} & W_{pg} \\ W_{gp} & W_{gg} \\ & & W_{tt} \end{bmatrix} \quad (۱۳-ج)$$

این ساختار نشان می دهد که بلوک tt معادله (۱۲-ب) مستقل از تاثیر بلوکهای دیگر قابل حل است و بردارهای ویژه حاصل منحصرأ یک ترکیب خطی از بردارهای $\{\xi_t\}$ هستند. این دسته از جوابها را وجوه نوسانی t به اعتبار جنبه ای بودن آنها نامگذاری خواهیم کرد. به سبب وجود بلوکهای W_{gp} و W_{pg} وجوه نوسانی دیگر ترکیبی از بردارهای ξ_p و ξ_g خواهد بود. بنابراین ساختار ماتریس Z نیز، که بردارهای ξ_i را بر حسب پایه $\{\xi_k\}$ می دهد همان ساختار ماتریس W خواهد بود:

پرداختن به جزئیات که ظرایف محاسباتی معادله (۱۲ - ب) را نشان دهد و پیچیدگیهای جوابها را بنمایاند نیست. خواننده علاقه مند می تواند به مقالات نویسنده که در بخش "مراجع" آمده و به مراجع دیگری که در این مقالات اشاره شده است مراجعه کند.

نقش $\{\xi_i\}$ ها نیز روشن است - تنها حرکات برشی در قسمت جامد مدل را که در آن $\mu \neq 0$ است نشان می دهند. محاسبات عددی برای ساختارهای پلی تروپی انجام شده است. محاسبات برای زمین واقعی به دنبال خواهد آمد. در نوشته مقدماتی و کوتاه حاضر بیش از آنچه که در بالا آمد مجال

مراجعها

1. S., Chandrasekhar, *Stellar structure* Univ. Chicago Press, (1939).
2. T. G., Cowling, *Roy. Astron. Soc., Monthly Notices*, **101** (1941) 367.
3. F. A., Dahlen, *Geophys. J. Int.*, (1922) **111**, 11-31.
4. A. M., Dziewonski, and F., Gilbert, *Nature*, **234** (1971) 456.
5. G. D., Garland, *Gerge Introduction to Geophysics*, second edition, W. B. Saunders Company, Toronto, (1979).
6. J. A., Jacobs, *Deep Interior of the earth*, London, (1993).
7. Jit, Singh, Sarra and Ben-Menahen, Ari, *Seismic Waves and Sources*, Springer, (1981).
8. C., Luh, Peter *Free Oscillation of the Laterally Inhomogenous Earth*, *Geophysics. J. R. Astro. Soc.* **32** (1973) 187-202.
9. C. L., Pekeris, Z., Alterman, and H., Jarosch, *Phys. Rev.*, (1961) 122, 1692.
10. Y., Sobouti, *Astron, Astrophys.*, (1977) **55**, 327.
11. Y., Sobouti, *Astron, Astrophys.*, (1981) **100**, 319.
12. Y., Sobouti, *Astron, Astrophys.*, (1986) **169**, 95.
13. R., Teisseyre, *Gravity and Low Frequency Geodynamics*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, (1989).